# Ingénierie optique

## Semaine 7 – partie 1

Olivier J.F. Martin
Laboratoire de Nanophotonique et Métrologie

EPFL

## Optique de Maxwell

- Que peuvent les équations de Maxwell pour l’optique?
  - Equation d’onde
  - Conditions limites aux interfaces
  - Polarisation de la lumière

## Optique de Maxwell

- Le champ électromagnétique:

| Symbole | Champ | Unité SI |
|---|---|---|
| $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ | champ électrique | $\mathrm{V/m}$ |
| $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ | champ magnétique | $\mathrm{A/m}$ |
| $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ | champ de déplacement électrique | $\mathrm{As/m^2}$ |
| $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ | champ d'induction magnétique | $\mathrm{Vs/m^2}$ |

- Système d'unités MKSA ou SI
- Champs vectoriels, dépendant du système de coordonnées:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\begin{pmatrix} E_x(x,y,z,t) \\ E_y(x,y,z,t) \\ E_z(x,y,z,t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\begin{pmatrix} E_r(r,\theta,\phi,t) \\ E_\theta(r,\theta,\phi,t) \\ E_\phi(r,\theta,\phi,t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\begin{pmatrix} E_\rho(\rho,\phi,z,t) \\ E_\phi(\rho,\phi,z,t) \\ E_z(\rho,\phi,z,t) \end{pmatrix}$$

- Utiliser aussi les formes correspondantes pour $\nabla,\ \nabla\times,\ \nabla\cdot$ et $\nabla^2$

## Equations de Maxwell

- En toute généralité:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} ,$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{r},t) ,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t) ,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0 .$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \epsilon_0 \epsilon_r(\mathbf{r},t)\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$$

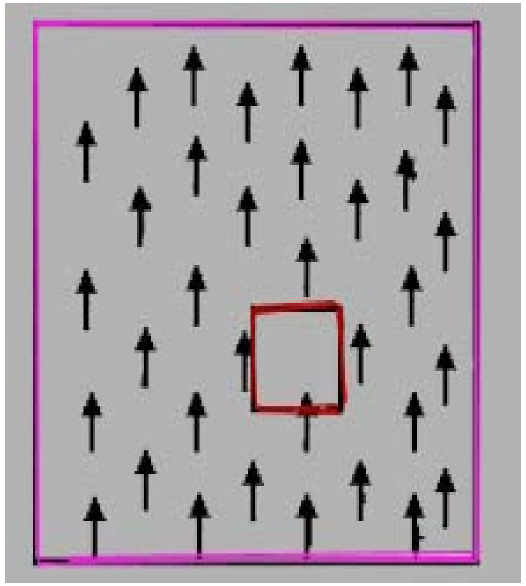
$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu_0 \mu_r(\mathbf{r},t)\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$$

- Deux termes source:
  - ~~densité de courant~~ $\cancel{J \ (\mathrm{unités}\ \mathrm{A/m^2})}$
  - ~~densité de charges~~ $\cancel{\rho \ (\mathrm{unités}\ \mathrm{As/m^3})}$

Pas nécessaire en optique

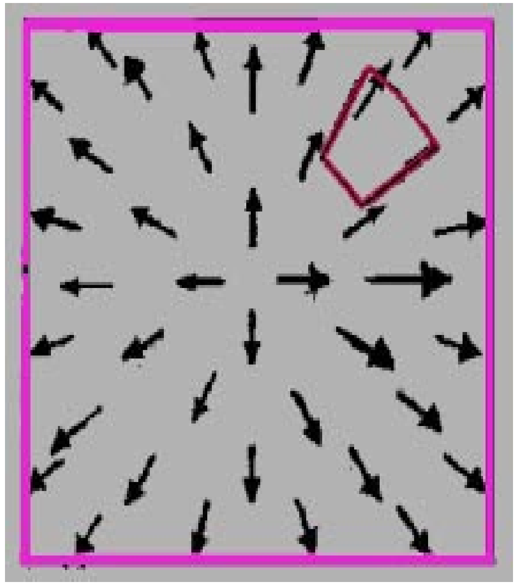
# $\nabla\cdot$, $\nabla\times$, etc....

- Les opérateurs vectoriels ont un sens physique concret:



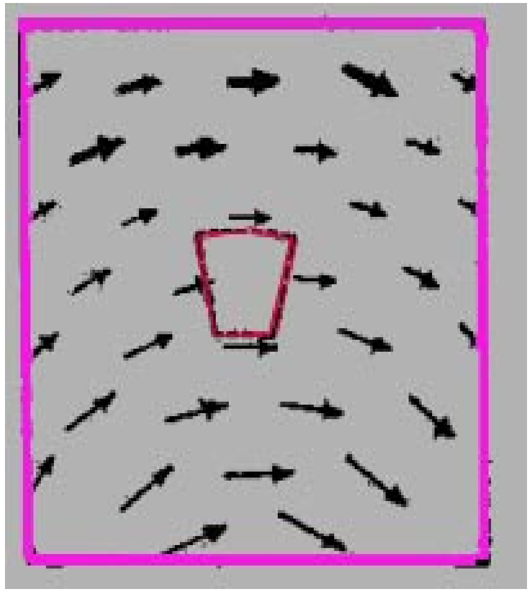
$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=?\ \ =0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=?\ \ =0$$



$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=?\ \ \neq 0$$

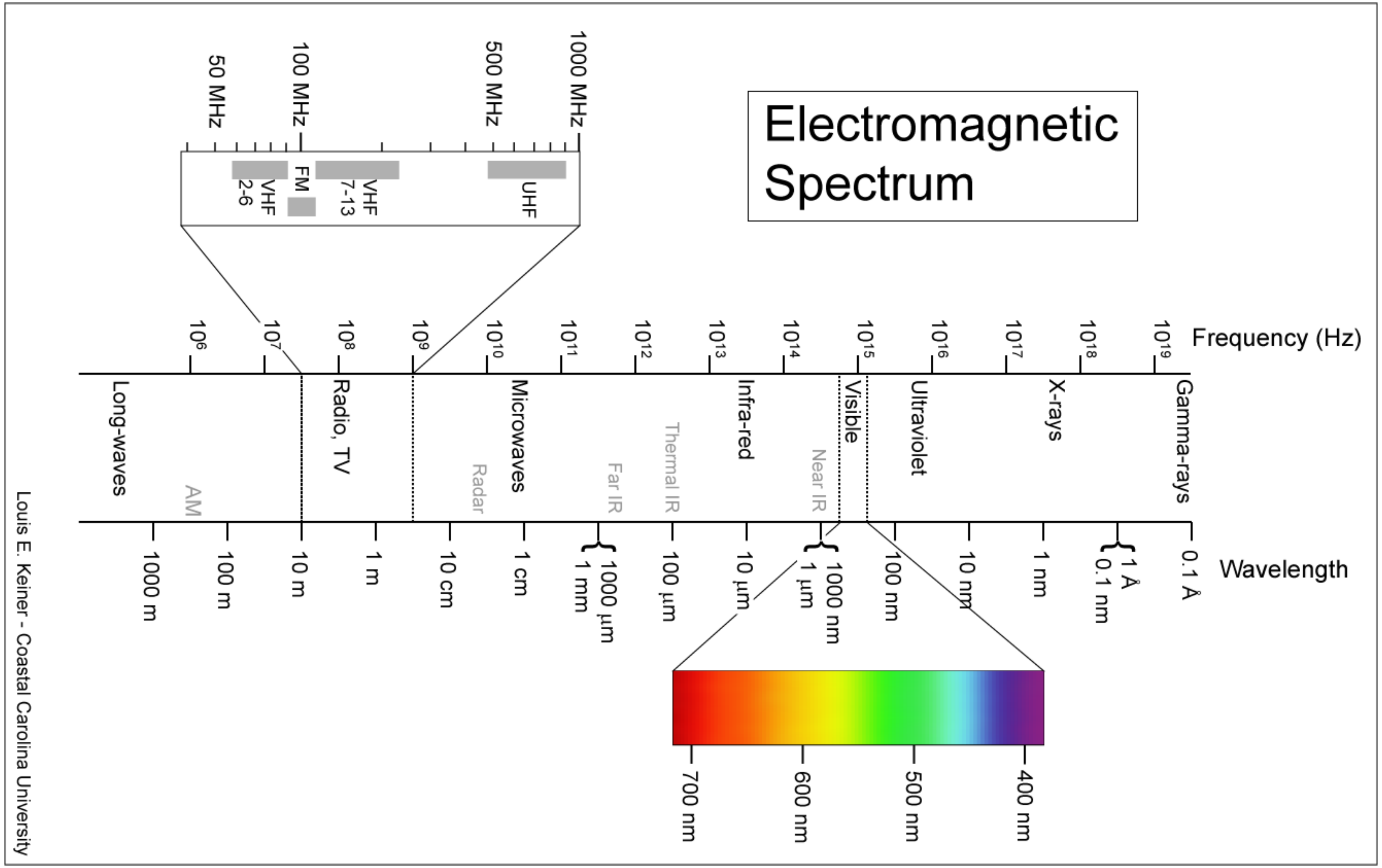
$$\nabla\times\boldsymbol{F}=?\ \ =0$$



$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=?\ \ =0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=?\ \ \neq 0$$

# Les équations de Maxwell sont valables sur l'entier du spectre électromagnétique




www.wikipedia.org

## Equations de Maxwell dans le vide

- Sans source:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \,,$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \,, \qquad \mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \,,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0 \,, \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r},t) \,.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = 0 \,;$$

- La permittivité et la perméabilité sont reliées à la vitesse de la lumière (dans le système d'unités MKSA):

$$\boxed{\epsilon_0 \mu_0 = 1/c_0^2}$$

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c_0^2} \simeq 8.8541878 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m} \,,$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m} \,.$$

**Equation d'onde dans le vide**

- Se déduit directement des équations de Maxwell
- Equation vectorielle !

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0}$$

- Une équation par composante du champ:

$$\nabla^2 E_y - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

## Equation d'onde dans un milieu different du vide

- Si $(\epsilon_r \neq 1 \text{ et/ou } \mu_r \neq 1)$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon_r \mu_r}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

- Vitesse dans le milieu:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

- Indice de réfraction: $n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{\mu}{\mu_0}}$

- En général pour l'optique: $(\mu_r = 1, \text{ soit } \mu = \mu_0)$

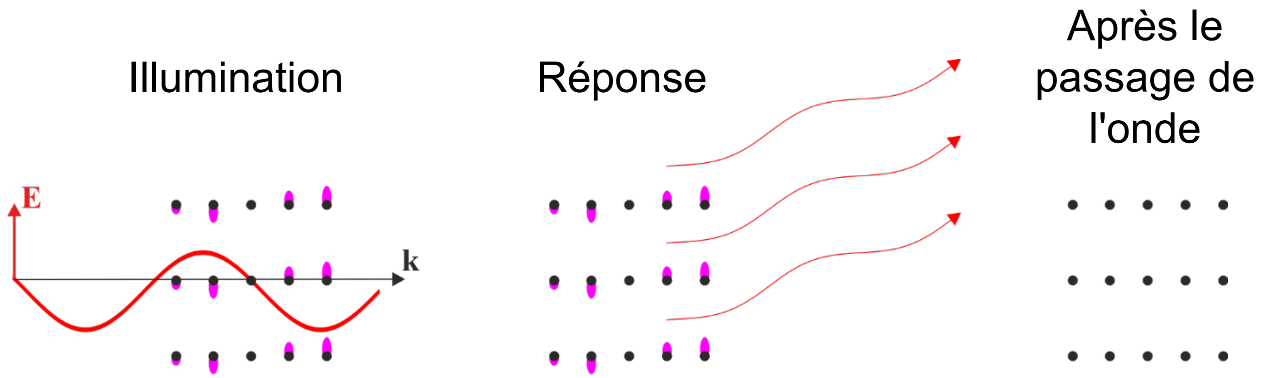
$$\boxed{n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{\epsilon_r}}$$

### Propriétés optiques d'un milieu

- C’est le terme $\mathbf{D}$ qui contient la réponse du milieu et caractérise ses propriétés:

$$\boxed{\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \epsilon_0\epsilon_r(\mathbf{r},t)\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \epsilon_0(1+\chi(\mathbf{r},t))\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}$$

- La polarisation $\mathbf{P}$ représente la réponse du milieu au champ (lumière) incident
- Il existe un modèle très usité pour cette polarisation: le modèle de Lorentz qui représente la matière comme une collection d’oscillateurs harmoniques
- Lorsque de la lumière est incidente sur la matière, le nuage d'électrons autour de chaque atome se déplace légèrement sous l'action du champ électrique associé à l'onde lumineuse, ce mouvement crée la réponse de la matière

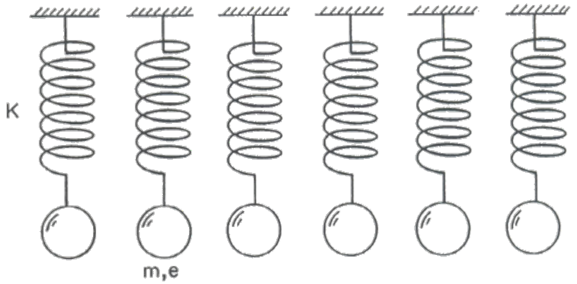


## Propriétés optiques d'un milieu

- C’est le terme $\mathbf{D}$ qui contient la réponse du milieu et caractérise ses propriétés:

$$\boxed{\mathbf{D}(\mathbf{r},t)=\epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\mathbf{P}(\mathbf{r},t)=\epsilon_0\epsilon_r(\mathbf{r},t)\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\epsilon_0(1+\chi(\mathbf{r},t))\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}$$

