Corrigé N° 7 — Semaine du 27 octobre 2025

Dureté/Usure/Ténacité

1. Vrai ou faux ?

	Vrai	Faux
a. Un acier de dureté Vickers 200 Hv aura une limite d'élasticité d'environ 600MPa. *Vrai : on peut trouver cela avec la formule empirique donnée en cours.*	✓	
b. Le coefficient d'usure d'Archard est un paramètre intrinsèque au matériau. *Faux : la friction et l'usure sont définis par rapport à une référence : usure d'un matériau sur un autre. Ils dépendent aussi de l'état de surface et notamment de la lubrification. Le coefficient d'Archard n'est donc pas intrinsèque au matériau mais dépend de paramètres externes.*		✓
c. L'énergie de surface d'un solide cristallin dépend de l'énergie des liaisons entre les atomes et de leur position d'équilibre. *Vrai : voir le calcul théorique donné dans les notes de cours, à partir du potentiel de Lennard Jones.*	✓	
d. La ténacité d'un matériau dépend de la longueur des fissures qu'il contient. *Faux : la ténacité d'un matériau est une propriété du matériau, mais c'est le facteur d'intensité de contrainte qui dépend de la taille des fissures dans le matériau. Quand ce dernier est plus grand que la ténacité, alors les fissures se propagent vers la rupture du matériau.*		✓
e. Au-delà d'une certaine longueur critique, une fissure dans un métal ou une céramique va pouvoir se propager quelque soit la contrainte appliquée. *Faux : il faut que le facteur d'intensité de contrainte soit supérieur à la ténacité pour que la fissure puisse se propager. Une longueur critique n'a de sens que pour une contrainte associée : à contrainte faible (ou même nulle...), une fissure ne se propagera pas.*		✓

2. Comparaison de matériaux

On considère les trois matériaux suivants :

a. Du nylon ($K_{1C} = 4$ MPa m$^{1/2}$, $\sigma_Y = 45$ MPa, $E = 3$ GPa)

b. Du carbure de silicium SiC ($K_{1C} = 4$ MPa m$^{1/2}$, $\sigma_Y = 3.4$ GPa, $E = 400$ GPa)

c. Un acier ($K_{1C} = 70$ MPa m$^{1/2}$, $\sigma_Y = 200$ MPa, $E = 200$ GPa)

Classez ces trois matériaux selon leur ordre décroissant de :

a. Résistance (en se basant sur leur limite d'utilisation dans le domaine élastique)

b. Rigidité

c. Fragilité

Les classements sont les suivants :

a. Résistance : SiC, acier, nylon. La résistance dans le domaine élastique à été évaluée ici à partir de la valeur de σ_Y. En toute rigueur, la résistance mécanique correspond à la contrainte maximale que le matériau peut supporter avant de rompre, mais comme elle n'est pas donnée ici, on a estimé que la limite d'élasticité donnera une indication suffisante pour classer ces matériaux qui sont de toute façon très différents.

b. Rigidité : SiC, acier, nylon. La rigidité d'un matériau est caractérisée par son module d'élasticité E.

c. Fragilité : SiC, nylon, acier. Plus le matériau est fragile, plus la zone plastifiée devant une fissure est petite. Un matériau est d'autant plus fragile que sa ténacité K_{1C} est faible.

Quelle est la dimension de la zone plastifiée devant une fissure critique pour chacun de ces matériaux ? Le rayon de la zone plastifiée en avant d'une fissure critique s'étend sur une distance égale à :

$$r_y = \frac{K_{1C}^2}{\pi \sigma_Y^2}$$

Et on obtient donc :

a. Pour le nylon : 2.5 mm

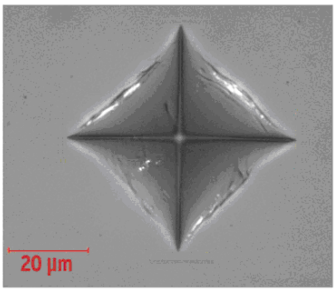
b. Pour le carbure de silicium SiC : 0.4 μm (remarque : le carbure de silicium est fragile, donc pour ce matériau, σ_Y est très proche de σ_{max}, donc il est aussi possible de dire qu'il n'y aura pas vraiment de zone plastique en tête de fissure.)

