

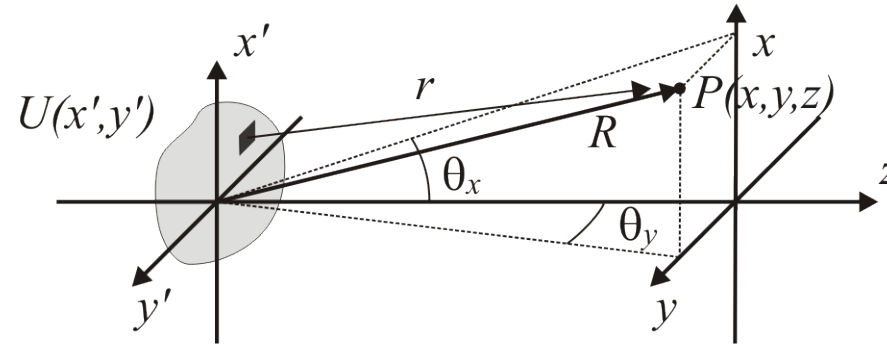
Ingénierie optique

Semaine 6 – partie 1

Olivier J.F. Martin
Laboratoire de Nanophotonique et Métrologie



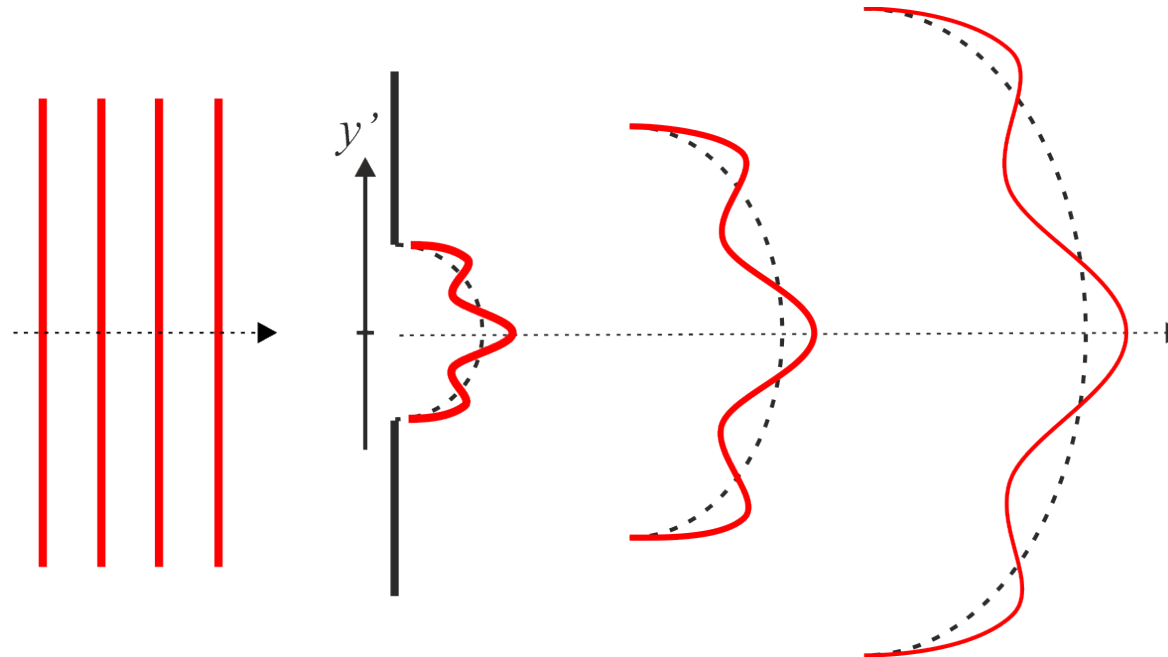
Diffraction de Fraunhofer



- Nous avons obtenu la formule suivante:

$$U(x, y, R) = \frac{e^{-jkR}}{j\lambda R} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x', y') e^{j2\pi(p_x x' + p_y y')} dx' dy' \quad \cos \theta \simeq 1$$

- Le champ à grande distance d'une ouverture est une onde sphérique modulée par un second terme



