

Milieux Continus
Midterm 2 (mercredi 17 Décembre 2025)

Exercice 1 : Thermique stationnaire **(3/3/3/3 soit 15 points)**

Une conduite cylindrique de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e est parcourue par un fluide chaud à une température T_i . Une perte de chaleur se fait par diffusion $\vec{j}_T = -k\vec{\nabla}T$ à travers la paroi de la conduite. La conduite est constituée d'un métal de conductivité thermique k et de chaleur spécifique C_p , toutes deux supposées constantes. La température est fonction seulement de r , distance à l'axe de la conduite (régime thermique stationnaire).

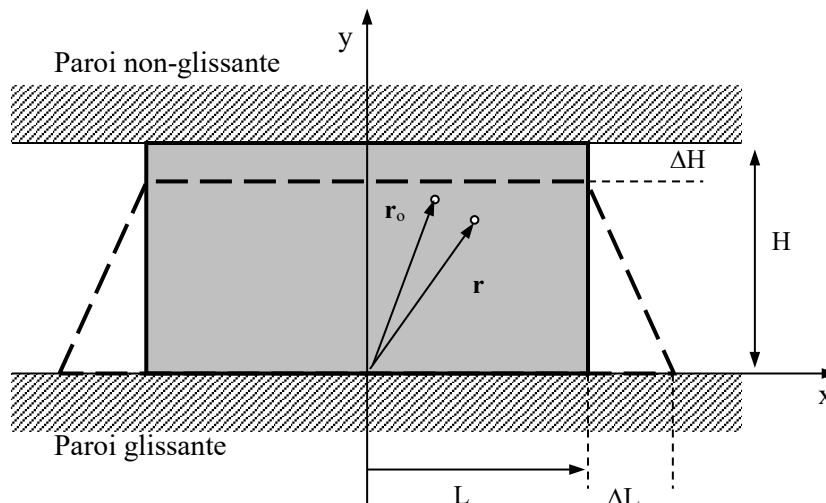
1. Ecrire la loi générale de conservation de l'enthalpie appliquée au cas de la chaleur en précisant la signification physique de chacun des termes.
2. Appliquer cette loi au cas présent en supposant un état stationnaire et en écrivant que $h = C_p T$.
3. Montrer que la température dans le métal vérifie $\Delta T = 0$.
4. Résoudre alors cette équation en supposant $T(R_i) = T_i$ et $T(R_e) = T_e$. On fera apparaître le terme $(T-T_i)/(T_e-T_i)$. On précise que dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , le laplacien d'une fonction scalaire $f(r,\theta,z)$ vaut $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial f}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.
5. Calculer la perte de chaleur (puissance) en surface de la conduite sur une hauteur H .

Bonus : calculer le gain de chaleur (puissance) rentrant dans la conduite sur une hauteur H et comparer cette valeur à la perte de chaleur en surface de la conduite.

Exercice 2 : Ecrasement d'un profilé **(3/3/3/3 soit 15 points)**

On considère, dans une section transverse, la déformation plane (2D) d'un profilé initialement rectangulaire entre deux plaques. L'une de ces plaques est parfaitement non-glissante et l'autre idéalement glissante. Au terme de la déformation, supposée faible, le profilé est supposé adopter un profil trapézoïdal (voir figure). Dans ces conditions, un point initialement en (x, y) se déplace en (x', y') donné par :

$$x' = x \left(1 + \varepsilon_L \left(1 - \frac{y}{H} \right) \right) \text{ avec } \varepsilon_L = \frac{\Delta L}{L} \geq 0. \text{ et } y' = y(1 - \varepsilon_H) \text{ avec } \varepsilon_H = \frac{\Delta H}{H} \geq 0.$$



1. Vérifiez que la plaque supérieure est parfaitement non-glissante et la plaque inférieure idéalement glissante.

2. Calculez le tenseur linéarisé des déformations noté ϵ . Avec une limite à 10%, sous quelles conditions l'écrasement peut-il être considéré de petite déformation ?
3. Déterminez le tenseur tridimensionnel des contraintes σ associé à ces déformations planes en supposant un comportement élastique linéaire et isotrope de coefficients de Lamé μ et λ .
4. D'après le critère de plasticité de Von Mises, quels points vont plastifier en premier ? On donne :