- Bien que la réponse de chaque atome soit très petite, comme on a un nombre extrêmement élevé d'atomes dans la matière ($N_{\text{avogadro}}$ = 6.022 $10^{23}$ $\text{mol}^{-1}$), leurs contributions s'additionnent pour produire la réponse totale (polarisation $\mathbf{P}$), dont on peut déduire la permittivité $\varepsilon_r$ (grandeur complexe: $\varepsilon_r = \varepsilon'_r + j\,\varepsilon''_r$ )

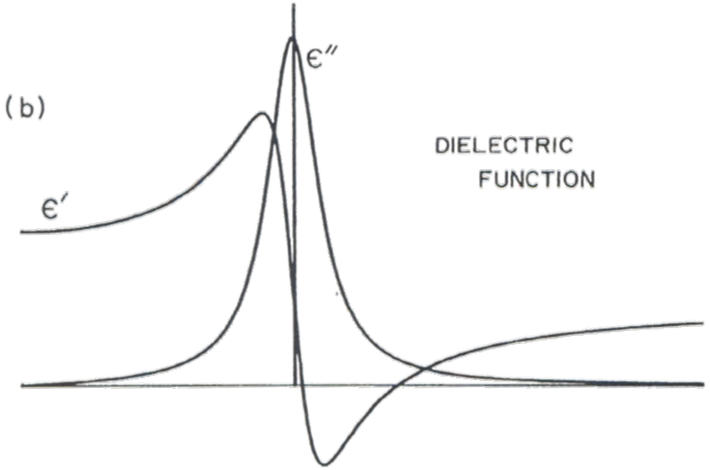



$$m\ddot{\mathbf{x}}+b\dot{\mathbf{x}}+K\mathbf{x}=e\mathbf{E}$$

$$\mathbf{P}=\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2-j\gamma\omega}\varepsilon_0\mathbf{E}$$

Réponse Lorentzienne:

$$\varepsilon_r=1+\chi=1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2-j\gamma\omega}$$



**Onde plane monochromatique**

- Forme particulière des équations de Maxwell (sans source) pour une onde plane harmonique monochromatique:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+j\omega t}$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+j\omega t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\,,$$
$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\,,$$
$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0\,,$$
$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = 0\,;$$

$$\boxed{\begin{aligned} -j\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -j\omega \mathbf{B}(\mathbf{r})\,,\\ -j\mathbf{k} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= j\omega \mathbf{D}(\mathbf{r})\,,\\ -j\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= 0\,,\\ -j\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0\,. \end{aligned}}$$

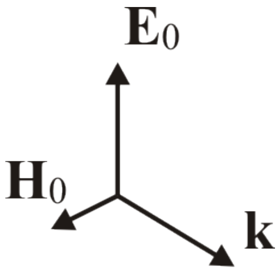
## Onde plane monochromatique

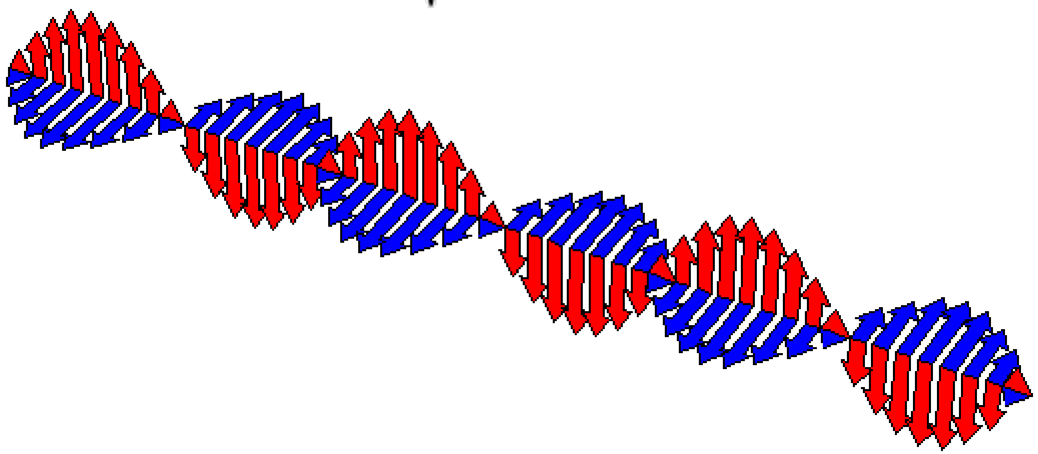
- On a de plus pour les amplitudes:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega\mu\mathbf{H}_0 ,$$
$$\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 = -\omega\epsilon\mathbf{E}_0 .$$

- $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ et $\mathbf{k}$ forment un triplet droitier
- Impédance (rapport des champs $\mathrm{E/H}$): $\eta = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\epsilon_0\epsilon_r}}$
- Le vide oppose une certaine résistance à la propagation des ondes électromagnétiques

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \simeq 376.6\,\Omega$$



## Vecteur de Poynting

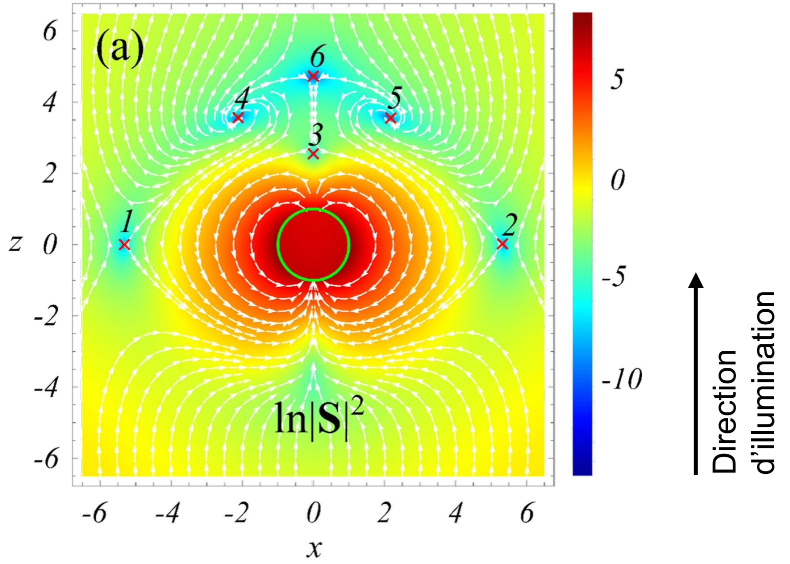
- Le vecteur de Poynting donne le flux d'énergie par unité de temps et de surface:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

- Pour des champs harmoniques ( $e^{j\omega t}$ ), on calcule en général la moyenne temporelle (sur une période) du vecteur de Poynting:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$$

- Le flux d'énergie peut être très compliqué (diffusion de la lumière sur une sphère métallique dans le vide):




Nanomaterials vol. 12, p. 1878 (2022)

# Ingénierie optique

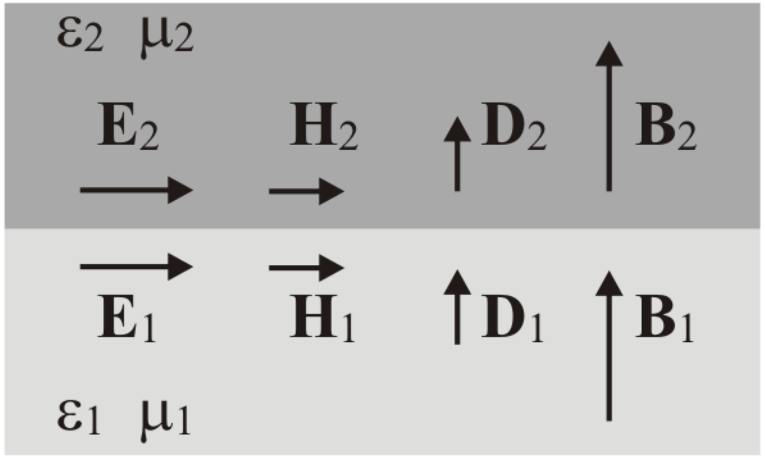
## Semaine 7 – partie 2

Olivier J.F. Martin
Laboratoire de Nanophotonique et Métrologie

EPFL

## Conditions d'interface

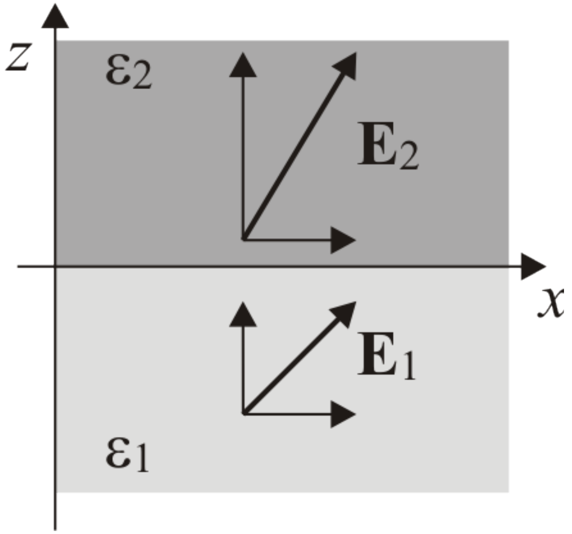
- Ces conditions sont le moteur de la plupart des phénomènes observés en optique et permettent de déduire les coefficients de Fresnel




| Champ | Composante continue |
|---|---|
| E | parallèle |
| H | parallèle |
| D | perpendiculaire |
| B | perpendiculaire |

## Conditions d'interface

- Construction du champ dans le deuxième milieu en le connaissant dans le premier milieu (on étudie dans le plan $x$, $z$, de la polarisation):



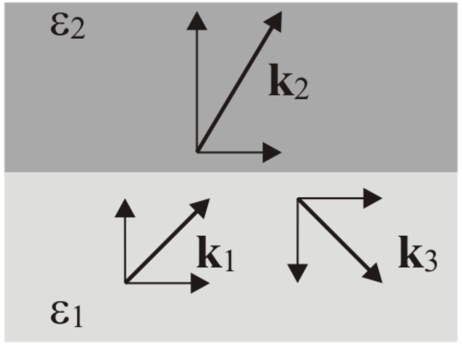

$$\mathbf{E}_1 = \left(E_{1x}, 0, E_{1z}\right) \longrightarrow \mathbf{E}_2 = \left(E_{2x}, 0, E_{2z}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{D}_1 = \left(\varepsilon_1 E_{1x}, 0, \varepsilon_1 E_{1z}\right) \\ \mathbf{D}_2 = \left(\varepsilon_2 E_{2x}, 0, \varepsilon_2 E_{2z}\right) \end{array}\right\} \longrightarrow E_{2z} = \varepsilon_1 E_{1z} / \varepsilon_2$$

$$\boxed{\mathbf{E}_2 = \left(E_{1x}, 0, \varepsilon_1 E_{1z} / \varepsilon_2\right)}$$

## Conditions d'interface - Réfraction

- La loi de Snell se déduit aussi des équations de Maxwell




$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

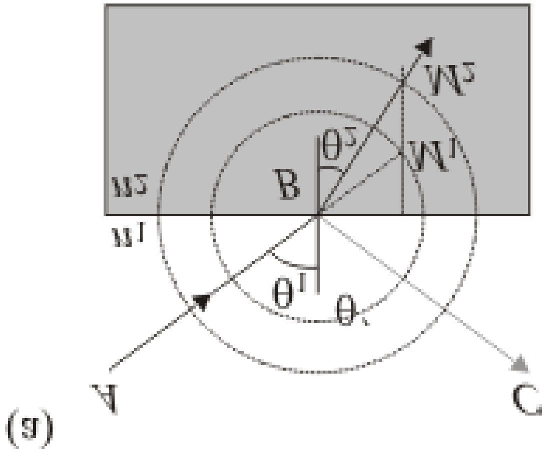
$$k_1 = n_1 k_0 \qquad k_2 = n_2 k_0$$

$$\boxed{n_1 k_0 \sin\theta_1 = n_2 k_0 \sin\theta_2}$$

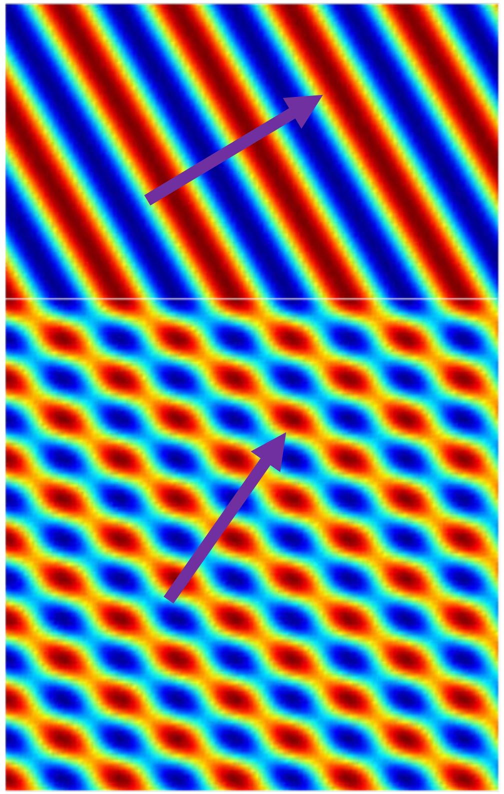
- Continuité de la composante parallèle à l'interface du vecteur d'onde
- Conservation de la quantité de mouvement

## Différence optique géométrique – optique de Maxwell

- Loi de Snell (détermine seulement les directions)