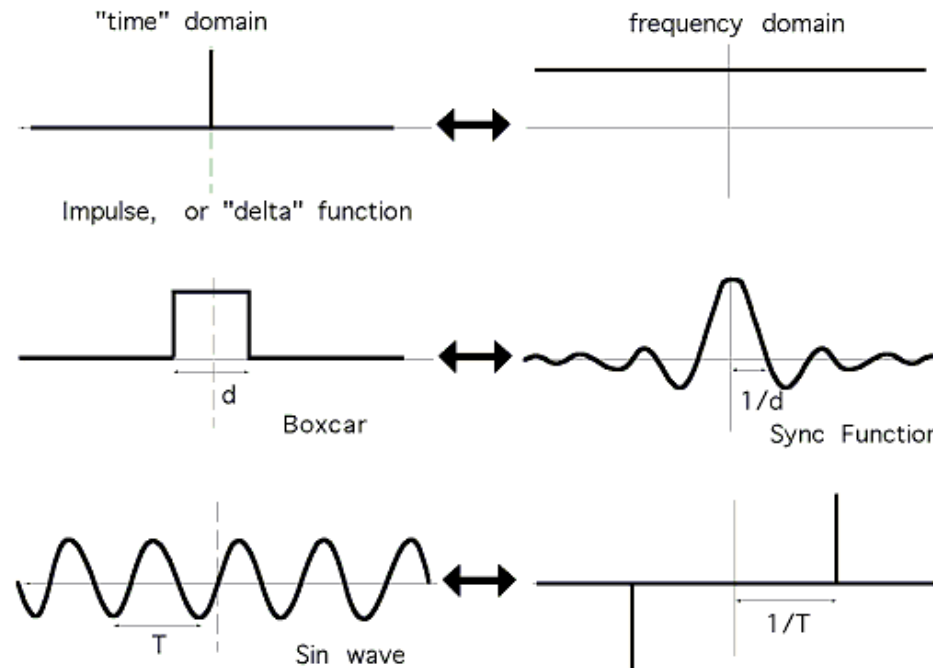
Diffraction de Fraunhofer et transformée de Fourier

- La modulation correspond à la transformée de Fourier de l'ouverture!

$$U(x, y, R) = \frac{e^{-jkR}}{j\lambda R} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x', y') e^{j2\pi(p_x x' + p_y y')} dx' dy'$$

Transformée de Fourier de l'ouverture

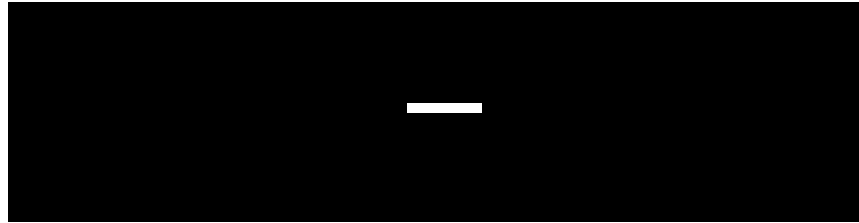
- La transformée de Fourier temps \leftrightarrow fréquence est utilisée en traitement du signal:



Diffraction de Fraunhofer et transformée de Fourier

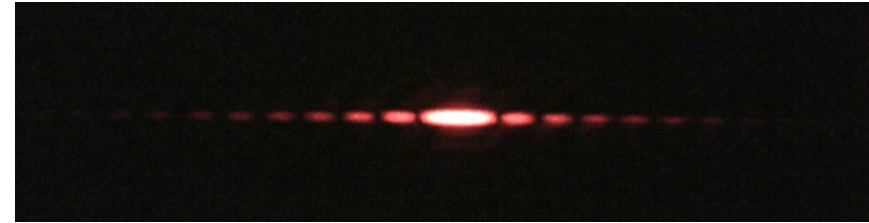
- En optique on a une transformée de Fourier entre l'espace direct et l'espace réciproque des fréquences spatiales

Fente:



Espace direct

Figure de diffraction:



Espace de Fourier

$$U(x, y, R) = \frac{e^{-jkR}}{j\lambda R} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x', y') e^{j2\pi(p_x x' + p_y y')} dx' dy'$$

Transformée de Fourier de l'ouverture

- On introduit les fréquences spatiales:

$$p_x = \frac{x}{\lambda R} = \frac{\sin \theta_x}{\lambda} \simeq \frac{\theta_x}{\lambda}$$
$$p_y = \frac{y}{\lambda R} = \frac{\sin \theta_y}{\lambda} \simeq \frac{\theta_y}{\lambda}.$$

Diffraction de Fraunhofer et transformée de Fourier

- En introduisant la transformée de Fourier

$$U(p_x, p_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x', y') e^{j2\pi(p_x x' + p_y y')} dx' dy' = \mathcal{F} \{U(x', y')\}$$