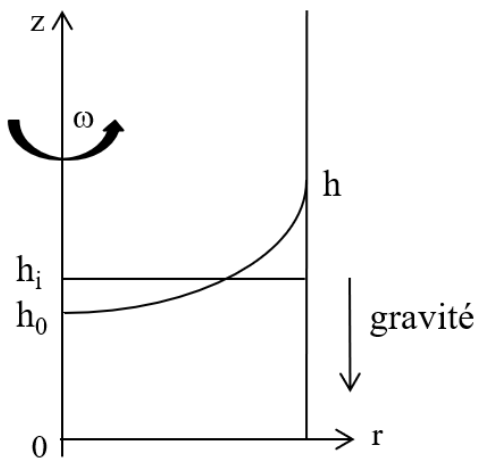
$$\sigma_{eq}^2 = \sigma_{Mises}^2 = \frac{1}{2} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{yy})^2 + 6\sigma_{xy}^2 + 6\sigma_{xz}^2 + 6\sigma_{yz}^2 \right].$$
5. On note σ_0 la limite élastique du matériau constituant le cylindre. A quelle condition sur ϵ_L , ϵ_H , L et H le profilé ne va-t-il pas se déformer plastiquement ?

Bonus : Calculez la densité de force sur la face supérieure et la force \vec{F} que subit le profilé en notant L_z sa longueur selon l'axe z .

Exo3. Fluide en rotation

(3/3/3/3/4/4 soit 20 points)

On remplit à la hauteur h_i un récipient cylindrique de rayon R d'un fluide de masse spécifique ρ . On met ensuite ce récipient en rotation selon l'axe du cylindre à la vitesse ω . En régime stationnaire, le récipient impose sa rotation au fluide et la surface libre entre l'air et le fluide se creuse au centre du récipient et remonte sur ses parois. On note h_0 la hauteur du fluide au centre et h celle au bord du récipient. Le but de l'exercice est de calculer h et h_0 et de trouver la forme géométrique de cette surface libre caractérisée par $p = p_a$ où p_a est la pression atmosphérique.



Fluide en rotation dans un récipient cylindrique.

- 1) Quelle est la densité volumique de force centrifuge subit par un petit élément de masse m situé à une distance r de l'axe de rotation ? Exprimer cette densité volumique en fonction de r , ρ et ω .
- 2) Montrer que dans le repère tournant à la vitesse ω , l'équation de Navier-Stokes se réduit à $\rho \vec{f} = \overline{\text{grad} p}$ avec $p = p(r, \theta, z)$, la pression et $\rho \vec{f}$ la densité volumique des forces centrifuge et de gravité.
- 3) Ecrire les dérivées partielles de la pression par rapport à ses trois variables.
- 4) Intégrer ces trois équations pour obtenir le champ de pression $p(r, \theta, z)$.
- 5) La surface libre correspondant à $p = p_a$, écrire l'équation de cette surface sous la forme $z = z(r)$ et donner sa forme géométrique. Calculez h puis $h - h_0$ en fonction de R , g et ω .
- 6) En appliquant la conservation du volume de fluide, i.e. en supposant le fluide incompressible, montrer que $2h_i = h + h_0$. Exprimer ensuite h_0 et h en fonction de h_i et des paramètres du problème.

Bonus : Montrer qu'en variant la vitesse de rotation, toutes les surfaces libres ont en commun un cercle dont on donnera le rayon et la position selon z .

Corrigé

Exercice 1 : Thermique stationnaire

(15 points)

Une conduite cylindrique de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e est parcourue par un fluide chaud à température T_i . Une perte de chaleur se fait par diffusion $\vec{j}_T = -k\vec{\nabla}T$ à travers la paroi de la conduite. La conduite est constituée d'un métal de conductivité thermique k et de chaleur spécifique C_p , toutes deux supposées constantes. La température est fonction seulement de r , distance à l'axe de la conduite.

Ecrire la loi générale de conservation de l'enthalpie appliquée au cas de la chaleur en précisant la signification physique de chacun des termes.

On se place dans un repère cylindrique avec z selon l'axe du cylindre. La température est alors fonction seulement de r , distance à l'axe de la résistance puisqu'on néglige les effets d'extrémités en z (H très grand devant R) et qu'il y a invariance du problème par rotation d'angle θ . Conservation

de l'enthalpie :
$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} h + \text{div } \mathbf{j}_T = \dot{Q}_T$$

Dans notre cas, il n'y pas de vitesse du matériau donc le terme de transport est nul. De plus, on n'a aucun terme de production de chaleur. Enfin le vecteur flux de chaleur \mathbf{j}_T vaut $-k \text{ grad}T$.

