Série N° 6 — Semaine du 13 Octobre 2025

Elasticité/plasticité

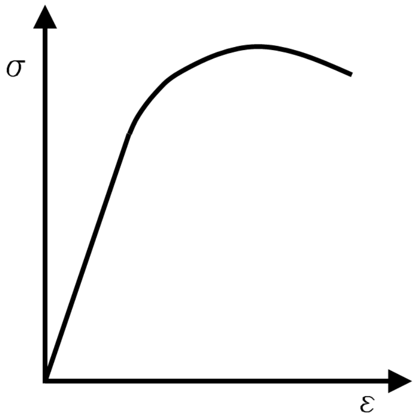
1. Vrai ou faux ?

	Vrai	Faux
a. L'énergie élastique emmagasinée par la déformation en traction de n'importe quelle structure à une valeur $\varepsilon_0 = 0.01$ est toujours plus grande si le module d'Young du matériau est plus grand.	☐	☐
b. Un alliage de Plomb a à peu près la même rigidité spécifique en traction que le Polypropylène.	☐	☐
c. La densité d'énergie élastique emmagasinée lors d'une déformation a pour unité J par mètre cube et correspond à l'aire sous la courbe contrainte-déformation.	☐	☐
d. Plus un matériau est ductile, plus sa déformation atteinte juste avant la rupture est grande.	☐	☐
e. Si un matériau donné a un fort coefficient d'écrouissage, cela veut dire que sa limite d'élasticité après déformation plastique est bien plus grande qu'à l'état original.	☐	☐
f. La limite d'élasticité d'un matériau métallique est reliée au mouvement des défauts dans le métal, alors que le module d'Young dépend seulement de l'énergie de liaison entre les atomes.	☐	☐
g. Après écrouissage (mais avant rupture) un métal a une limite d'élasticité inchangée, mais un module d'Young qui a augmenté.	☐	☐
h. Pour une dislocation coin, le vecteur de Burgers est parallèle à la ligne définie par la tangente à la dislocation.	☐	☐
i. La plasticité des polymères au dessus de 0.75 fois leur température de transition vitreuse est liée au mouvement des macromolécules et à l'apparition de craquelures.	☐	☐
j. Une fois la limite d'élasticité dépassée, si on relâche une pièce sous contrainte, l'énergie élastique emmagasinée n'est pas restituée.	☐	☐

2. Courbe de traction

a. Dessinez les courbes de traction d'un matériau i) idéalement fragile, ii) idéalement élastique-plastique, et iii) élastique avec un coefficient d'écrouissage constant.

b. On considère la courbe de traction ci-dessous d'un matériau métallique. Indiquez graphiquement le module d'élasticité, la limite d'élasticité, la résistance à la rupture, le coefficient d'écrouissage, la déformation élastique juste avant la rupture, la déformation plastique à la rupture (ductilité), la densité d'énergie plastique juste avant la rupture, ainsi que la densité d'énergie élastique qui pourrait être récupérée à ce même moment (retour élastique).



c. On idéalise alors cette courbe de traction par un comportement simplifié élastique-plastique avec un coefficient d'écrouissage constant. Les paramètres du matériau sont : $E = 100\,\text{GPa}$, $\sigma_Y = 200\,\text{MPa}$, $n = 50\,\text{GPa}$.
Un barreau de ce matériau, de longueur $L = 400\,\text{mm}$ et de section carrée $S = 1\ \text{cm}^2$, est soumis à une traction puis est déchargé. Après cet essai, le barreau mesure $401.2\,\text{mm}$. Représentez schématiquement la courbe contrainte-déformation d'un tel essai. Quelle est la nouvelle limite d'élasticité du matériau ? Quelle était la déformation totale au moment de la charge et quelle était la valeur de la charge ? Quel est le changement de volume du matériau en charge et après décharge (on donne $\nu = 0.3$) ? Calculez l'énergie totale de déformation sous charge ainsi que l'énergie restituée lors du retour élastique.

3. **Choix de matériau pour une tige de selle de vélo**
Vous devez sélectionner un matériau adéquat pour remplacer la tige de selle de votre vélo qui est endommagée. Pour simplifier, on considérera que cette tige est un cylindre creux de diamètre extérieur 2.5 cm, d'épaisseur de paroi 1 mm, sollicité en compression simple, qui est donc comme la traction mais dans le sens contraire. La charge maximale considérée est de $200kg$. La longueur utile de la tige (celle qui sera soumise à la compression) est de $L_0 = 10\,\text{cm}$.

   a. Calculez la contrainte en compression dans le tube pour la charge de 200kg.

   b. On dispose d'un tube cylindrique en acier de masse volumique $\rho = 7.8\,\text{g/cm}^3$. Son module d'élasticité vaut $E = 200\,\text{GPa}$ et sa limite d'élasticité $\sigma_Y = 500\,\text{MPa}$. Et son coefficient de Poisson est $\nu = 0.3$. Est-ce que l'on peut utiliser ce matériau, c'est à dire est ce qu'il est bien soumis à une contrainte inférieure à sa limite d'élasticité ? Calculez la déformation, et l'allongement (négatif) en compression du tube lorsque la contrainte est appliquée. Calculez l'énergie stockée par unité de volume correspondante.

   c. Quelle est la masse du tube en acier, sachant que la longueur totale de la tige est $L_{tot} = 20\,\text{cm}$?