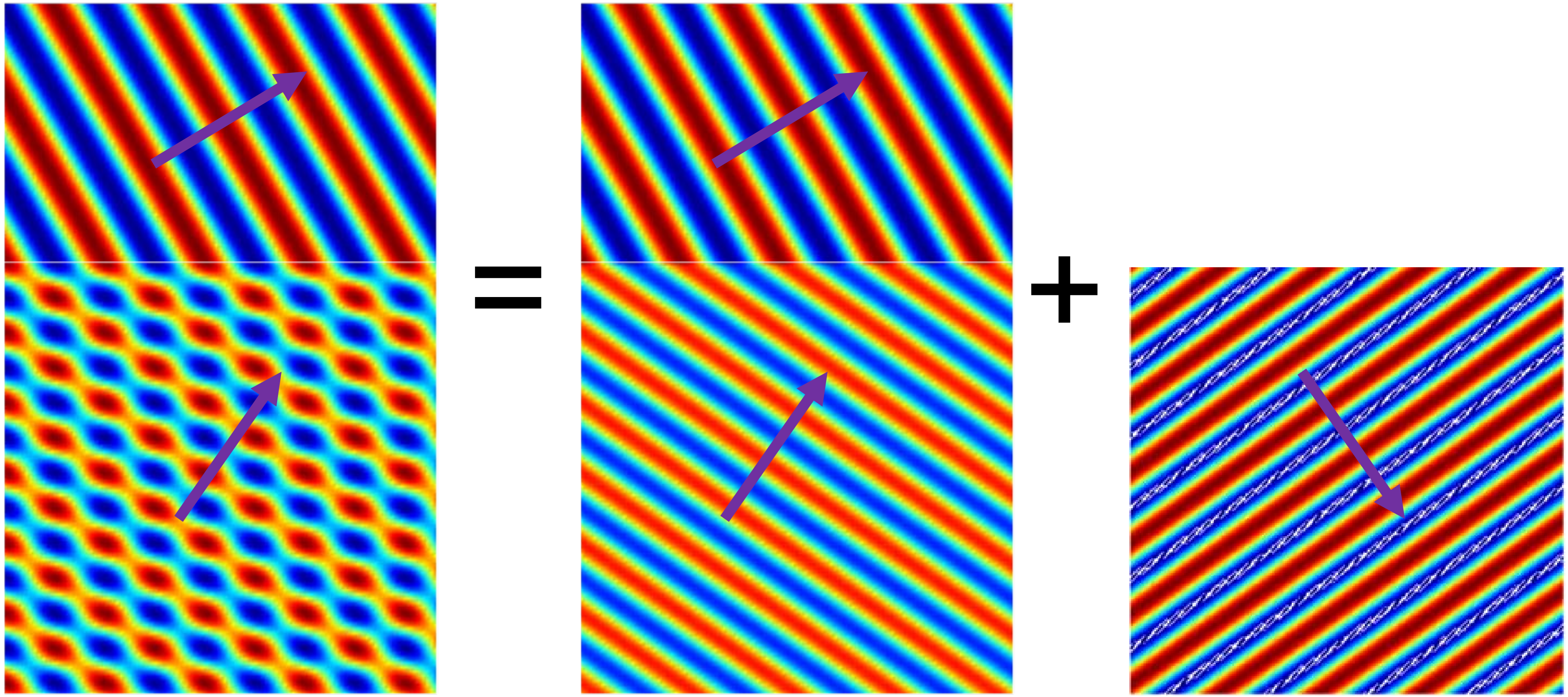


- Coefficients de Fresnel (déterminent aussi les amplitudes des différentes ondes)



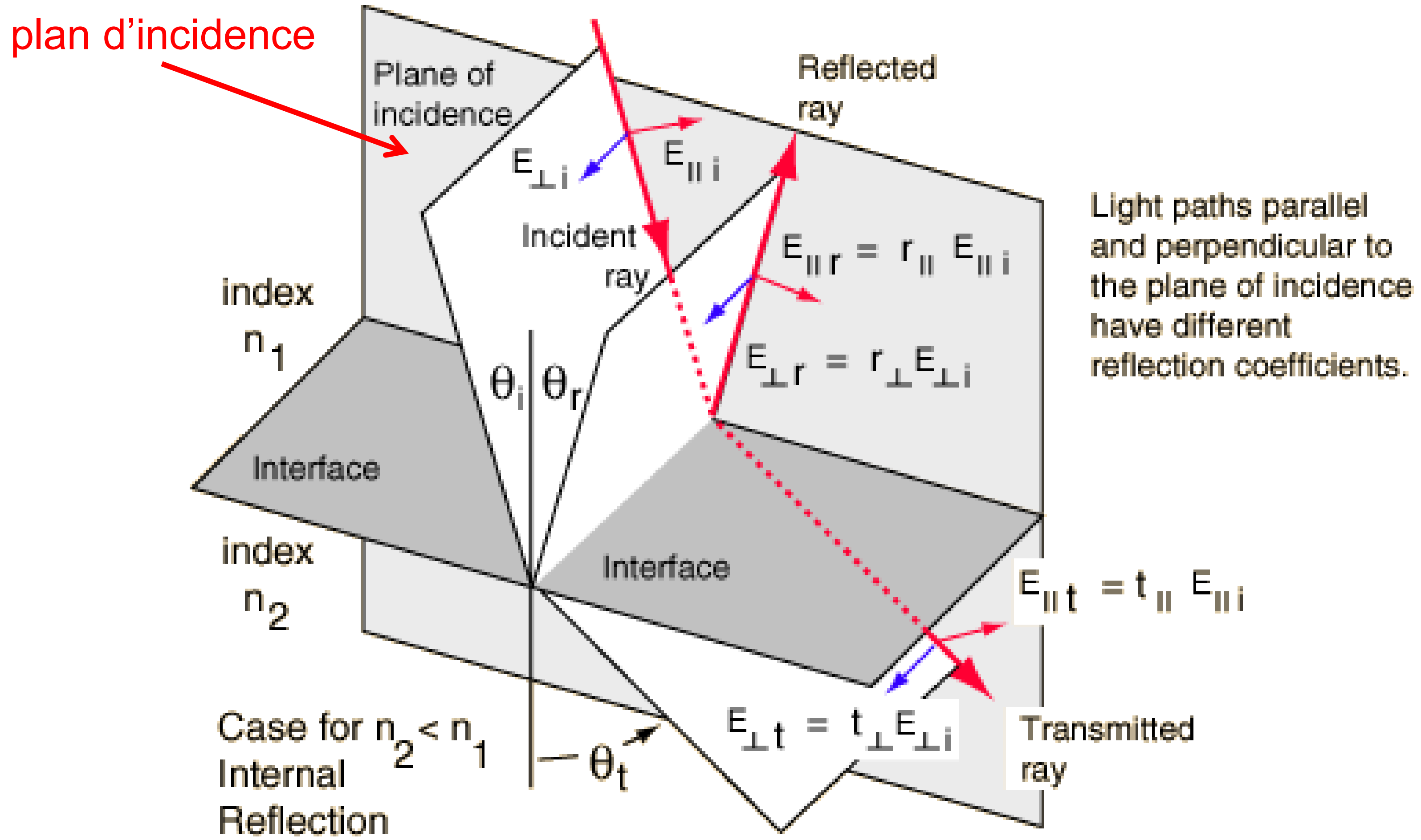
## Optique de Maxwell

- Champ total = Incident + Réfléchi



## Coefficients de Fresnel

- Le vecteur de propagation de l'onde incidente définit un plan dans lequel se trouve l'onde réfléchie et l'onde transmise:



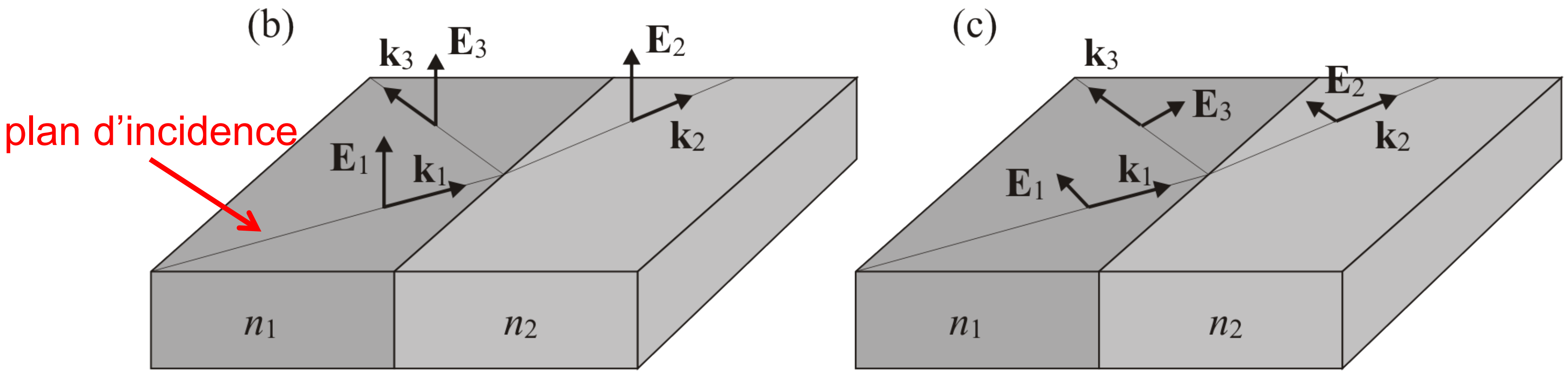

*hyperphysics.edu* Olivier J.F. Martin

## Coefficients de Fresnel

- Deux polarisations distinctes définies par rapport au plan d'incidence:

Transverse électrique TE
ou s (senkrecht)

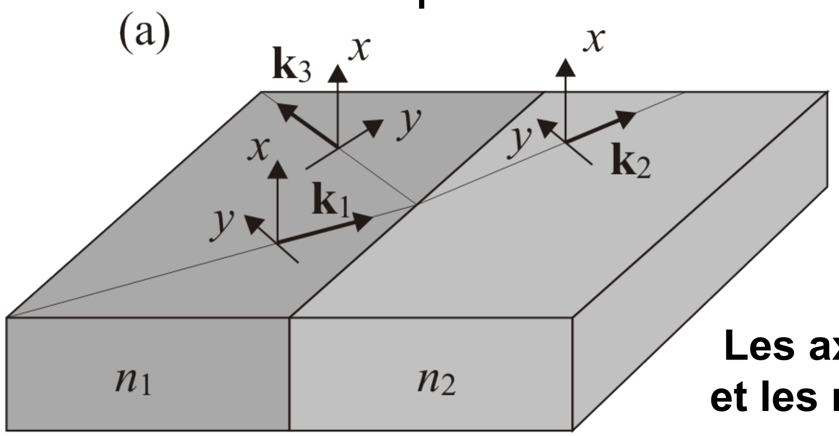
Transverse magnétique TM
ou p (parallel)




- Tout champ incident peut (doit) être décomposé en TE et TM.
- Chaque composante est conservée (par exemple, un champ incident TE donne lieu à des champs transmis et réfléchis TE)
- Les coefficients de Fresnel donnent les amplitudes des champs transmis et réfléchis

## Coefficients de Fresnel

- Sont complexes (amplitude et phase)
- Relient les champs transmis et réfléchis au champ incident:




**Les axes tournent avec les ondes et les repères ne sont pas toujours droitiers!**

$$E_{3x} = r_x E_{1x} \qquad E_{2x} = t_x E_{1x} \qquad \text{TE}$$

$$E_{3y} = r_y E_{1y} \qquad E_{2y} = t_y E_{1y} \qquad \text{TM}$$

réfléchi

transmis

- Cas particulier pour l'optique (milieu non-magnétique, sans perte):

$$\boxed{\begin{aligned} r_x &= \frac{n_1 \cos\theta_1 - n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2} & t_x &= 1 + r_x & &\text{polarisation TE} \\ r_y &= \frac{n_1 \sec\theta_1 - n_2 \sec\theta_2}{n_1 \sec\theta_1 + n_2 \sec\theta_2} & t_y &= (1 + r_y)\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} & &\text{polarisation TM}\,. \end{aligned}}$$

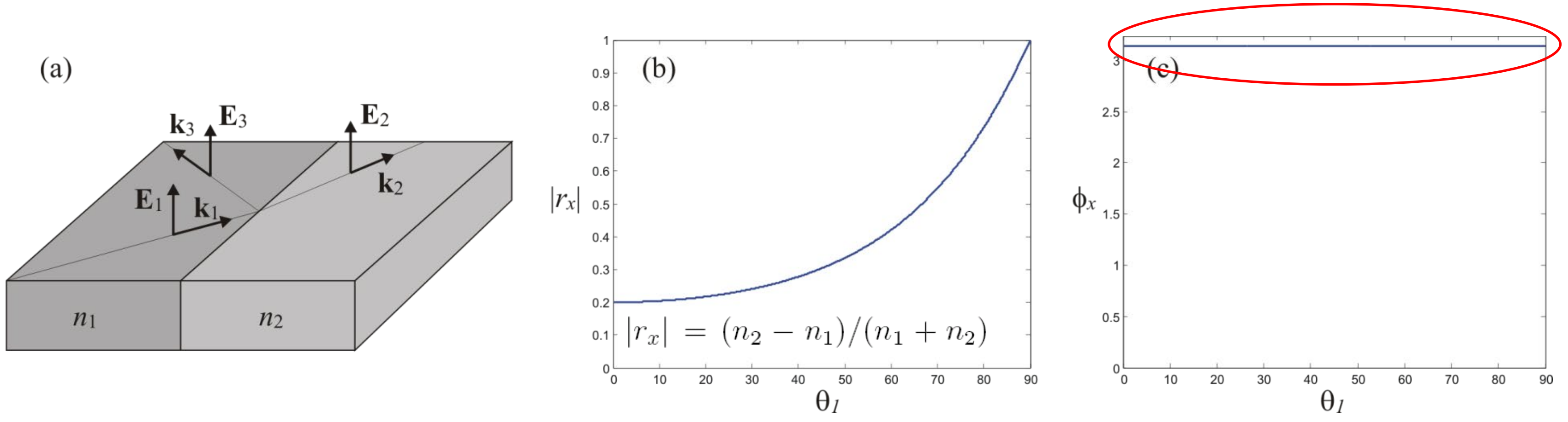
$$\sec = \cos^{-1}$$

- La loi de Snell donne $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ pour avoir $\cos\theta_2$ il faut utiliser $\cos\theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2\theta_2}$