Appliquer cette loi au cas présent en supposant un état stationnaire et en écrivant que $h = C_p T$. La conservation de l'enthalpie devient dans notre cas :

$$-k\Delta T + \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = 0 = -k\Delta T$$

Montrer alors que la température dans le métal vérifie $\Delta T = 0$.

Résoudre alors cette équation en supposant $T(R_i) = T_i$ et $T(R_e) = T_e$. On fera apparaître le terme $\frac{T-T_i}{T_e-T_i}$

. On rappelle que dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z), le laplacien d'une fonction scalaire $f(r,\theta,z)$ vaut
$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial f}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$T = T(r) \text{ et } \Delta T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right] = 0 \text{ soit } \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right] = 0, \quad r \frac{\partial T}{\partial r} = A, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = A/r \text{ et } T = A \ln(r) + B,$$

$$\text{CL: } A \ln R_i + B = T_i \text{ et } A \ln R_e + B = T_e \text{ qui donne}$$

$$T - T_i = A \ln r + B - A \ln R_i - B = A \ln(r/R_i) \text{ et } T_e - T_i = A \ln R_e + B - A \ln R_i - B = A \ln(R_e/R_i)$$

$$\text{Soit } \frac{T - T_i}{T_e - T_i} = \ln(r/R_i) / \ln(R_e/R_i) \text{ et } \frac{\partial T}{\partial r} = (T_e - T_i) / (r \ln(R_e/R_i))$$

$$\text{NB: Cauchy en Re: } k \frac{\partial T}{\partial r} = kA/Re = -h(T - T_{\text{ext}}) = -h(A \ln(Re) + B - T_{\text{ext}})$$

$$\text{et } A \ln R_i + B = T_i ; \quad kA = -hRe(A \ln(Re/R_i) + T_i - T_{\text{ext}}), \quad A(k + hRe \ln(Re/R_i)) = -hRe(T_i - T_{\text{ext}}),$$

$$A = -hRe(T_i - T_{\text{ext}}) / (k + hRe \ln(Re/R_i)) \text{ et } B = T_i + hRe \ln R_i (T_i - T_{\text{ext}}) / (k + hRe \ln(Re/R_i))$$

$$(T - T_i) / (T_{\text{ext}} - T_i) = \frac{hRe \ln(r/R_i)}{k + hRe \ln(Re/R_i)} \quad (\text{en } r = R_i, T = T_i \text{ et en } r = Re, T = T_i + (T_{\text{ext}} - T_i) \frac{hRe \ln(Re/R_i)}{k + hRe \ln(Re/R_i)})$$

$$2 \text{ cas : } h = 0, T = T_i \text{ pour tout } r; \quad h = \infty, T(r = Re) = T_{\text{ext}} = T_e \text{ et } (T - T_i) / (T_e - T_i) = \frac{\ln(r/R_i)}{\ln(Re/R_i)}$$

Calculer la perte de chaleur (puissance) en surface de la conduite sur une hauteur H .

La perte vaut sur la surface extérieure en $r = R_e$ sur une hauteur H :

$$\text{Perte} = \int_S \vec{j}_T \cdot d\vec{S} = -k \int_S \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_e} = -2\pi R_e H k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_e} = -2\pi R_e H k (T_e - T_i) / R_e \ln(R_e/R_i)$$

Perte = $2\pi H k (T_i - T_e) / \ln(R_e/R_i)$ en W (cette puissance est une perte pour la conduite).

Bonus : calculer le gain de chaleur (puissance) rentrant dans la conduite sur une hauteur H.

$$\text{Gain} = \int_S \vec{j}_T \cdot d\vec{S} = k \int_S \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_i} = 2\pi R_i H k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_i} \text{ car } d\vec{S} = -dS \vec{e}_r$$

$$\text{Gain} = 2\pi R_i H k (T_e - T_i) / R_i \ln(R_e/R_i) = 2\pi H k (T_e - T_i) / \ln(R_e/R_i) < 0. \text{ car } T_e < T_i$$