- L'équation de Fraunhofer s'écrit:

$$U(x, y, R) = \frac{e^{-jkR}}{j\lambda R} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x', y') e^{j2\pi(p_x x' + p_y y')} dx' dy'$$

$$U(x, y, R) = \frac{e^{-jkR}}{j\lambda R} U(p_x, p_y)$$

- Onde sphérique modulée par la transformée de Fourier de l'ouverture
- Cette approche est aussi valable si on a une image plutôt qu'une simple ouverture

Transformée de Fourier et onde plane

$$U(p_x, p_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x', y') e^{j2\pi(p_x x' + p_y y')} dx' dy' = \mathcal{F} \{U(x', y')\}$$

$$p_x = \frac{x}{\lambda R} = \frac{\sin \theta_x}{\lambda} \simeq \frac{\theta_x}{\lambda}$$
$$p_y = \frac{y}{\lambda R} = \frac{\sin \theta_y}{\lambda} \simeq \frac{\theta_y}{\lambda}.$$

- Les termes dans la transformée de Fourier sont comme des ondes planes:

$$e^{\pm jkx} = e^{\pm j \frac{2\pi}{\lambda} x}$$

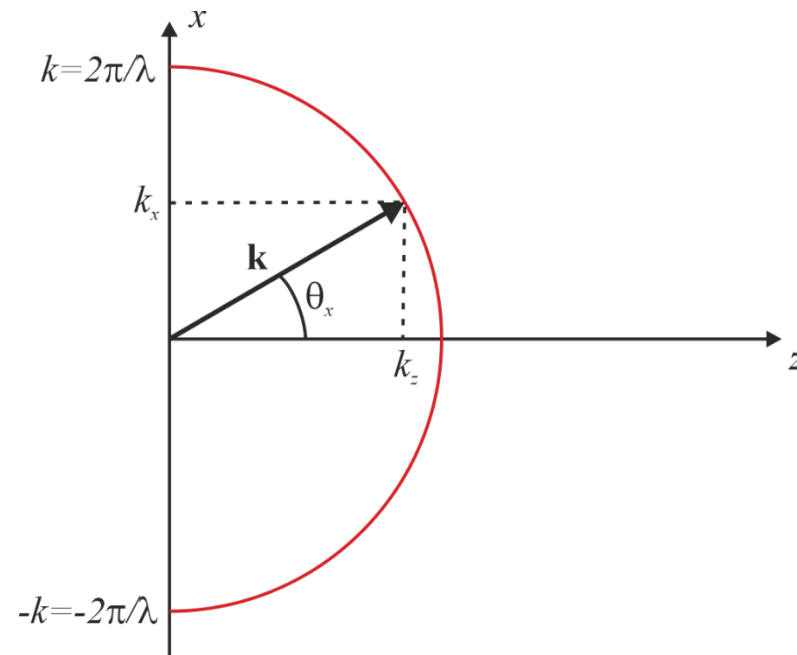
- Pour bien comprendre l'optique de Fourier, il faut saisir quelques subtilités associées à la propagation d'une onde plane!
- Le vecteur d'onde a un module qui dépend de la fréquence

$$\|\mathbf{k}\| = k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c_0} n = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n$$

- Dans ce qui suit, on suppose la fréquence ω fixe (donc le module de k fixe)

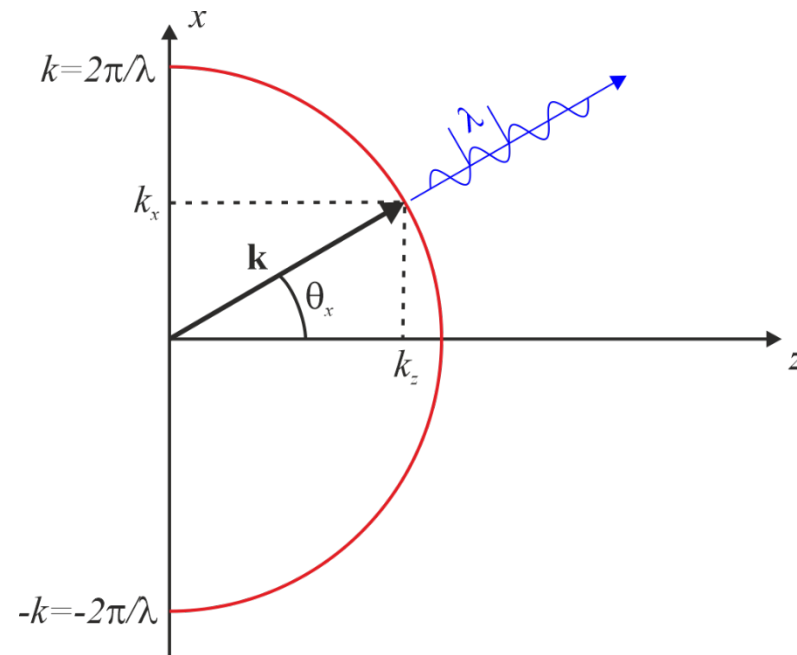
Optique de Fourier

- Si une onde se propage de gauche à droite, l'extrémité de son vecteur d'onde doit se trouver sur un cercle de rayon k
- Le vecteur \mathbf{k} a deux composantes k_z (direction de propagation) et k_x (transverse)