c. Pour l'acier : 3.9 cm

3. **Relation entre force appliquée et dureté Vickers**
La dureté Vickers correspond à la force appliquée sur l'indenteur (mesurée en kg force) divisée par la surface de contact entre l'indenteur et le matériau. L'indenteur Vickers est une pointe pyramidale à base carrée, dont l'angle au sommet entre deux faces opposées est de 136 degrés.

a. La dureté d'un matériau est-elle représentative du module d'élasticité ou de la limite d'élasticité ? La dureté est proportionnelle à la taille de l'empreinte de l'indenteur. Elle est représentative de la déformation plastique d'un matériau donc de sa limite d'élasticité.

b. En utilisant la relation donnée en cours, $H_V = 0.189\,\frac{F(N)}{d^2}$ calculez la dureté Vickers du matériau dont on voit l'empreinte ci-contre, testée avec une masse de 1 kg . Quelle sont alors sa dureté Brinell et son indice de Moh ?



La valeur de d s'obtient par mesure sur la micrographie et vaut environ 57 μm. Donc :

$$H_v = 0.189\,\frac{mg}{d^2} = 0.189\,\frac{1\text{ kg} \times 9.81\text{ m/s}^2}{(5.7 \cdot 10^{-2})^2\text{ mm}^2} = 570 \tag{1}$$

Une dureté Vickers de 570 correspond environ à une dureté Brinell de 530 et à un indice Mohs de 5.

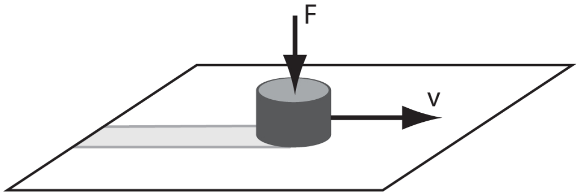
c. On peut aussi tirer de la courbe force/profondeur d'indentation une estimation du module d'elasticité. Vaut-il mieux estimer ce module au début de l'indentation ou lors du retour en fin d'indentation ?
Il vaut mieux mesurer le module en retour d'indentation, car la surface de la forme indentée ne change plus lorsque l'on retire l'indenteur, et on mesure alors simplement le retour élastique du matériau.

4. **Usure**
On considère un galet en acier, qui va frotter, lubrifié, contre un rail. On donne le coefficient d'Archard pour ce couple de matériaux (acier/rail) : $k_a = 1 \times 10^{-7}\,\text{MPa}^{-1}$). La surface de contact est $S = 5\,\text{cm}^2$ et la force normale est de $F = 150\,\text{N}$.

a. Déterminez le taux d'usure spécifique.
Le taux d'usure spécifique est donné par :

$$\mathit{\Omega} = \frac{W}{S} = \frac{F k_a}{S} = \frac{150\,\text{N} \cdot 1 \times 10^{-7}\,\text{mm}^2\,\text{N}^{-1}}{500\,\text{mm}^2} = 3 \times 10^{-8}$$

b. Sachant que la vitesse de déplacement est de $v = 2\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$, quelle sera la fréquence de changement du galet si l'on admet que l'on peut perdre 1 mm d'épaisseur de matériel avant de le changer.



On sait que le taux d'usure W est donné par le volume enlevé V divisé par la distance parcourue l. Le volume enlevé se calcule en multipliant la surface du galet par l'épaisseur de matière perdue admissible, soit $V = S \cdot e$. La distance, elle est donnée par la vitesse v multipliée par le temps de parcours entre chaque changement de galet t. On a ainsi :

$$
\begin{aligned}
W = \frac{V}{l} = \frac{S \cdot e}{v \cdot t} &= \Omega \cdot S \\
\frac{S \cdot e}{v \cdot t} &= F \cdot k_a \\
t &= \frac{S \cdot e}{v \cdot F \cdot k_a} \\
&= \frac{500\,\mathrm{mm}^2 \cdot 1\,\mathrm{mm}}{2 \times 10^6\,\mathrm{mm\,h^{-1}} \cdot 150\,\mathrm{N} \cdot 1 \times 10^{-7}\,\mathrm{N\,mm^{-2}}} = 16.7\,\mathrm{h}
\end{aligned}
$$