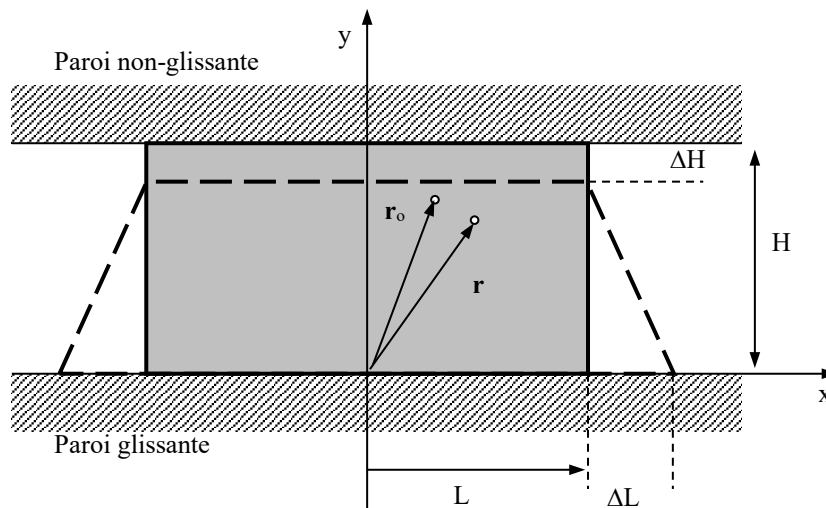
Cette puissance est un gain pour la conduite et gain + perte = 0. car régime stationnaire.

Exercice 2 : Ecrasement

(15 points)

On considère, dans une section transverse, la déformation plane (2D) d'un profilé initialement rectangulaire entre deux plaques. L'une de ces plaques est parfaitement non-glissante et l'autre idéalement glissante. Au terme de la déformation, supposée faible, le profilé est supposé adopter un profil trapézoïdal (voir figure). Dans ces conditions, un point initialement en (x, y) se déplace en (x', y') donné par :

$$x' = x \left(1 + \varepsilon_L \left(1 - \frac{y}{H} \right) \right) \text{ avec } \varepsilon_L = \frac{\Delta L}{L} \geq 0. \text{ et } y' = y(1 - \varepsilon_H) \text{ avec } \varepsilon_H = \frac{\Delta H}{H} \geq 0.$$



1 Vérifiez que la plaque supérieure est parfaitement non-glissante et la plaque inférieure idéalement glissante.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x\varepsilon_L \left(1 - \frac{y}{H} \right) \\ -y\varepsilon_H \end{pmatrix}, \text{ en } y = H, u_x = 0 \text{ donc non-glissante et en } y=0, u_y=0 \text{ donc glissante.}$$

2 Calculer le tenseur linéarisé des déformations en précisant les hypothèses nécessaires.

$$\varepsilon_{lin} = \frac{1}{2} \left(\text{grad} \vec{u} + (\text{grad} \vec{u})^t \right) = \begin{pmatrix} \varepsilon_L \left(1 - \frac{y}{H} \right) & -\frac{x\varepsilon_L}{2H} & 0 \\ -\frac{x\varepsilon_L}{2H} & -\varepsilon_H & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ de petites déf. ssi chaque composante est } < 10\%.$$

$$\left| \varepsilon_L \left(1 - \frac{y}{H} \right) \right| \leq \varepsilon_L \text{ car } 0 \leq y \leq H \text{ donc } \varepsilon_L \leq 10\%. \quad |-\varepsilon_H| = \varepsilon_H < 10\%$$

$$\text{et } \left| -\frac{x\varepsilon_L}{2H} \right| \leq \frac{0.1L}{2H} \leq 0.1 \text{ car } |x| \leq L \text{ et } \varepsilon_L \leq 10\%, \text{ ce qui donne } L \leq 2H.$$

3. Déterminez le tenseur tridimensionnel des contraintes associé à ces déformations élastiques en supposant un comportement élastique isotrope de coefficients de Lamé μ et λ .

$$\text{Tr}\varepsilon_{\text{lin}} = \varepsilon_L \left(1 - \frac{y}{H} \right) - \varepsilon_H \text{ et } \sigma = \begin{pmatrix} 2\mu\varepsilon_L \left(1 - \frac{y}{H} \right) + \lambda \left(\varepsilon_L \left(1 - \frac{y}{H} \right) - \varepsilon_H \right) & -\mu \frac{x\varepsilon_L}{H} & 0 \\ -\mu \frac{x\varepsilon_L}{H} & -2\mu\varepsilon_H + \lambda \left(\varepsilon_L \left(1 - \frac{y}{H} \right) - \varepsilon_H \right) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \left(\varepsilon_L \left(1 - \frac{y}{H} \right) - \varepsilon_H \right) \end{pmatrix}$$

D'après le critère de plasticité de Von Mises, quels points vont plastifier en premier ?