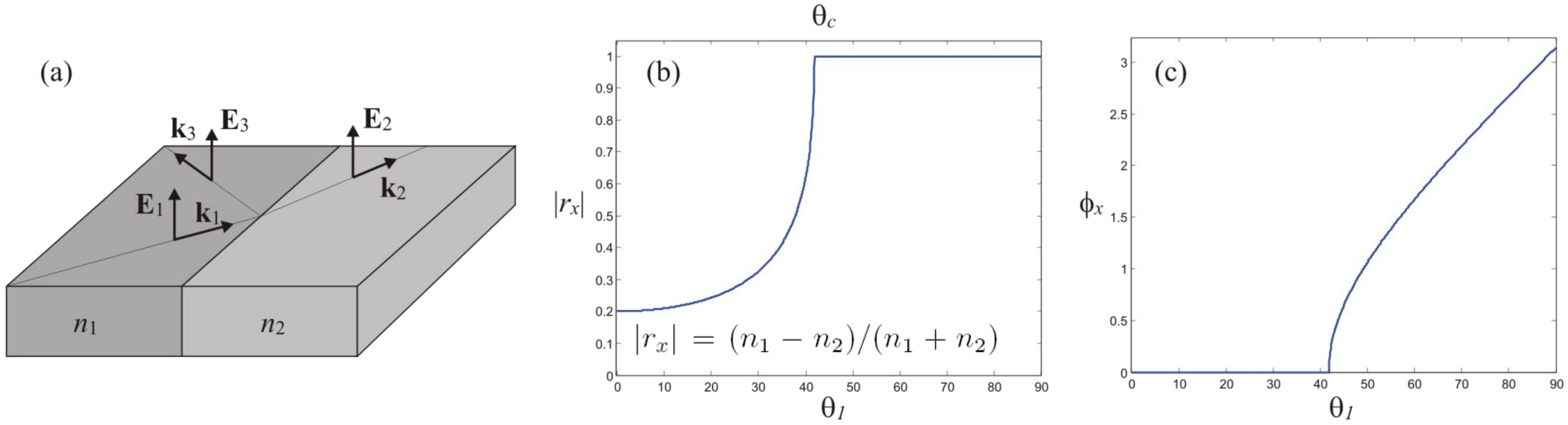
# Coefficients de Fresnel – Champ TE (ou s)

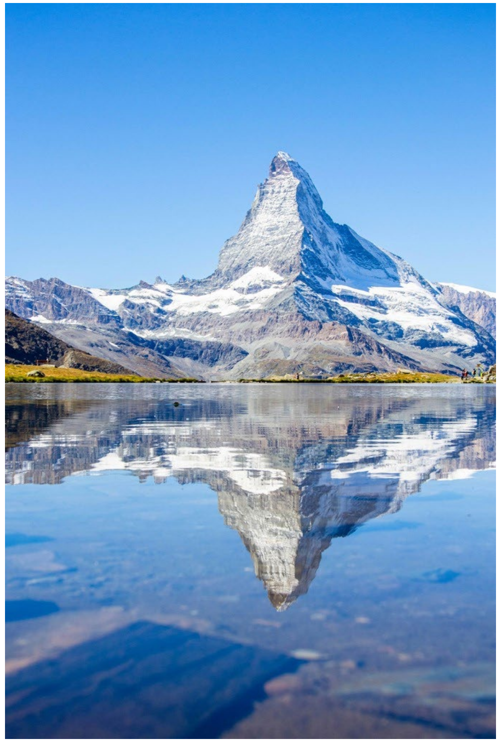
- Réflexion externe $(n_1 < n_2)$

par exemple réflexion air-verre: onde réfléchie toujours déphasée de $\pi$




- Réflexion interne $(n_1 > n_2)$

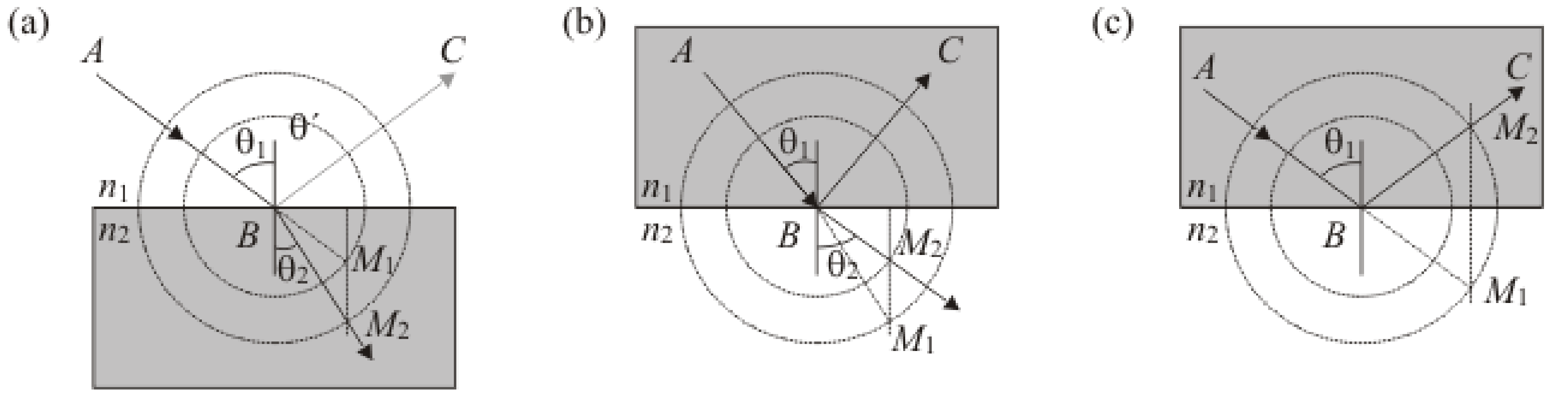


charlotte-mouttier.com

## Réflexion interne totale

- Il existe un angle limite au-delà duquel l'onde est entièrement réfléchie

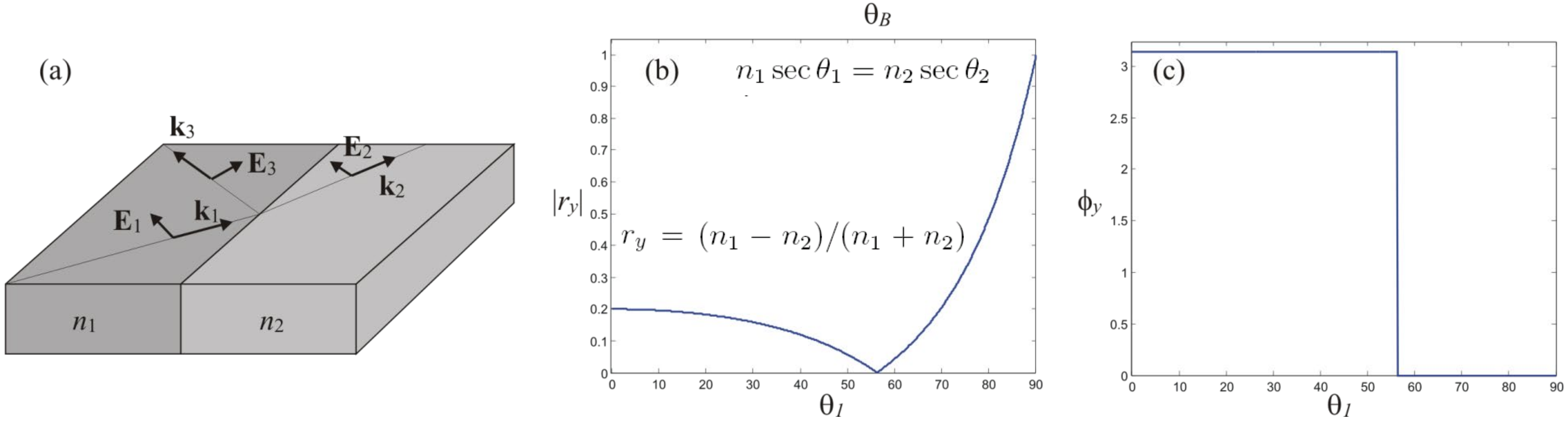



$$n_1 sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

$$\boxed{\theta_c = \arcsin\left(n_2/n_1\right)}$$

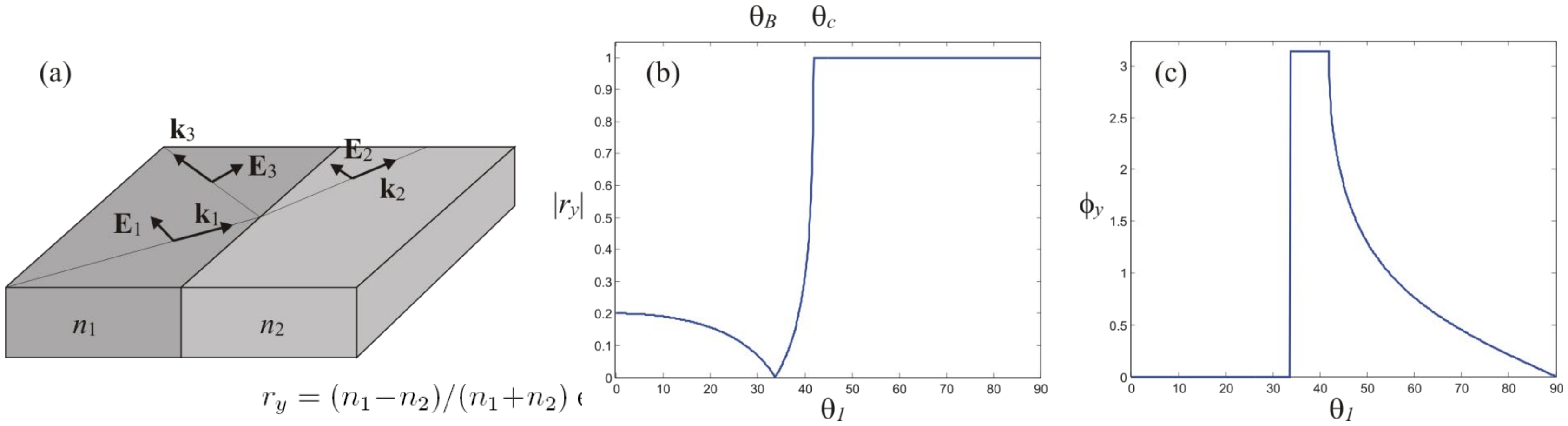
## Coefficients de Fresnel – Champ TM (ou p)

- Réflexion externe $(n_1 < n_2)$




$$\boxed{\theta_B = \arctan(n_2/n_1)}$$ Angle de Brewster

- Réflexion interne $(n_1 > n_2)$




Olivier J.F. Martin

## Angle de Brewster et polarisation

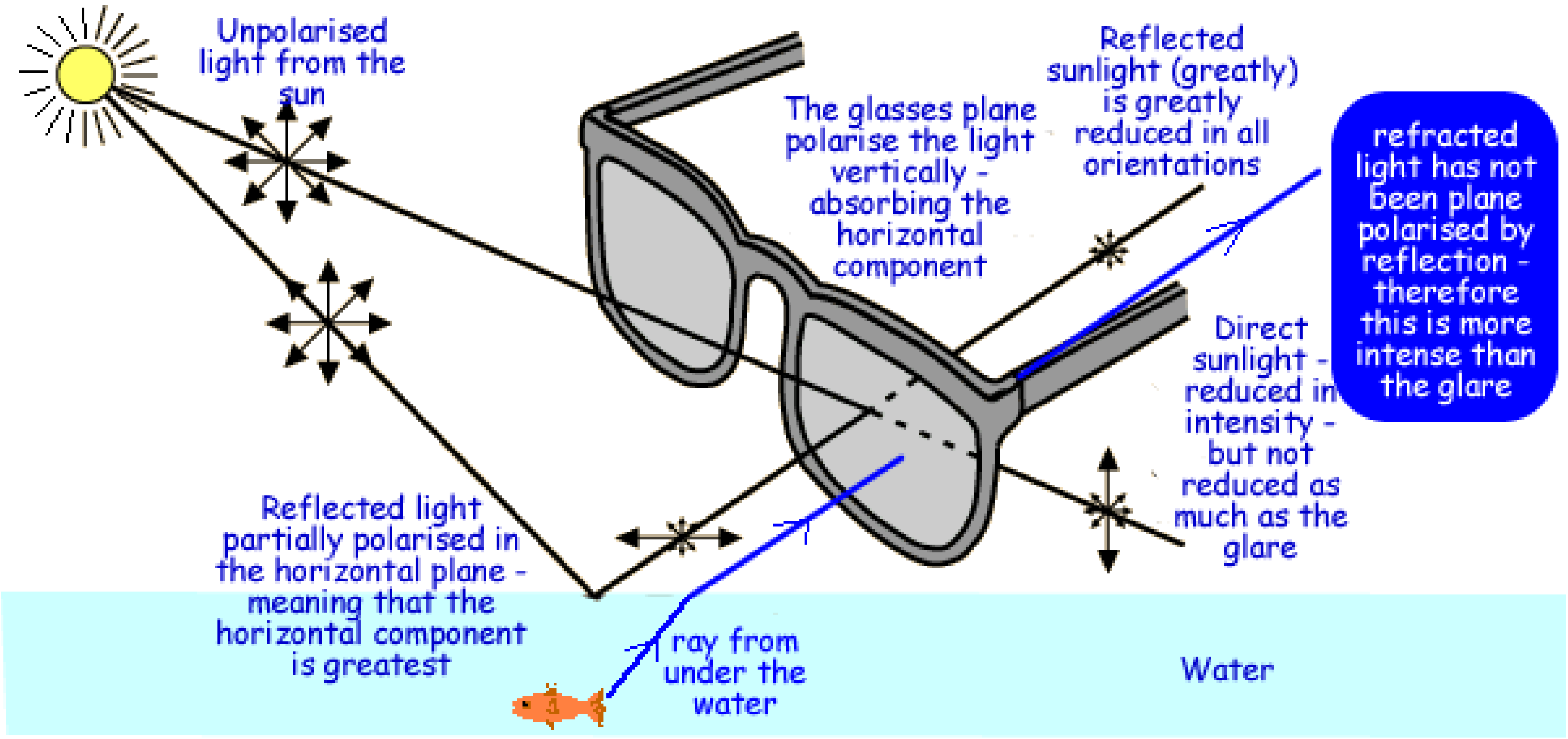
- La lumière réfléchie par une surfaces horizontale est polarisée préférentiellement parallèlement à cette surface
- Des lunettes polarisantes permettent d'éliminer cette polarisation, donc de diminuer ces réflexions parasites et d'augmenter le contraste