5. **Bras de robot**

Un bras de robot de section 1 cm^2, dont on négligera la masse propre, doit pouvoir soulever verticalement une masse de 250 kg avec des accélérations de 10 g (10 fois l'accélération due à la gravité). On découvre qu'il a une petite fissure transversale de 3 mm de long. Le matériau (un alliage d'aluminium) a une ténacité de 30 $\mathrm{MPa\,m^{1/2}}$, une limite élastique σ_y =400 MPa et un module d'élasticité E=70 GPa.

a. Est-ce que l'on peut utiliser le robot sans souci ou faudrait-il remplacer le bras ? Il faut premièrement déterminer la contrainte, et donc la force T dans le bras. Pour cela, on fait un équilibre des forces :

$$T - mg = ma = m \cdot 10g \quad \Rightarrow \quad T = 11\,mg = 27.5 \text{ kN}$$

La contrainte s'obtient ensuite en divisant cette force par la section du bras :

$$\sigma = \frac{T}{S} = \frac{27500 \text{ N}}{100 \text{ mm}^2} = 275 \text{ MPa}$$

Pour une fissure de 3 mm, la contrainte critique vaut :

$$\sigma_c = \frac{K_{1C}}{\sqrt{\pi l}} = \frac{30\mathrm{MPa} \cdot \mathrm{m}^{1/2}}{\sqrt{\pi \times 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}}} = 309 \text{ MPa}$$

La contrainte dans le bras étant inférieure à la contrainte critique, il n'est pas (encore) nécessaire de remplacer le bras. Notez que vous pouvez alternativement calculer la longueur critique, et constater qu'elle est supérieure à la longueur de la fissure observée. Les deux méthodes sont équivalentes.

b. Quelle est la taille de la zone déformée plastiquement en avant de la fissure ? Le rayon de la zone déformée plastiquement est donné par :

$$r_y = \frac{K_1^2}{\pi\sigma_y^2} = \frac{(\sigma\sqrt{\pi l})^2}{\pi\sigma_y^2} = \frac{\sigma^2 l}{\sigma_y^2} = \frac{(275\,\mathrm{MPa})^2 \times 3\,\mathrm{mm}}{(400\,\mathrm{MPa})^2} = 1.4\,\mathrm{mm}$$

c. On décide d'utiliser un autre matériau pour le bras, une céramique qui a l'air à priori plus rigide, l'alumine ($\sigma_{rupture}$ =600 MPa, E=300 GPa, K_{1c}=4 MPa m$^{1/2}$). Est-ce que l'on peut utiliser ce bras si on y détecte aussi une fissure de 3mm ? Quelle serait la longueur critique de fissure pour ce matériau ? La contrainte critique vaut dans ce cas :

$$\sigma_{c,Al_2O_3} = \frac{K_{1C,Al_2O_3}}{\sqrt{\pi l}} = \frac{4\mathrm{MPa}\cdot\mathrm{m}^{1/2}}{\sqrt{\pi \times 3\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}}} = 41.2\ \mathrm{MPa}$$

Cette valeur est beaucoup plus basse que celle obtenue avec l'aluminium, ce qui est attendu car même si le matériau a une rigidité et une limite à rupture plus grande, sa ténacité est bien plus faible, donc il est beaucoup plus sensible à la présence de petites fissures. Le bras devrait donc être remplacé.

La longueur critique de fissure pour ce matériau, c'est-à-dire la longueur en dessous de laquelle une fissure ne va pas se propager de manière spontanée, vaut :

$$l_c = \frac{K_{1C,Al_2O_3}^2}{\pi\sigma^2} = \frac{4^2}{\pi 275^2} = 6.7\times 10^{-5}\,\mathrm{m} = 67\,\mu\mathrm{m}$$

6. **Aventures potagères**

Lors d'un week-end passé chez votre oncle Gilbert qui est agriculteur dans le canton de Vaud, celui-ci profite de vos compétences en sciences des matériaux pour vous demander de l'aider. En effet, il doit encore une fois changer les dents métalliques de sa herse rotative (voir photo ci-jointe, c'est une machine agricole qui permet de préparer la terre pour les semis, et voir transparents du cours), et c'est une opération pénible, qui prend 8 heures à deux personnes et immobilise la herse pendant ce temps. Vous proposez de faire quelques calculs simples pour l'aider à évaluer la viabilité de solutions alternatives, notamment l'achat de dents plus chères mais qui dureront peut être plus longtemps.