$$\sigma_{\text{eq}}^2 = \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{yy})^2 + 6\sigma_{xy}^2 + 6\sigma_{xz}^2 + 6\sigma_{yz}^2}{2} < \sigma_0^2$$

$$2\sigma_{\text{eq}}^2 = \left(2\mu\varepsilon_L \left(1 - \frac{y}{H} \right) + 2\mu\varepsilon_H \right)^2 + \left(2\mu\varepsilon_L \left(1 - \frac{y}{H} \right) \right)^2 + (2\mu\varepsilon_H)^2 + 6 \left(\mu\varepsilon_L \frac{x}{H} \right)^2 ; \left(1 - \frac{y}{H} \right)^2 \text{ est max en } y = 0$$

$$\text{et } \left(\mu\varepsilon_L \frac{x}{H} \right)^2 \text{ est max en } x^2 = L^2 : \text{ Les points à plastifier en premier sont } (x = \pm L, y = 0, z).$$

On note σ_0 la limite élastique du matériau constituant le cylindre. A quelle condition sur ε_L , ε_H , L et H le profilé ne va-t-il pas se déformer plastiquement ?

$$2\sigma_{\text{eq}}^2 = (2\mu\varepsilon_L + 2\mu\varepsilon_H)^2 + (2\mu\varepsilon_L)^2 + (2\mu\varepsilon_H)^2 + 6 \left(\mu\varepsilon_L \frac{L}{H} \right)^2 = \mu^2 \left(4(\varepsilon_L + \varepsilon_H)^2 + 4(\varepsilon_L)^2 + 4(\varepsilon_H)^2 + 6 \left(\varepsilon_L \frac{L}{H} \right)^2 \right) < 2\sigma_0^2$$

$$2(\varepsilon_L + \varepsilon_H)^2 + 2(\varepsilon_L)^2 + 2(\varepsilon_H)^2 + 3 \left(\varepsilon_L \frac{L}{H} \right)^2 < \sigma_0^2 / 2\mu^2 ; \varepsilon_L^2 + \varepsilon_H^2 + \varepsilon_L \varepsilon_H + \frac{3}{4} \left(\varepsilon_L \frac{L}{H} \right)^2 < \sigma_0^2 / 8\mu^2$$

$$\text{si } L=H, \text{ la condition est : } \varepsilon_H^2 + \varepsilon_L \varepsilon_H + \frac{7}{4}(\varepsilon_L)^2 < \sigma_0^2 / 8\mu^2$$

Bonus : Calculez la densité de force sur la face supérieure et la force \vec{F} que subit le profilé en notant L_z sa longueur selon l'axe z .

$$\text{face supérieure, } y = H, \vec{n} = \vec{e}_y \text{ et } \vec{t} = \begin{pmatrix} -\varepsilon_H \lambda & -\mu \frac{x\varepsilon_L}{H} & 0 \\ -\mu \frac{x\varepsilon_L}{H} & -2\mu\varepsilon_H - \lambda\varepsilon_H & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_H \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu \frac{x\varepsilon_L}{H} \\ -(\lambda + 2\mu)\varepsilon_H \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } -L \leq x \leq L$$

$$\vec{F} = -L_z \int_{-L}^L \vec{t} ds = L_z \begin{pmatrix} -\mu \frac{\varepsilon_L}{H} \int_{-L}^L x dx \\ -(\lambda + 2\mu)\varepsilon_H \int_{-L}^L dx \\ 0 \end{pmatrix} = L_z \begin{pmatrix} 0 \\ -2L(\lambda + 2\mu)\varepsilon_H \\ 0 \end{pmatrix} = -2L_z L (\lambda + 2\mu) \varepsilon_H \vec{e}_y$$

Exo.3 : fluide en rotation

1) Quelle est la densité volumique de force centrifuge subit par un petit élément de masse m situé à une distance r de l'axe de rotation ?

Un petit élément de masse m et de volume Δv subit une force centrifuge valant $mV^2/r = mr\omega^2$ avec V la vitesse et r la distance au centre. Cette force divisée par le volume Δv correspond à la densité volumique de force centrifuge $\rho\omega^2\vec{u}_r$ en N/m^3 .

2) dans le repère tournant, le fluide a une vitesse nulle donc l'équation de Navier-Stokes se réduit à $\rho\vec{f} = \overrightarrow{\text{grad}p}$ avec $p = p(r,\theta,z)$, la pression et \vec{f} le densité des forces volumiques.