Avec lunettes Sans lunettes

*blinkvision.com*

## Angle de Brewster et polarisation

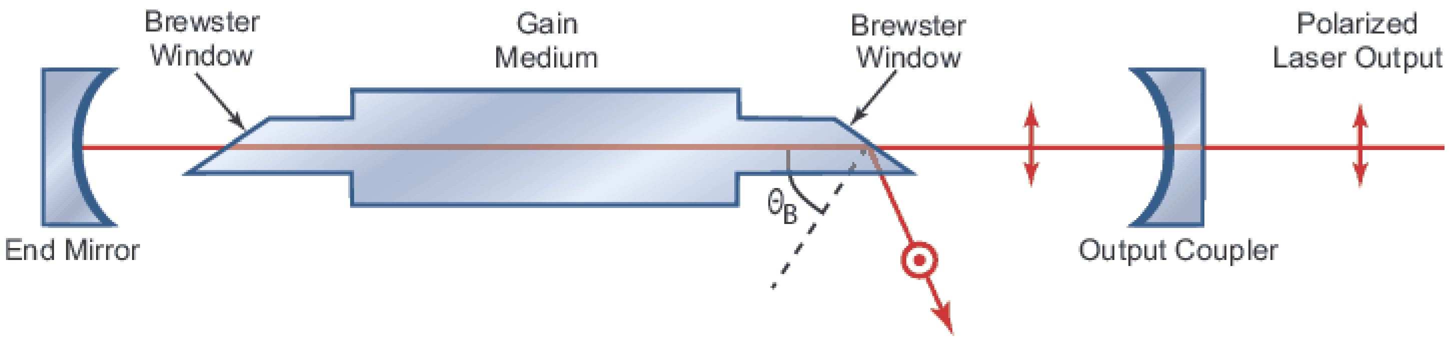
- La lumière réfléchie par une surfaces horizontale est polarisée préférentiellement parallèlement à cette surface
- Des lunettes polarisantes permettent d'éliminer cette polarisation, donc de diminuer ces réflexions parasites et d'augmenter le contraste




*cyberphysics.co.uk*

## Angle de Brewster et polarisation

- Dans les lasers à gaz, on introduit des «fenêtres de Brewster» pour polariser la lumière: la composante polarisée TM (ou p) n’est pas réfléchie par cet interface et donc continue à être amplifiée dans le laser. La composante TE (ou s) est éliminée par réflexion:

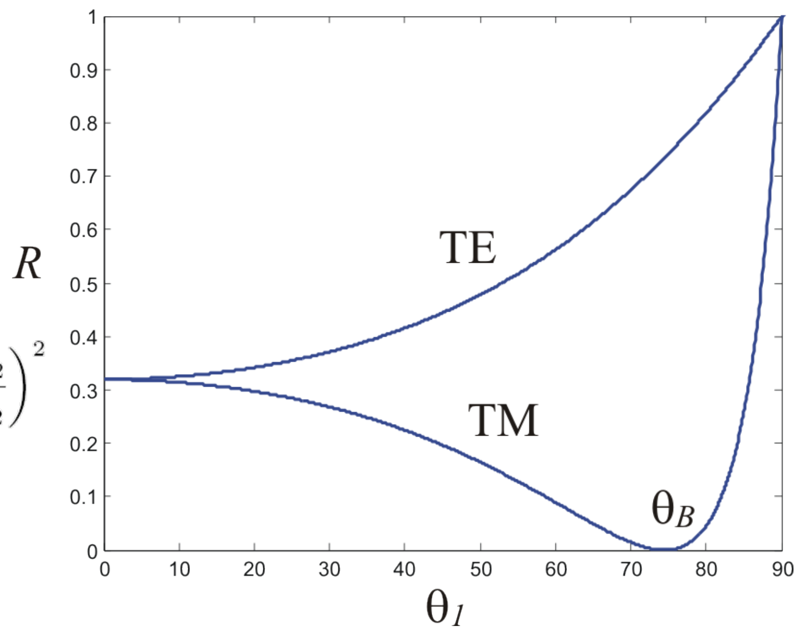



*newport.com*

## Réflectance et transmittance

- Jusqu'à présent, on a étudié l'amplitude des ondes transmises/rélfléchies; maintenant, on s'intéresse au <u>flux d'énergie optique</u>
- On définit d'abord la réflectance: $\mathcal{R} = |r|^2$
- Et la transmittance par conservation de l'énergie (milieu sans perte): $\mathcal{T} = 1 - \mathcal{R}$
- Par exemple entre l'air et un semiconducteur:

$$\mathcal{R} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$



# Ingénierie optique

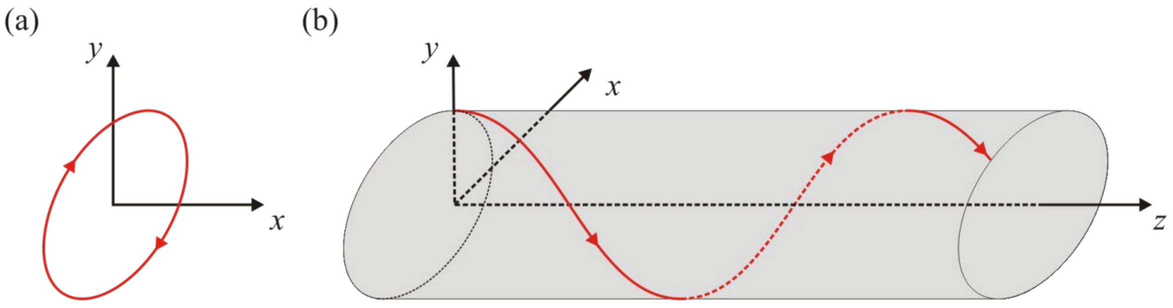
## Semaine 7 – partie 3

Olivier J.F. Martin
Laboratoire de Nanophotonique et Métrologie

EPFL

## Polarisation de la lumière

- On s’intéresse à des ondes planes, le champ électromagnétique est toujours transverse (perpendiculaire à la direction de propagation)
- La polarisation linéaire est un cas très particulier, où l’extrémité du vecteur du champ électrique décrit une ligne
- En général, la polarisation est elliptique: l’extrémité du champ électrique décrit une <u>ellipse</u>
- Le sens de rotation du vecteur du champ électrique est différent dans le temps et dans l’espace (signes différents pour le temps et l’espace dans les équations)



**Polarisation de la lumière**

$$E_x\left(z,t\right) = a_x \cos\left(-kz + \omega t + \phi_x\right)$$
$$E_y\left(z,t\right) = a_y \cos\left(-kz + \omega t + \phi_y\right)$$

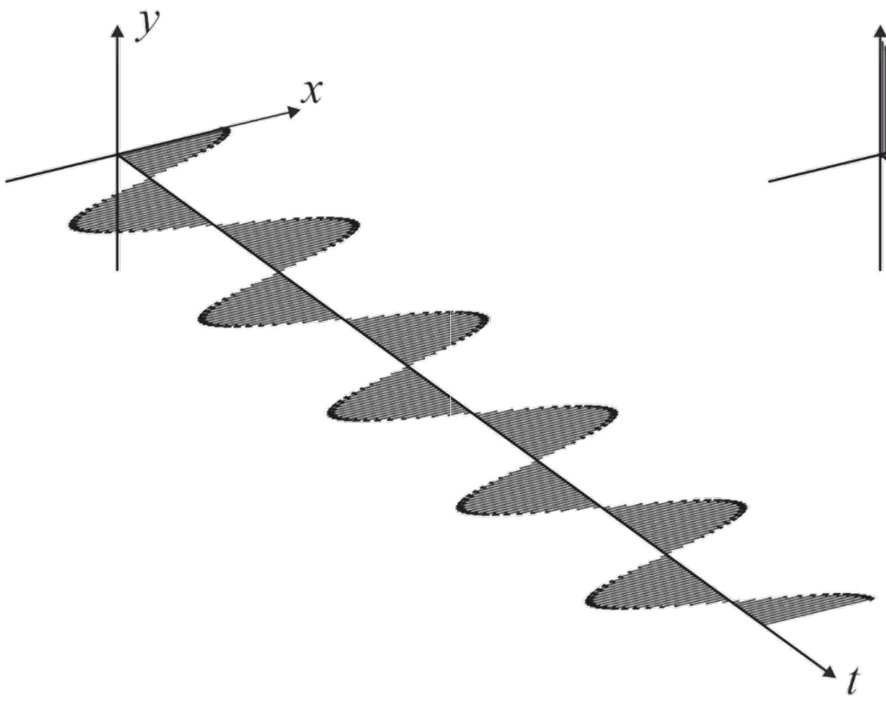
$$\phi = \phi_y - \phi_x$$

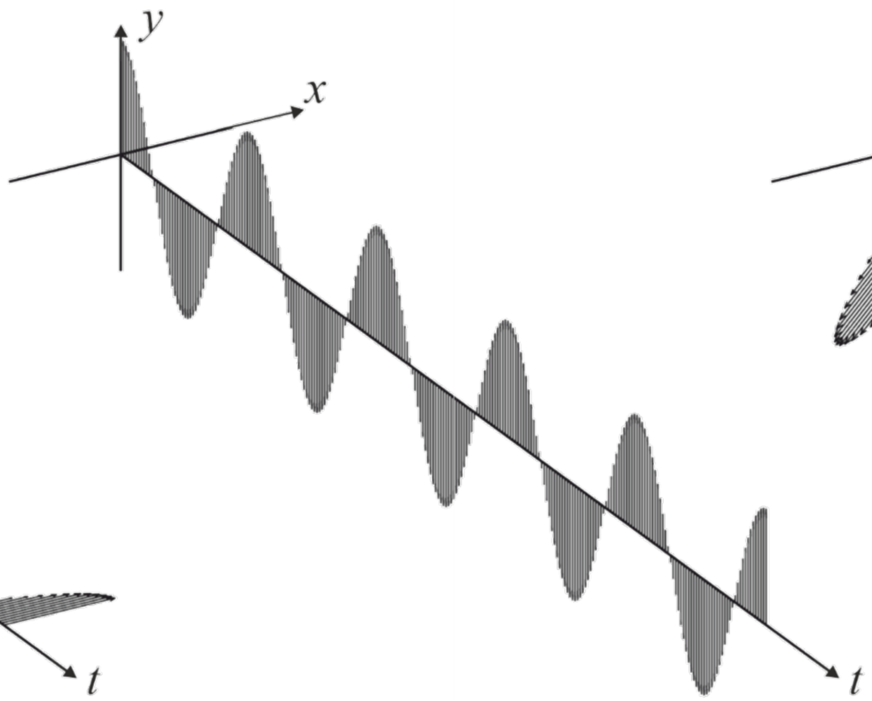
- On se concentre sur le sens de rotation dans le temps (lorsque la lumière vient vers nous):
  - Rotation dans le sens des aiguilles d'une montre → polarisation à droite
  - Rotation dans le sens contraire des aiguilles d'une montre → polarisation à gauche
- On peut décomposer cette ellipse selon deux axes → <u>deux composantes du champ électrique</u>
- La différence de phase $\phi$ entre ces deux composantes détermine la polarisation de la lumière

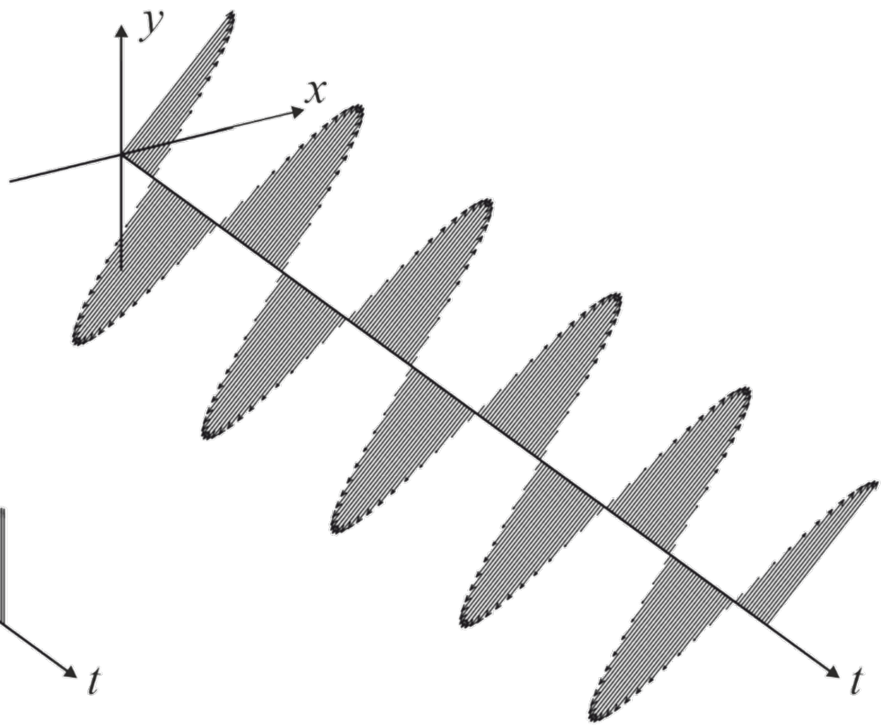
## Onde polarisée linéairement (évolution dans le temps)