La herse comporte 24 dents, qui font initialement 30 cm de long,1.5 cm d'épais et 3 cm de large (on les assimile ici à des pièces rectangulaires simples) et qui tournent à la vitesse de 540 tours/minute, chacune par groupe de 2 sur un cercle de diamètre 50 cm. Les dents sont en acier au bore, ce qui est courant en machinerie agricole, et sont considérées comme des pièces d'usure qu'il faut changer quand la longueur des dents est réduite à 15cm. La force normale agissant sur une dent pendant la rotation dans la terre est estimée à environ 300 N, quand le tracteur progresse à 3.5 km/h. Comme les dents sont enfoncées dans la terre sur 5cm environ (cela peut s'ajuster au fur et à mesure que la pièce s'use en ajustant la hauteur de la herse), on prend l'hypothèse simplificatrice que la force s'exerce sur la tranche de 1.5 cm de coté et 5cm de long.

a. Sachant que le coefficient d'Archard de l'acier faiblement allié au bore en contact avec la terre est $k_a = 1 \times 10^{-14}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{N}$, estimez la durée en heures d'utilisation de la herse avant que les dents ne doivent être remplacées. Pour cela, calculez d'abord la longueur parcourue par une dent, par heure d'utilisation, en prenant l'hypothèse simplificatrice qu'on néglige la distance due au déplacement du tracteur par rapport à celle résultant de la rotation de la dent.
   Longueur parcourue par une dent, par heure d'utilisation :
   $L = \omega \times 2\Pi \mathrm{R} \times 60 = 540 \times 2\Pi\ 0.25 \times 60 = 50.8\,\mathrm{km}$.
   Selon la loi d'Achard : $k_a \mathrm{F}_n = W = V/nL$ où V est le volume enlevé, soit $V = 15cm \times 1.5cm \times 3cm$, et n est le nombre d'heures d'utilisation pour arriver à ce volume d'usure. On trouve donc $n = V/(L \times \mathrm{k}_a \times F_n) = 442$ heures.

b. Vous trouvez sur internet que l'on peut acheter des dents qui ont un revêtement en carbure de tungstène, ce qui paraît prometteur. On trouve que le coefficient d'usure d'un carbure de tungstène est environ 5 fois plus faible que celui de l'acier faiblement allié, évaluez alors la nouvelle durée de vie en heures d'une dent, en prenant l'hypothèse simplificatrice que toute la dent est en carbure de tungstène.
   Pour le carbure de tungstène, on trouve k_a=$2 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{N}$. La nou-

velle durée de vie en heures d'une dent est alors

$$n' = V/(L \times \ k_{acarb} \times \ F_n) = 442 \times \ 5 = 2210 heures$$

c. Sachant qu'une dent en acier coûte 6 CHF et une en acier revêtu coûte 35 CHF, et qu'une heure de travail coûte environ 30 CHF par personne, estimez si cela vaut la peine d'investir dans des dents revêtues plutôt que de se résigner à les changer plus souvent.
Sachant qu'une dent en acier coûte 6 CHF et une en acier revêtu coûte 35 CHF, et qu'une heure de travail coûte environ 30 CHF, le coût doit être comparé sur une durée de 2210 heures de fonctionnement. Dans ce cas, si on reste comme avant, sur 2210 heures, on doit installer une fois et changer 4 fois les dents, donc le coût est : $C_1 = 5\times\ 24\times\ 6+5\times\ 2\times\ 8\times\ 30=$ 3120 CHF. Si on prend les dents revêtues, on ne les change pas donc le coût est : $C_2 = 35\times\ 24+1\times\ 2\times\ 8\times\ 30=1320$ CHF.

Il a donc intérêt à prendre les dents revêtues, qui sont plus intéressantes sur le long terme...à moins d'économiser sur les coûts de main d'oeuvre en vous faisant venir aider gracieusement à chaque fois ! Ceci dit, comme les dents sont simplement revêtues de carbure de tungstène, il faudrait pour faire une analyse plus rigoureuse tenir compte de l'"épaisseur du revêtement, et quand celui-ci est totalement usé, reprendre le coefficient d'usure de l'acier...on voit alors que cela peut rester intéressant, mais dans une moindre mesure.