   d. Vous disposez de la carte d'Ashby donnée au cours pour trouver un autre matériau pour la tige qui vous permette d'économiser du poids sur votre vélo. Montrez que le critère qui s'applique est celui donné au cours, soit trouver un matériau avec un E/ρ équivalent ou plus grand que celui de l'acier. Pour cela, on considère une barre de longueur L soumise à une force de compression (ou de traction) imposée, F, mais dont nous devons dimensionner la section S en ayant le choix des matériaux de telle sorte à minimiser la déformation en même temps que la masse. Utilisez ensuite la carte d'Ashby $E - \rho$ pour trouver un matériau équivalent à l'acier ou meilleur. Proposez trois alternatives.

   e. On décide de prendre de l'aluminium, de densité $\rho_{Al} = 2.7\,\text{g/cm}^3$, de module d'élasticité $E_{Al} = 70\,\text{GPa}$ et de limite élastique $\sigma_{YAl} = 250\,\text{MPa}$. Est-ce que l'on peut utiliser ce matériau en gardant la même géométrie ? Calculez alors la masse du nouveau tube et le gain de masse ainsi réalisé.

   f. Pour les mordu-e-s de vélo : à quelle autre sollicitation la tige de selle est-elle aussi soumise ? Qu'est ce que cela va changer pour le choix du matériau ?

4. **Durcissement dans l'aluminium**
L'aluminium est largement utilisé dans la construction de lignes électriques, parce qu'il allie une bonne conductivité électrique et une masse volumique faible. Pour obtenir les meilleures propriétés électriques, la structure de l'aluminium doit être aussi parfaite que possible (ni dislocations, ni impuretés). Cependant, ce sont justement ces défauts structurels qui donnent de bonnes propriétés mécaniques à un métal. Dans cet exercice, nous allons nous pencher plus précisément sur quelques mécanismes de durcissement et, pour certains, sur leur effet sur la conductivité électrique. On vous donne le module d'Young du matériau, $E = 70\,\text{GPa}$, et le coefficient de Poisson $\nu = 0.34$.

   a. Écrouissage
   Après déformation à froid, un fil d'aluminium pur contient environ 9×10^{18} lignes de dislocation par mètre cube. Elles ont une longueur moyenne de $100\,\mu\text{m}$. Calculez la limite élastique du métal écroui, sachant que celle de l'aluminium non déformé est de $50\,\text{MPa}$ et que le durcissement est donné par

$$\Delta\sigma_Y^{ec} = K_e G b \sqrt{\rho_d}$$

   où $K_e = 0.25$ est un coefficient de proportionnalité, G est le module de cisaillement, $b = 2.86\,\text{Å}$ le vecteur de Burgers et ρ_d la densité de dislocations, c'est-à-dire la longueur totale de dislocations par unité de volume. Pour cela, il vous faudra donc calculer la densité de dislocations, et aussi la valeur du module de cisaillement (sachant que l'aluminium est un matériau isotrope).

   b. Solution solide
   Considérons maintenant un alliage Al-1.2%Mn-0.2%Si (en pourcents massiques). Calculez le durcissement lorsque tous les atomes de manganèse et de silicium sont en solution :

$$\Delta\sigma_Y^{ss} = 0.003 G \sqrt{c}$$

   où c est la composition de l'alliage (prise ici comme la teneur totale massique d'atomes en soluté, donc la somme des pourcentages massiques de Mn et Si, même si ce n'est pas tout à fait rigoureux...). Calculez également la résistivité de l'alliage, à l'aide de la formule suivante :

$$\rho_{el} = (2.67 + 330 c_{Mn} + 68 c_{Si}) 10^{-8}\,\Omega.m$$

   où c_{Mn} et c_{Si} sont les teneurs massiques en Mn et Si de l'alliage. Comparez l'augmentation des pertes électriques avec le gain de résistance mécanique : le jeu en vaut-il la chandelle ?

   c. Précipitation

Grâce à un traitement thermique, on peut précipiter tous les éléments dissous sous forme de fines particules. Dans le même alliage que ci-dessus, on obtient des particules avec un diamètre moyen de 20 nm, dont la fraction volumique totale est de 0.4 %. Calculez dans un premier temps la distance moyenne λ entre deux particules, qui est liée à la densité de particules ρ_{pr} par la relation suivante : $\lambda = \rho_{pr}^{-1/3}$, puis utilisez ce résultat pour calculer le durcissement dû à ces précipités :

$$\Delta\sigma_Y^{pr} = Gb/\lambda$$

Comme plus aucun élément étranger n'est dissout dans la matrice, l'effet sur la conductivité électrique est négligeable. Comparez le gain réalisé dans la résistance mécanique avec celui de la question précédente.

5. Solution des exercices

a. Exercice 2 (c) *Réponse : 500 MPa, déformation totale en charge : 0.8 % et charge : 500 MPa, déformation volumique : 0.2%, puis 0, energie totale lors de la déformation : 92 J et énergie totale restitué lors de la décharge 50J .*

b. Exercice 3 (a)*Réponse :* $\sigma_{zz} = -26.5\,MPa$, (b) *énergie stockée :* $w = 1.75 kJ/m^3$

c. Exercice 4 (a) $\rho_d = 9 \times 10^{14}\,\mathrm{m}^{-2}$, $\Delta\sigma_Y^{ec} = 55.7\,\mathrm{MPa}$. (b) $\Delta\sigma_Y^{ss} = 9.2\,\mathrm{MPa}$, $\rho_{el} = 6.77 \times 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$; (c) $\Delta\sigma_Y^{pr} = 73\,\mathrm{MPa}$