Propédeutique-1 (6 novembre 2024)

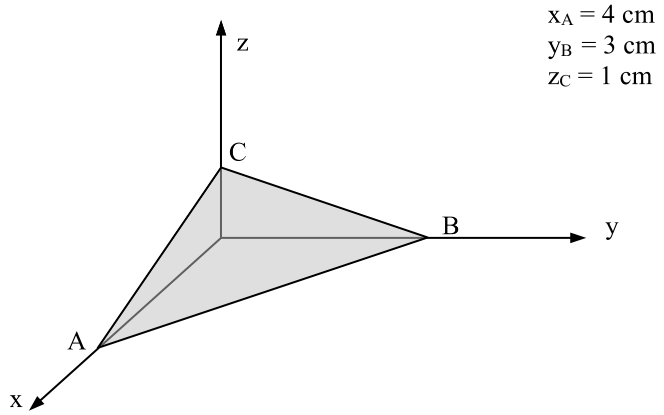
Aucune documentation autorisée, si ce n'est une page A4 recto manuscrite résumant le cours.
Calculatrice non-autorisée. **Bien mentionner les unités.**

Exercice 1 *(5 x 3 points)*

Dans un repère Oxyz, le tenseur des contraintes en un point M est donné par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 300 & 100 & 100 \\ 100 & 0 & 200 \\ 100 & 200 & 0 \end{pmatrix} = 100 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(MPa)}$$

1. Que valent la trace et le déterminant de σ ?
2. Quelle est la force F (vecteur puis norme en Newton) agissant sur la surface triangulaire ABC donnée dans la figure ci-dessous ?



3. Quelle est le vecteur densité de force agissant sur l'ellipsoïde de révolution de demi-axes OA, OB et OC au point D $(0,\ 3/2,\ \sqrt{3}/2)$? On rappelle l'équation d'un ellipsoïde de révolution de demi-axes a,b et c : $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$.
4. Déterminez les valeurs propres du tenseur σ. Donnez le sens d'une direction propre et de sa valeur propre associée.
5. Déterminez le vecteur propre du tenseur σ associé à la plus grande valeur propre.

Exercice 2 *(3 x 5 points)*

Dans un cylindre infini de rayon intérieur Ri et de rayon extérieur Re soumis à une pression interne p > 0, le tenseur des contraintes s'écrit en coordonnées cylindriques : $\sigma = \begin{pmatrix} A+B/r^2 & 0 & 0 \\ 0 & A-B/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Vérifiez que ces contraintes satisfont l'équilibre des forces en l'absence de gravité. On donne la divergence d'un tenseur σ(r,θ,z) = σ(ρ,θ,z) en coordonnées cylindriques :

$$\mathbf{div}\,(\underline{\sigma}) = \left[\frac{\partial\sigma_{\rho\rho}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\rho\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\theta\theta}}{\rho}\right]\mathbf{e}_r + \left[\frac{\partial\sigma_{\rho\theta}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\,\sigma_{\rho\theta}}{\rho}\right]\mathbf{e}_\theta + \left[\frac{\partial\sigma_{\rho z}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho z}}{\rho}\right]\mathbf{e}_z$$

2. La condition en r = Ri est $\vec{t} = \sigma\left(-\vec{e}_r\right) = p\vec{e}_r$. Quelle est la condition en r = Re sachant que la surface extérieure est libre et que l'on néglige la pression atmosphérique ? Déterminez alors A et B.
3. Classez les 3 valeurs propres par ordre décroissant et calculez le cisaillement maximum.

Exercice 3 ***(5 x 3 points)***

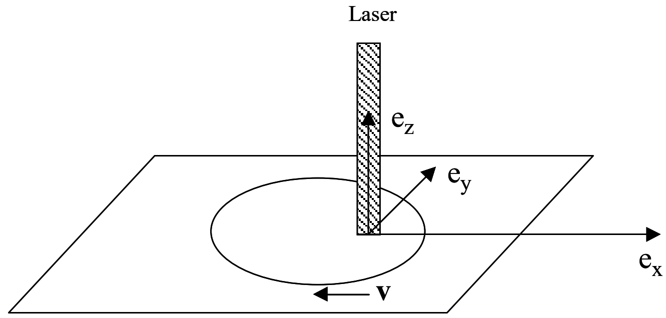
Lors d'une déformation, un point M(x,y,z) se déplace en M'($x + ky^2$,y,z) avec k > 0.

1. Quelle est l'unité de k ?
2. Calculer le tenseur gradient **L** de la déformation, le tenseur de Cauchy-Green **B** et le tenseur de Green-Lagrange **ε** de la déformation.
3. Sous quelle(s) condition(s) qualitative(s) la déformation peut-elle être considérée comme infinitésimale (petites déformations) ?
4. Calculer le tenseur linéarisé des déformations.
5. Dans quelle région de l'espace la déformation peut-elle être considérée comme infinitésimale en prenant 10% comme limite, ceci pour une valeur de k fixée ?

Bonus : Déterminez la déformée du segment AB avec A(1,0,0) et B(1,1,0) (faire un dessin et donner son équation). On calculera le déplacement d'un point M(1,y,0) du segment AB avec y variant de 0 à 1.

Exercice 4 ***(2/1/1/1/2/2/2/2/2 points)***

On considère un procédé de fusion par laser où une source d'énergie de puissance nominale P supposée ponctuelle, se déplace à vitesse V à la surface d'un matériau solide considéré comme semi-infini (voir figure ci-dessous). En régime permanent (stationnaire) et dans le repère de la source située en l'origine O, on montre que le champ de température est approximé par le modèle de la source ponctuelle de Rosenthal, donné par: $T(r) = T_a + \frac{\beta P}{2\pi\kappa r}\exp\left(-\frac{V(x+r)}{2\alpha}\right)$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ où T_a est la température ambiante, r est la distance radiale à la source de chaleur, P est la puissance nominale de la source et α, β et κ sont respectivement la diffusivité thermique moyenne, le coefficient d'absorption moyen de l'énergie (i.e. rendement) et la conductivité thermique moyenne.



1. Quelles sont les unités SI de α, de β et de κ ?
2. Quelle est la température maximale ?
3. Est-on en représentation eulérienne ou lagrangienne ?
4. Que vaut la dérivée temporelle de la température ?
5. Que vaut la dérivée particulaire de la température sur la droite y = z = 0 ? Calculer cette quantité pour x < 0. (**Bonus** pour x > 0).
6. En représentation lagrangienne, calculer la température d'un point matériel situé sur la droite y = 0, z = 0 et dont la trajectoire est donnée par x = x0 –Vt avec x0 > 0, en amont de la source (x > 0),
7. et en aval de la source (x < 0),
8. Calculer alors la dérivée temporelle de la température toujours en représentation lagrangienne en aval de la source (x < 0),
9. Comparer cette valeur avec le résultat de la question 7.