

## Exo2a: corrigé

# Introduction à la méthode des EF

1- Etablir la relation  $u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2)$

Pour ce faire, on utilise un développement limité de Taylor (ou Mac Laurin) de  $u(x)$  à l'ordre 2 autour de  $x_0$  :

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + o((x - x_0)^n).$$

Dans notre cas, on remplace  $x$  par  $(x + h)$  sachant que  $h$  reste petit:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) + O(h^2)$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) + O(h^2)$$

$$u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2 u''(x) + O(h^2)$$

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$



# Introduction à la méthode des EF

## Exo2a: corrigé

3- En prenant  $N = 3$  ( $h=1/4$ ), calculer une approximation de la solution en 0.25, 0.5 et 0.75 à l'aide d'une décomposition de Cholesky.

La solution analytique de  $-u''(x) = -x$  avec  $u(0)=u(1)=0$  est  $u(x) = x(x^2-1)/6 < 0$ .

Solution numérique:  $N=3$  donc  $h = 1/4$  et le schéma en différences finies s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/3 & \sqrt{4}/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{2}/3 \\ 0 & 0 & \sqrt{4}/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ donc}$$

$$A \bar{u} = LL^t \bar{u} = \frac{-1}{16} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix} \text{ avec } L = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/3 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

# Introduction à la méthode des EF

## Exo2a: corrigé

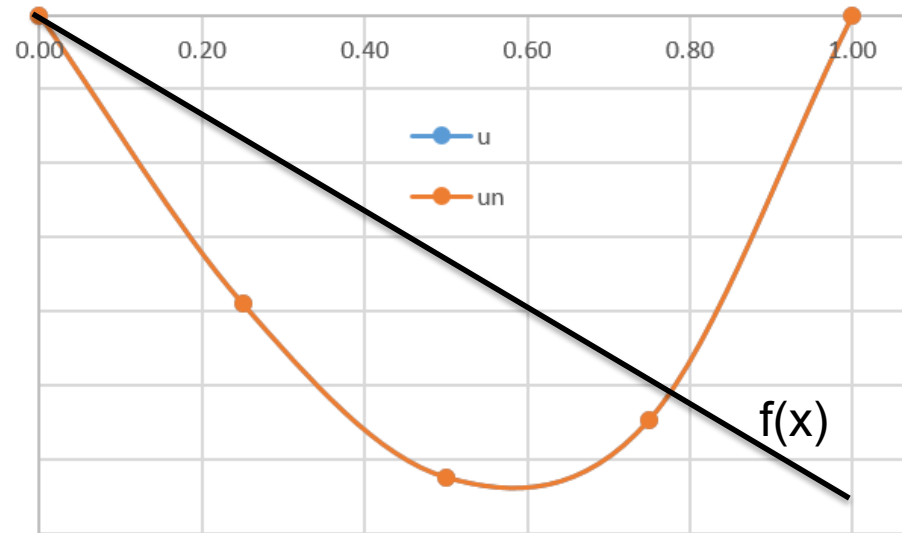
**Solution analytique** de  $u''(x) = x$  avec  $u(0)=u(1)=0$  est  $u(x) = x(x^2-1)/6$

**Solution numérique:**  $h = 1/4$  et le schéma en différences finies devient s'écrit:

$$A \bar{u} = LL^t \bar{u} = \frac{-1}{16} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix} \text{ avec } L = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/3 & 2/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

On résoud  $L\bar{y} = \frac{-1}{16} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix}$  (descente) puis  $L^t\bar{x} = \bar{y}$  (montée) qui donne  $\bar{x} = \begin{pmatrix} -5/128 \\ -1/16 \\ -7/128 \end{pmatrix}$

qui est exactement la solution analytique en  $1/4$ ,  $1/2$  et  $3/4$  !



# Introduction à la méthode des EF

## Exo2b: condition sur la dérivée de $u(x)$ en $x = 0$ (condition essentielle)

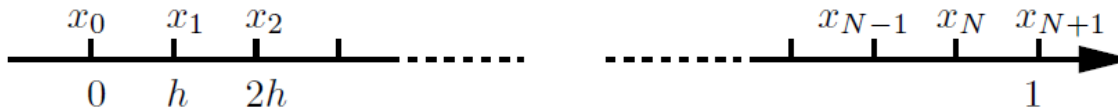
Établir le schéma aux différences finies dans lequel  $u(x)$  est le déplacement vertical d'une corde non tendue ( $P=0$  donc  $c(x) = P/EI(x) = 0$ ), telle **que  $du/dx = a$  en  $x = 0$**  et  $u(1)=0$  et soumise à une densité de charge verticale  $f(x) = -x$ .

On notera  $u_0$  l'approximation de  $u$  en  $x = 0$ . et on utilisera le  $(N+1)$  vecteur  $\vec{u} =$

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}$$

Déterminer la solution analytique.

Soit  $N$  un entier positif; on pose  $h = 1/(N + 1)$  et on note  $x_j = jh$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, N + 1$ , les points de discrétisation (fig. 10.3).



## Exo2b: solution

# Introduction à la méthode des EF

Établir le schéma aux différences finies dans lequel  $u(x)$  est le déplacement vertical d'une corde non tendue ( $P=0$  donc  $c(x) = P/EI(x) = 0$ ), telle que  $du/dx = a$  en  $x = 0$  (flux imposé) et  $u(1)=0$  et soumise à une densité de charge verticale  $f(x) = -x$ .

On discrétise le segment  $[0,1]$  en  $N+1$  pas d'espace  $h = 1/(N+1)$

Soit  $N$  un entier positif; on pose  $h = 1/(N + 1)$  et on note  $x_j = jh$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, N + 1$ , les points de discrétisation (fig. 10.3).



On doit introduire  $u(0)$  qui est inconnue: on pose  $u_0 \approx u(x=0)$  et on utilise la condition aux limites (C.L.) en  $x = 0$ :

$$u'(0) = a \approx \frac{u_1 - u_0}{h} \text{ i.e. } -u_0 + u_1 = ah \text{ et on définit le } (N + 1) \text{ vecteur } \vec{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}$$

Pour  $j > 1$ , le schéma en différences finies reste inchangé:

Le schéma en différences finies s'écrit avec  $c(x) = 0$ ,  $f(x) = -x$  et  $u_j$  une approximation de la solution  $u$  en  $x_j$  pour  $j$  variant de 1 à  $N$ :

$$u'(0) = a \approx \frac{u_1 - u_0}{h} \text{ i.e. } -u_0 + u_1 = ah \text{ que l'on peut écrire } \frac{u_0 - u_1}{h^2} = \frac{-a}{h}$$

$$-u''(x_1) = f(x_1) = -x_1 \text{ soit } \frac{-u_0 + 2u_1 - u_2}{h^2} \approx f(x_1) = -x_1 = -h$$

Le système matriciel s'écrit alors pour  $N = 3$ , i.e.  $h = 1/4$ :

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} -a/h \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a/h \\ -h \\ -2h \\ -3h \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{u} = -h^3 \begin{pmatrix} a/h^2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Résolution du système:

$$\mathbf{B}\vec{u} = \vec{b} = -h^3 \begin{pmatrix} a/h^2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

B est symétrique ..... On vérifie que  $\det B$  est non nul ... et on résout à l'aide des pivots ou alors d'une décomposition en LU (produit d'une matrice triangulaire inférieure L par une matrice triangulaire supérieure U).

Mais surtout, on détermine LA solution analytique:

$$u(x) = \frac{x^3}{6} + ax - \left(\frac{1}{6} + a\right) \quad \text{qui donne } u(0) = -\left(\frac{1}{6} + a\right)$$