- Différentes possibilités:

$a_x = 1,\ a_y = 0,\ \phi = 0$ $\qquad$ $a_x = 0,\ a_y = 1,\ \phi = 0$ $\qquad$ $a_x = 1,\ a_y = 1,\ \phi = 0$



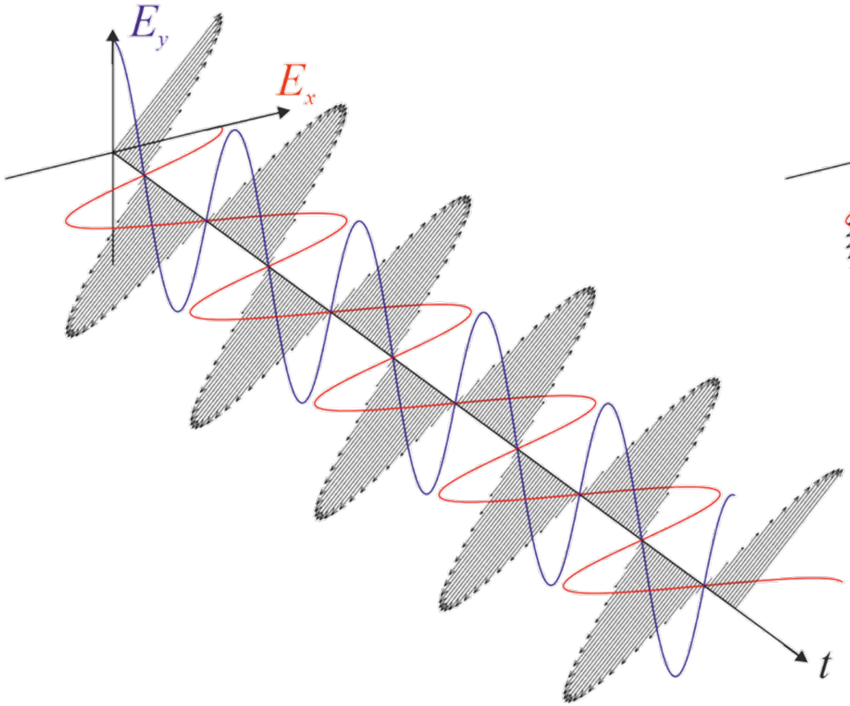



## Onde polarisée circulairement (évolution dans le temps)

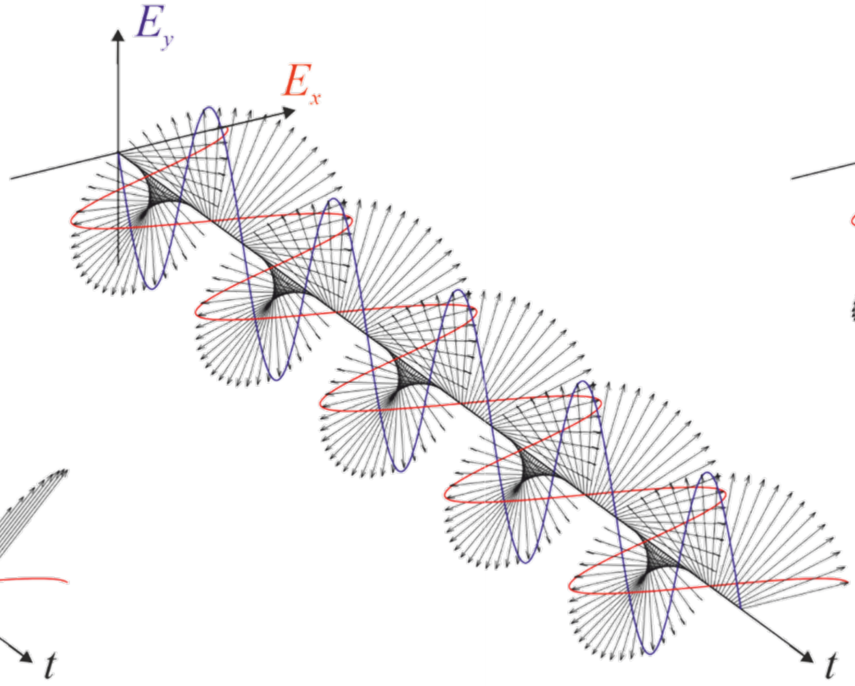
- Il est intéressant d'observer l'évolution de chaque composante du champ:

$$a_x = 1,\ a_y = 1,\ \phi = 0$$



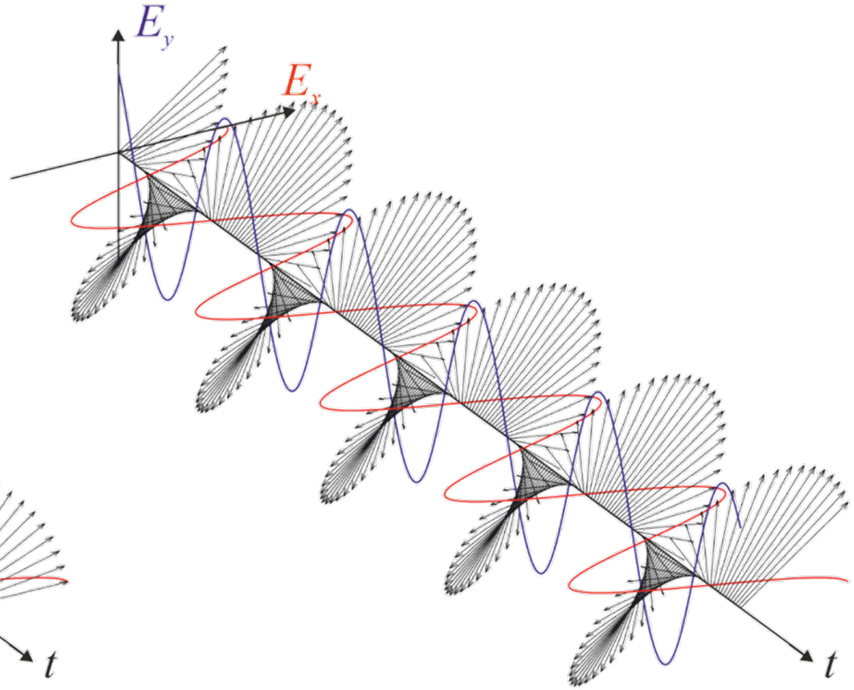

Polarisation linéaire à 45°

$$a_x = 1,\ a_y = 1,\ \phi = \pi / 2$$




Polarisation circulaire à droite (rotation dans le sens des aiguilles d'une montre)

$$a_x = 1,\ a_y = 1,\ \phi = \pi / 4$$




Polarisation elliptique à droite (rotation dans le sens des aiguilles d'une montre)

**Onde polarisée circulairement (évolution dans le temps)**

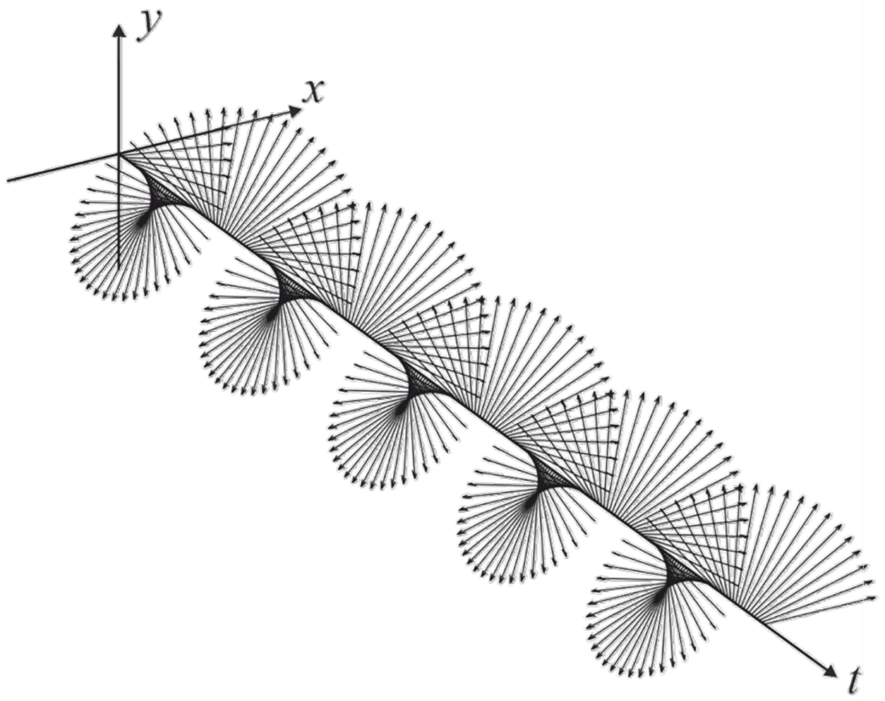
- Polarisation à droite et à gauche:

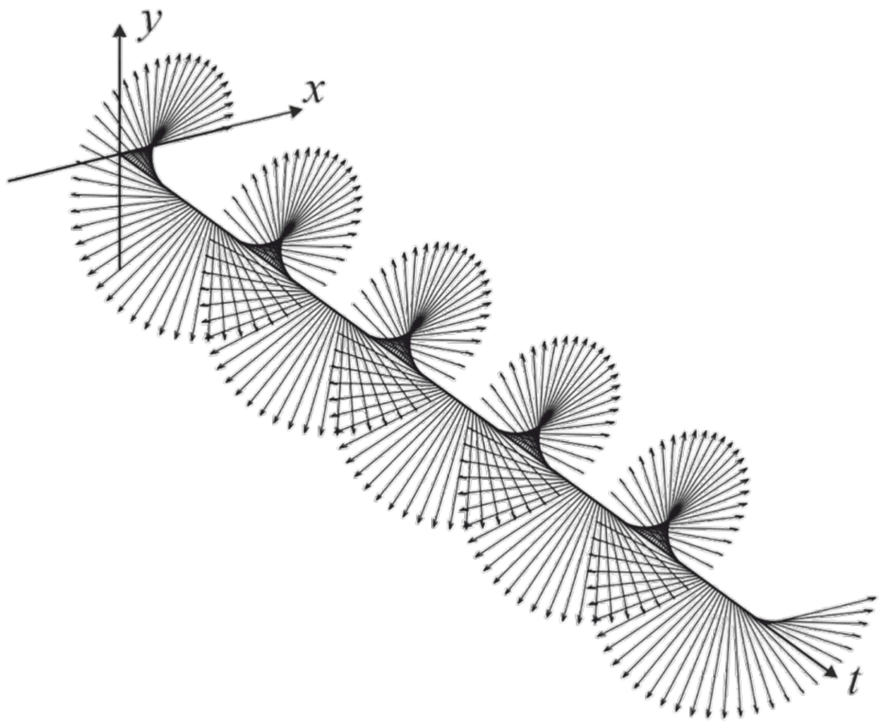
$$a_x = 1,\ a_y = 1,\ \phi = \pi / 2$$

(rotation dans le temps dans le sens des aiguilles d'une montre → polarisation à droite)

$$a_x = 1,\ a_y = 1,\ \phi = -\pi / 2$$

(rotation dans le temps dans le sens contraire des aiguilles d'une montre → polarisation à gauche)




Olivier J.F. Martin

## Onde polarisée elliptiquement (évolution dans le temps)

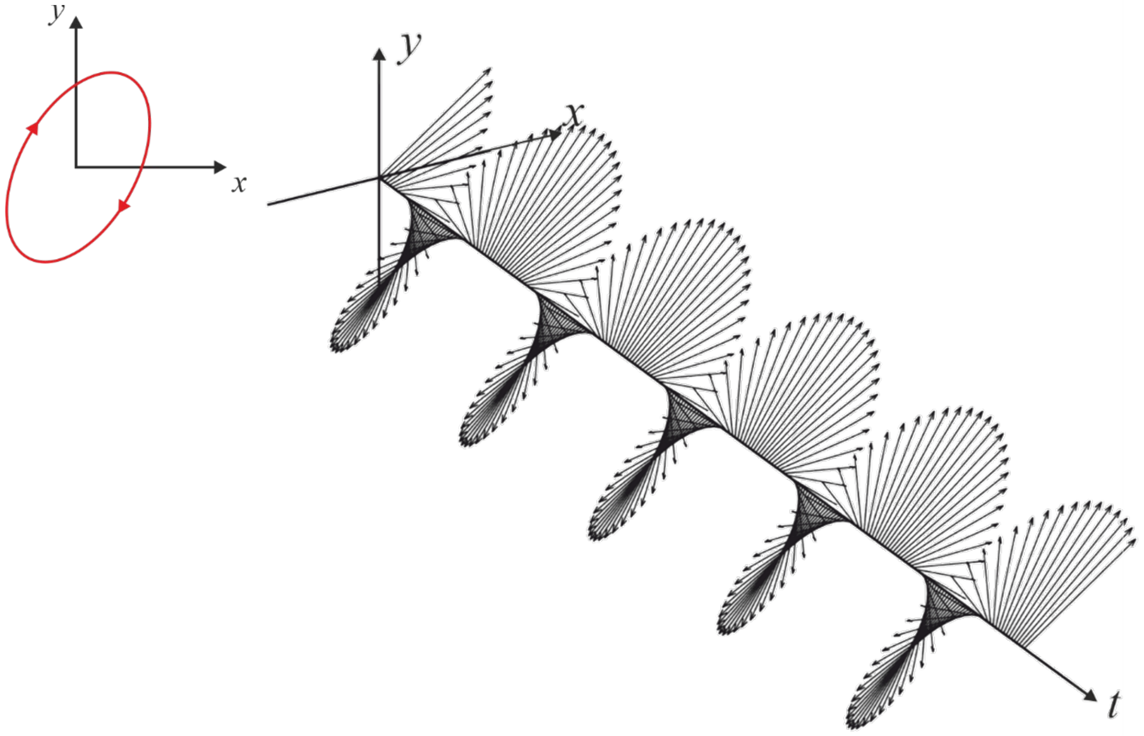
- Le champ électrique décrit une ellipse