3) Ecrire les dérivées partielles de la pression par rapport à ses trois variables.

$$\rho\vec{f} = \rho\omega^2 r\vec{u}_r + \rho\vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}p} \text{ avec } p = p(r,\theta,z)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}p} = -\rho g\vec{u}_z + \rho\omega^2 r\vec{u}_r \text{ qui donne } \frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r, \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \text{ et } \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \text{ La pression } p \text{ ne dépend pas de } \theta.$$

3) Intégrer ces trois équations pour obtenir le champ de pression $p(r, z)$.

$$p = p(r,z) \text{ avec } \frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r \text{ et } \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g ; p = \frac{\rho\omega^2}{2} r^2 - \rho g z + A, p(r = 0, z = h_0) = p_a = -\rho g h_0 + A$$

$$A = p_a + \rho g h_0 \text{ et } p = p_a + \frac{\rho\omega^2}{2} r^2 + \rho g (h_0 - z)$$

4) La surface libre correspond à la courbe $p = p_a$. Ecrire l'équation de cette courbe et donner la forme géométrique de cette surface libre. Calculez h et $h-h_0$.

$$\text{la surface libre a pour équation } p_a = p_a - \frac{\rho\omega^2}{2} r^2 + \rho g (h_0 - z), \text{ soit } z = h_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2, \text{ il s'agit d'un paraboloïde}$$

$$\text{d'axe } z \text{ et d'apex } (0, h_0). \text{ en } r = R, z = h = h_0 + \frac{\omega^2}{2g} R^2 \text{ (si } \omega = 0, h = h_0) \text{ soit } h - h_0 = \frac{\omega^2}{2g} R^2.$$

5) En appliquant la conservation du volume de fluide, i.e. en supposant le fluide incompressible, montrer que $2h_i = h + h_0$. Exprimer ensuite h_0 et h en fonction de h_i et des paramètres du problème.

$$\text{Volume au repos: } V = \pi R^2 h_i = \text{Volume en rotation: } V = \int_0^R 2\pi r z(r) dr = 2\pi \int_0^R \left(r h_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^3 \right) dr$$

$$V = 2\pi \left[r^2 \frac{h_0}{2} + \frac{\omega^2}{8g} r^4 \right]_0^R = 2\pi R^2 \left(\frac{h_0}{2} + \frac{\omega^2}{8g} R^2 \right) = \pi h_0 R^2 + \pi \frac{\omega^2}{4g} R^4. \text{ Or } h = h_0 + \frac{\omega^2}{2g} R^2$$

$$\text{donc } V = \pi h_0 R^2 + \pi R^2 \frac{(h - h_0)}{2}; \pi R^2 h_i = \pi h_0 R^2 + \pi R^2 \frac{(h - h_0)}{2} \text{ donne } h_i = h_0 + \frac{(h - h_0)}{2}$$

$$\text{soit } 2h_i = h_0 + h : \text{ les 3 quantités étant positives, cela implique: } h_0 \leq h_i \text{ et } h \geq h_i.$$

$$\text{Or } h_0 + h = 2h_i \text{ et } h - h_0 = \frac{\omega^2}{2g} R^2. \text{ Par différence, on obtient } 2h_0 = 2h_i - \frac{\omega^2}{2g} R^2$$

$$\text{Ainsi, } h_0 = h_i - \frac{\omega^2}{4g} R^2 \text{ et que } h = h_i + \frac{\omega^2}{4g} R^2 \left(\text{On vérifie que } \frac{\omega^2}{4g} R^2 \text{ est bien en m} \right)$$

$$\text{NB: } h_i - \frac{\omega^2}{4g} R^2 \text{ requiert que } R^2 \omega^2 \text{ reste suffisamment petit sinon turbulences}$$

$$h_0 \geq 0 \text{ implique } \omega^2 \leq 4gh_i / R^2$$

Bonus : Montrer qu'en variant la vitesse de rotation, toutes les surfaces libres passent ont en commun un cercle dont on donnera le rayon et la position selon z .

la surface libre a pour équ. $z = h_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2$ qui s'écrit aussi $z = h_i - \frac{\omega^2}{4g} R^2 + \frac{\omega^2}{2g} r^2 = h_i - \frac{\omega^2}{2g} \left(\frac{R^2}{2} - r^2 \right)$

Quand ω varie, toutes les surfaces passent par les points $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} R, \theta, h_i \right)$, cercle de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2} R$ à $z = h_i$.