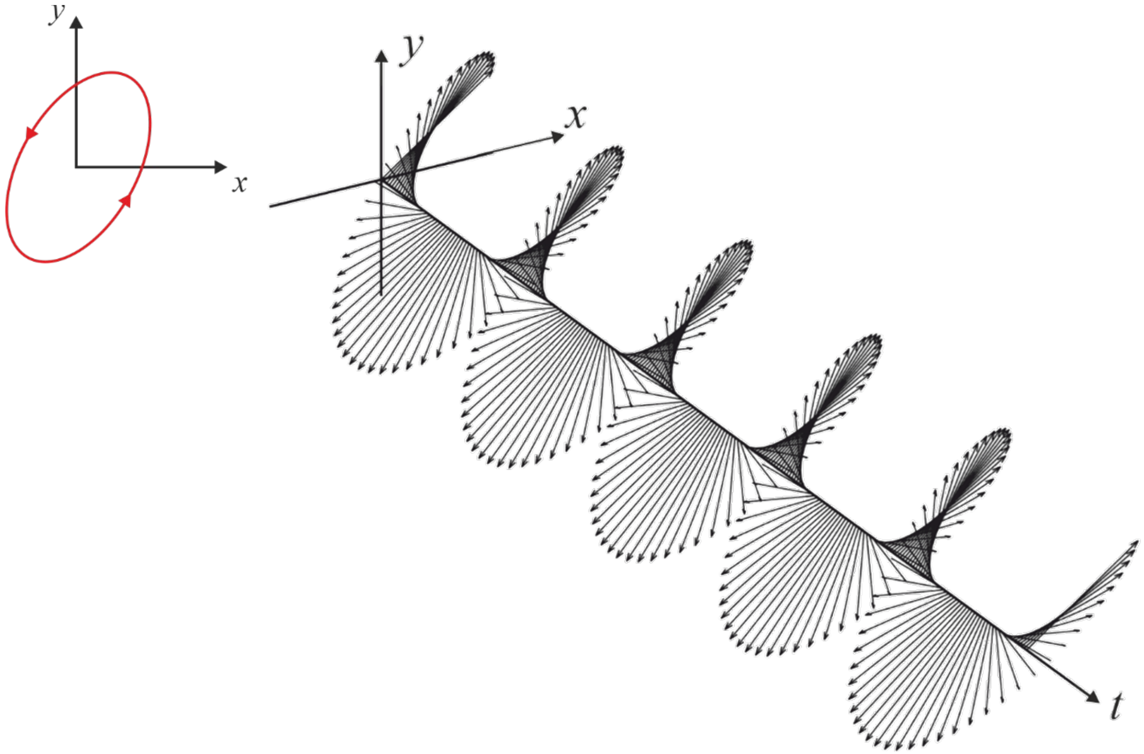
$$a_x = 1,\ a_y = 1,\ \phi = \pi / 4$$

(rotation dans le temps dans le sens des aiguilles d'une montre → polarisation à droite)

$$a_x = 1,\ a_y = 1,\ \phi = -\pi / 4$$

(rotation dans le temps dans le sens contraire des aiguilles d'une montre → polarisation à gauche)

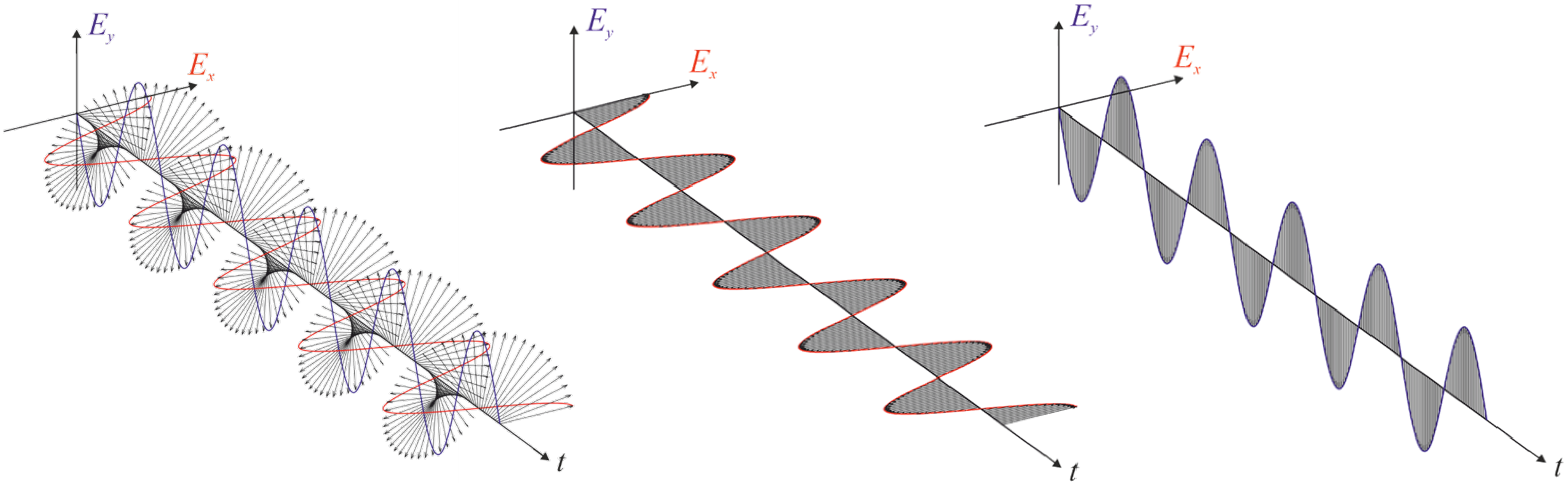


**Polariseurs – Première prise de contact**

- Considérons une onde polarisée circulairement à droite; si on ne garde qu'une composante du champ, l'onde devient polarisée linéairement:

$$a_x = 1,\ a_y = 1,\ \phi = \pi / 2$$




Polarisation circulaire à droite (rotation dans le sens des aiguilles d'une montre)

Polarisation linéaire horizontale

Polarisation linéaire verticale

Olivier J.F. Martin

# Ingénierie optique

## Semaine 7 – partie 4

Olivier J.F. Martin
Laboratoire de Nanophotonique et Métrologie

EPFL

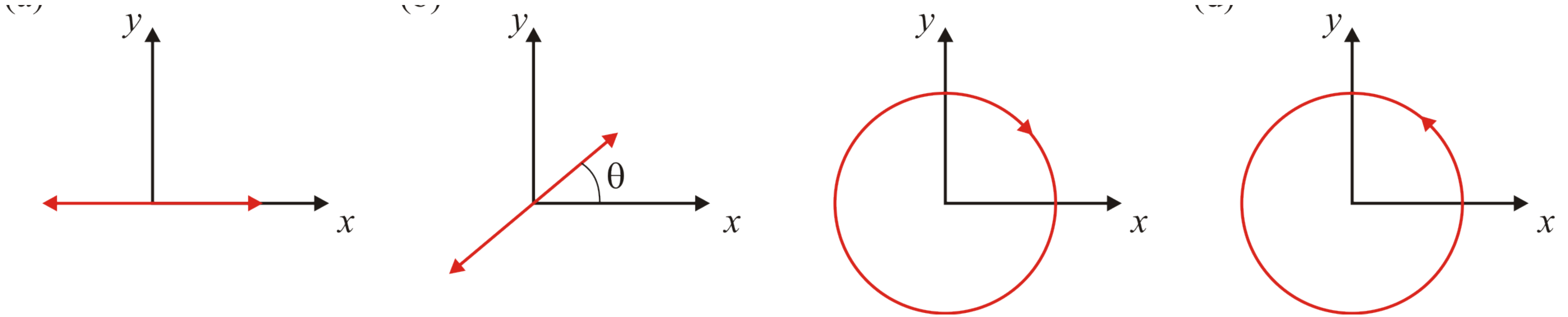
## Vecteurs de Jones

$$\mathbf{E}(z,t)=\begin{pmatrix} E_x(z,t) \\ E_y(z,t) \end{pmatrix} = \mathbf{A}e^{-jkz}e^{j\omega t} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_x \\ \tilde{a}_y \end{pmatrix} e^{-jkz}e^{j\omega t} = \begin{pmatrix} a_x e^{j\phi_x} \\ a_y e^{j\phi_y} \end{pmatrix} e^{-jkz}e^{j\omega t} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} e^{-jkz}e^{j\omega t}$$

- Les vecteurs de Jones permettent de caractériser la polarisation de la lumière:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

- Quelques cas particuliers pour $|A_x|^2 + |A_y|^2$ =1:




$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix}$$

circulaire droite

circulaire gauche

## Onde polarisée circulairement (évolution dans le temps)

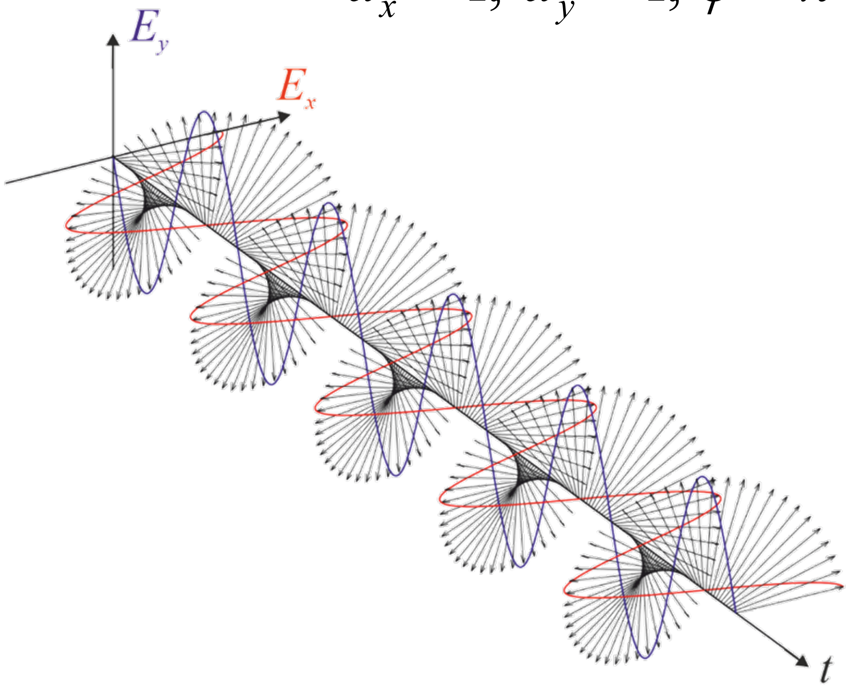
- Lien entre la notation complexe du vecteur de Jones et la phase:

$$E_x(z,t) = a_x \cos(-kz + \omega t + \phi_x)$$
$$E_y(z,t) = a_y \cos(-kz + \omega t + \phi_y)$$

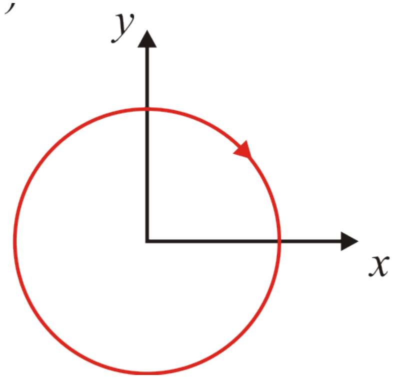
$$\phi = \phi_y - \phi_x$$

$$a_x = 1,\ a_y = 1,\ \phi = \pi/2$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$




Polarisation circulaire à droite
(rotation dans le sens des aiguilles d'une montre)

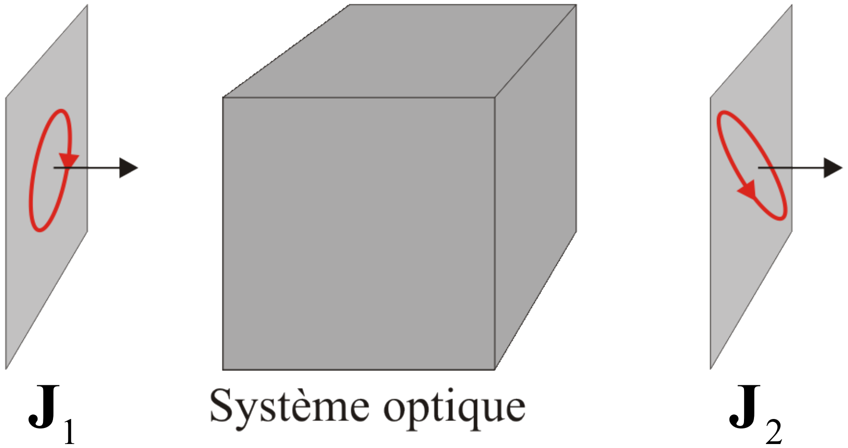



$$\mathbf{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$$

circulaire droite

## Matrices de Jones

- Les matrices de Jones indiquent comment un système optique modifie la polarisation de la lumière (i.e. le vecteur de Jones):



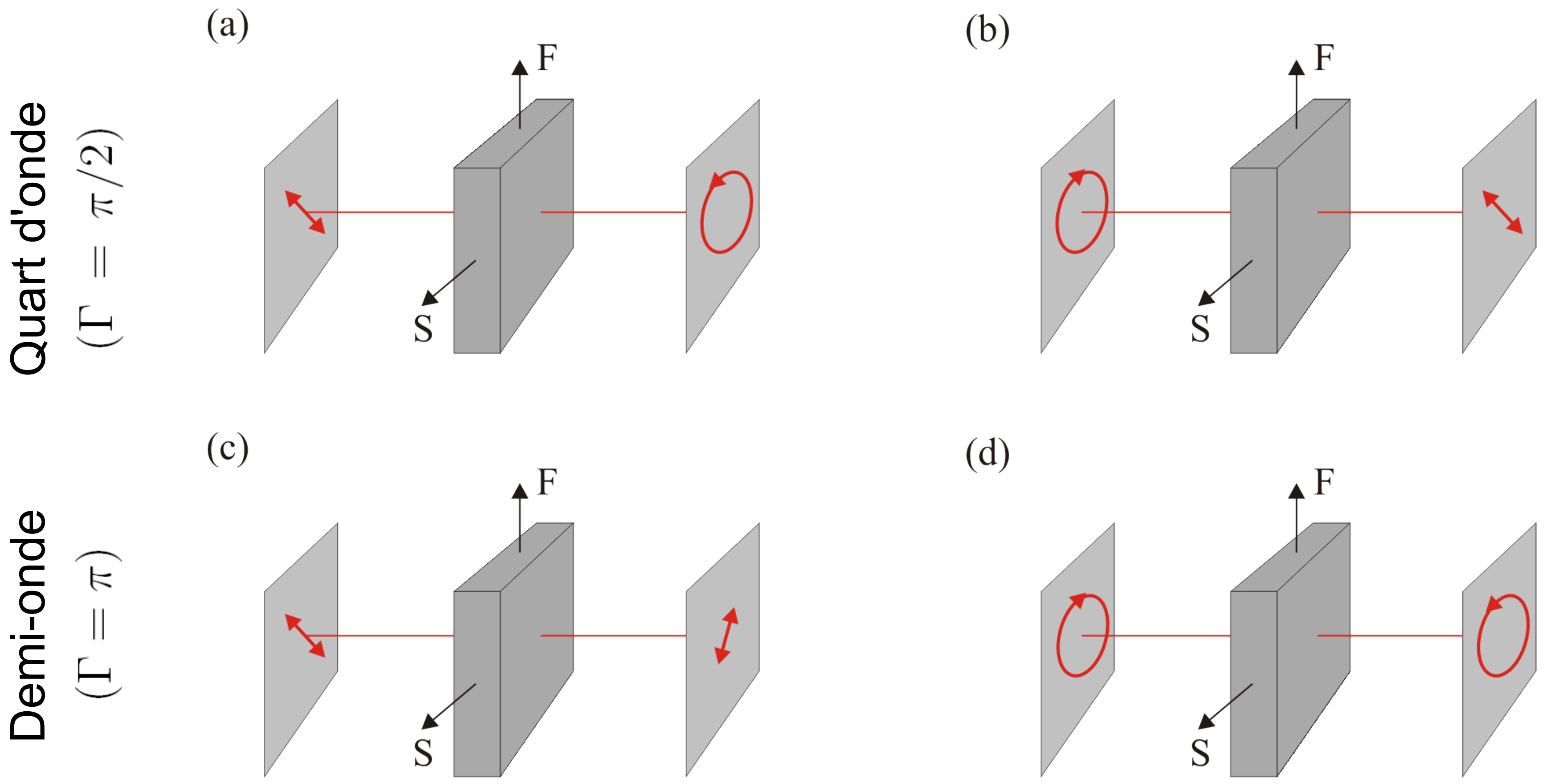

- On suppose une relation linéaire $\mathbf{J}_2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{J}_1$ :

$$\boxed{\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}}$$

**Matrices de Jones**

- Quelques éléments optiques particuliers
  - polariseur linéaire (selon $x$): $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
  - polariseur à un angle $\theta$: $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$
  - retardateur (avec une phase $\Gamma$): $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-j\Gamma} \end{pmatrix}$
  - rotateur (tourne la polarization d'un angle $\theta$): $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

# Retardateurs – Lame quart d'onde et demi-onde




Olivier J.F. Martin

# Ingénierie optique

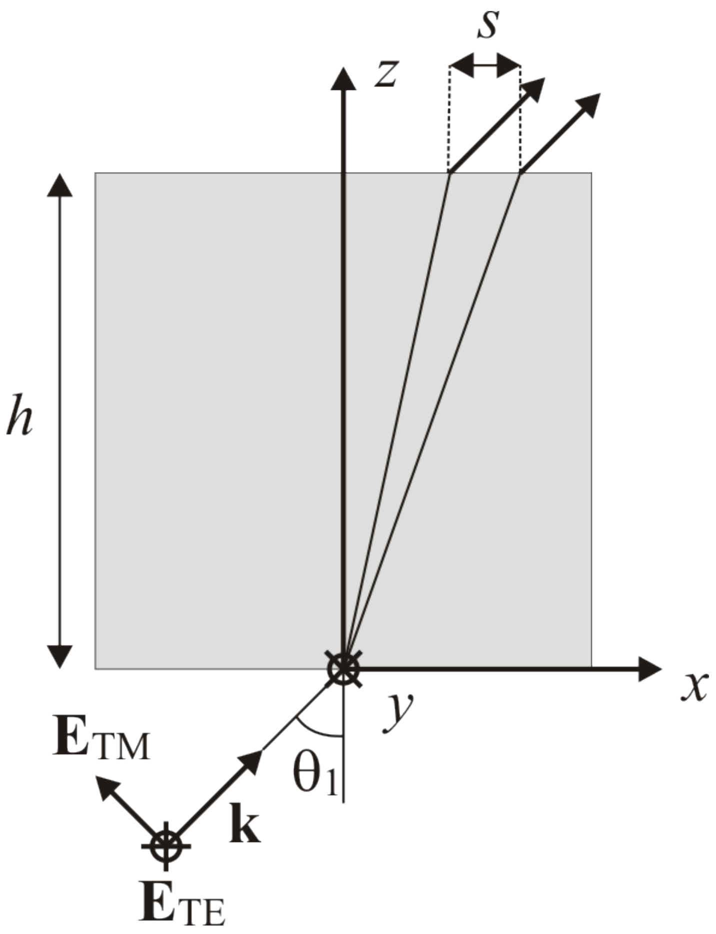
## Semaine 7 – partie 5

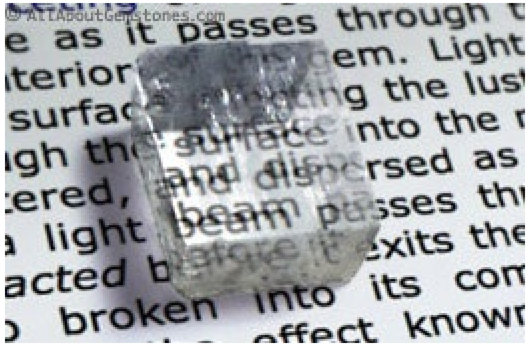
Olivier J.F. Martin
Laboratoire de Nanophotonique et Métrologie

EPFL

## Birefringence

- Chaque polarisation voit un autre cristal (un autre indice de réfraction) et est donc reffractée différement

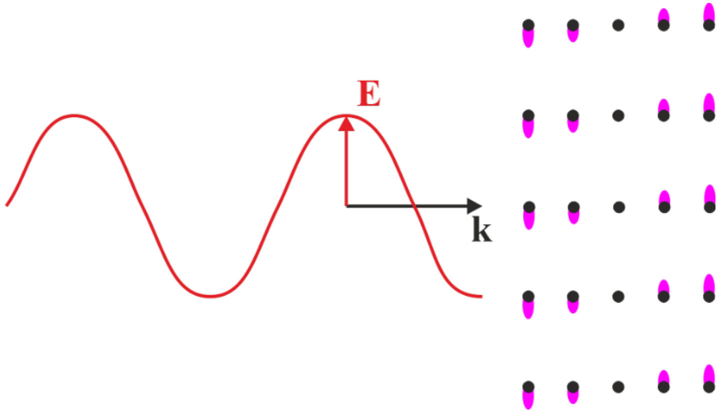


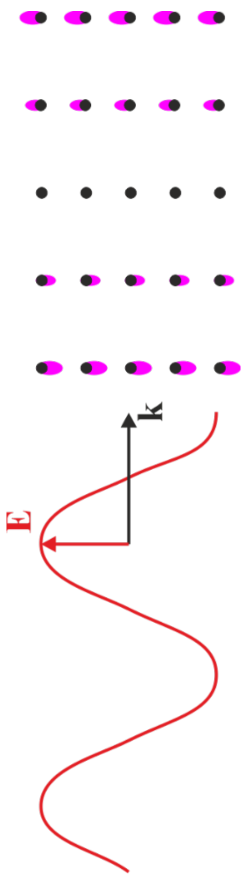



## Matériau anisotrope

$$\boxed{\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \epsilon_0 \epsilon_r(\mathbf{r},t)\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \epsilon_0(1+\chi(\mathbf{r},t))\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}$$

- L'interaction dépend de l'orientation <u>du champ électrique</u> par rapport au crystal



**Matériaux anisotropes**

- C'est le champ $\mathbf{D}$ qui caractérise la réponse de la matière:

$$\boxed{\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \epsilon_0 \epsilon_r(\mathbf{r},t)\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \epsilon_0(1+\chi(\mathbf{r},t))\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}$$

- Pour un cristal, la permittivité devient tensorielle:

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

- On peut cependant toujours la diagonaliser dans les axes principaux du cristal (axes cristallographiques):

$$\boxed{\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}}$$

- Matériau isotrope: 1 seul indice de réfraction

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon \qquad D = \varepsilon E = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \qquad n = \sqrt{\varepsilon_r}$$

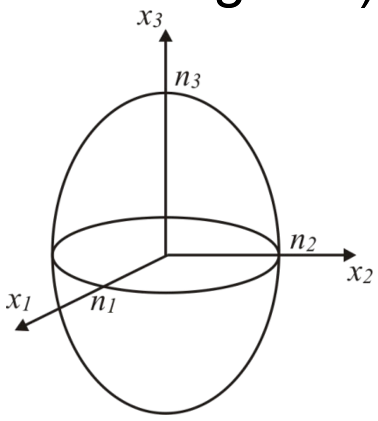
## Matériaux anisotropes

- Matériau anisotrope: 3 indices de réfraction différents

$$n_1 = \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_0} \qquad n_2 = \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_0} \qquad n_3 = \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_0}$$

- Ellipsoïde d'indices (axes principaux, dans lesquels ε est diagonal):

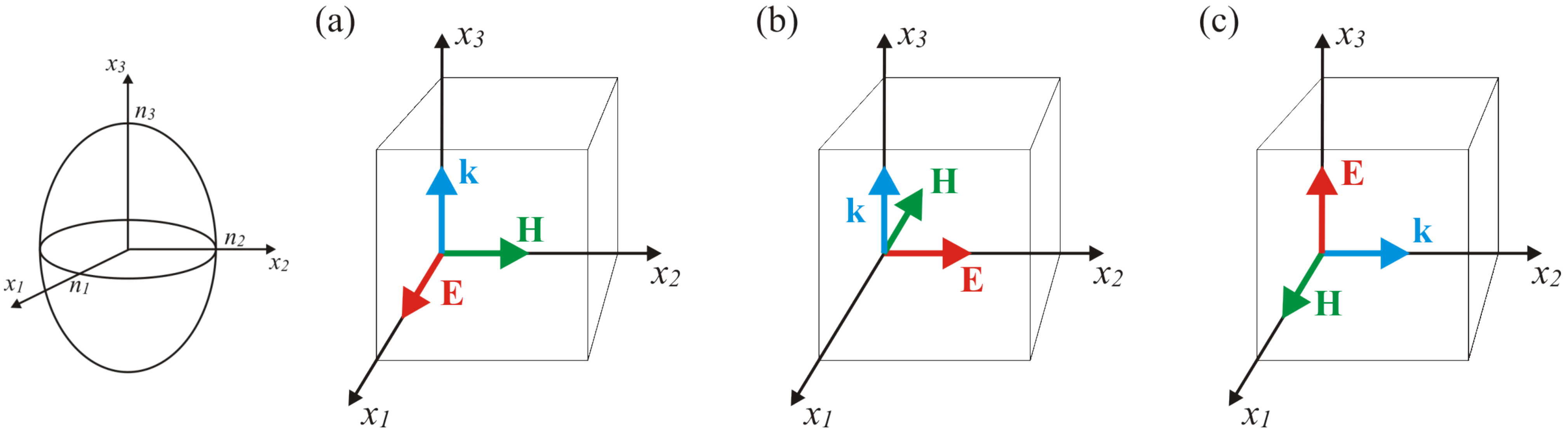
$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1$$




- Il existe donc trois familles de matériaux:
  - anisotrope ou biaxial (trois indices différents)
  - uniaxial $(n_1 = n_2 \neq n_3)$ (deux indices identiques, la plupart des cristaux)
  - isotrope $(n_1 = n_2 = n_3)$ (l'ellipsoïde d'indices est une sphère)

## Propagation le long d'un axe principal

- C'est la relation avec le champ électrique (pas avec la direction de propagation) qui détermine l'indice de réfraction, donc la vitesse de propagation et le vecteur d'onde




| | | |
|---|---|---|
| $D_1 = \epsilon_1 E_1$ | $c_0/n_2$ | $c_0/n_3$ |
| $k = n_1 k_0$ | $k = n_2 k_0$ | $k = n_3 k_0$ |

## Cristal uni-axial

- Beaucoup de cristaux utilisés en optique ont une direction privilégiée qui correspond à la direction de croissance et sont isotropes dans les deux autres directions
- Un indice extraordinaire $\varepsilon_e$, $n_e$ et deux indices ordinaires $\varepsilon_o$, $n_o$:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_o & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_o & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \qquad n = \sqrt{\varepsilon_r}$$

- La propagation selon les axes donne un indice ordinaire ou extraordinaire
- Pour une autre direction de propagation, on observe un indice intermédiaire entre $n_o$ et $n_e$ :