Optique de Fourier

- De plus, une onde qui se propage dans la direction \mathbf{k} est périodique dans cette direction (avec une périodicité λ)



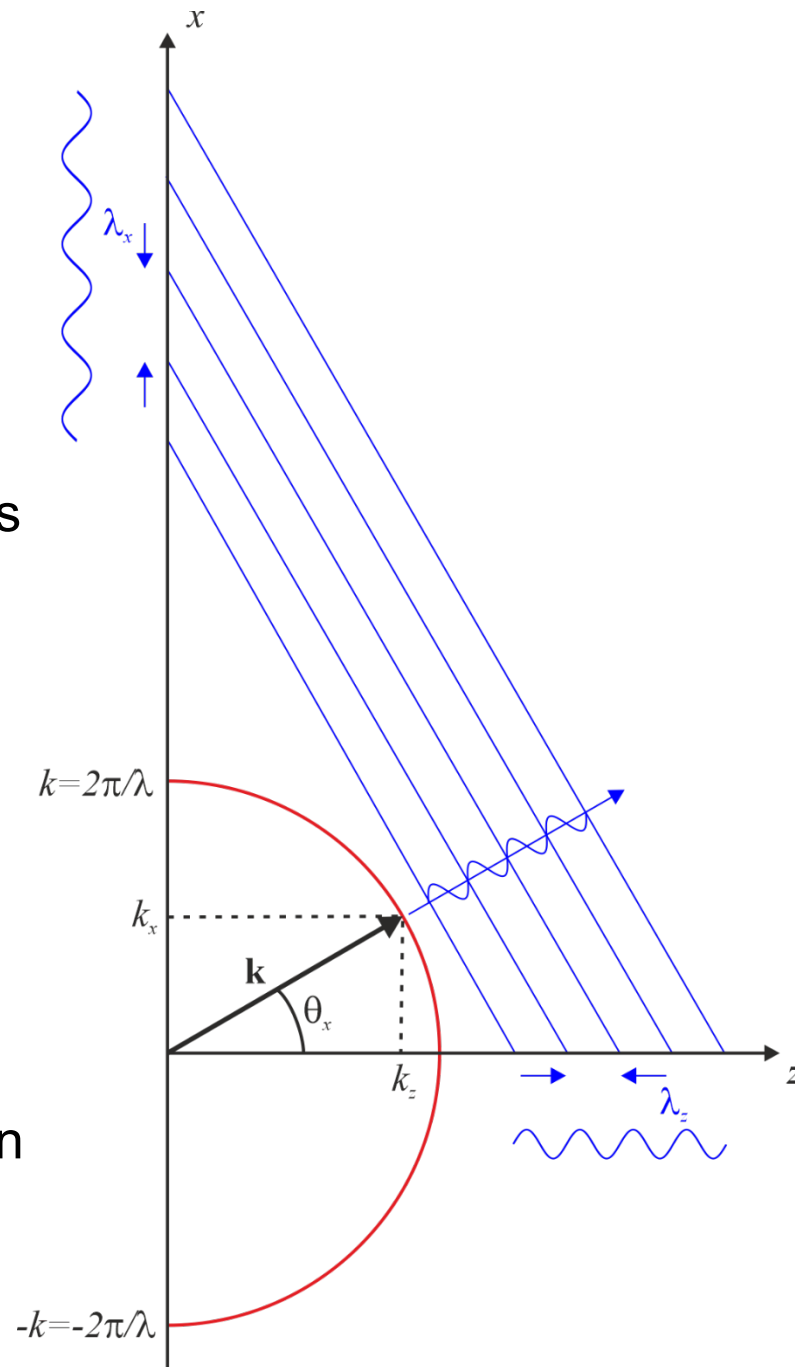
Optique de Fourier

- En prolongeant les fronts d'onde jusqu'aux axes, on note des périodicités λ_z et λ_x le long de chaque direction
- Ces périodicités sont associées aux composantes du vecteur de propagation:

$$k_z = \frac{2\pi}{\lambda_z} \quad k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}$$

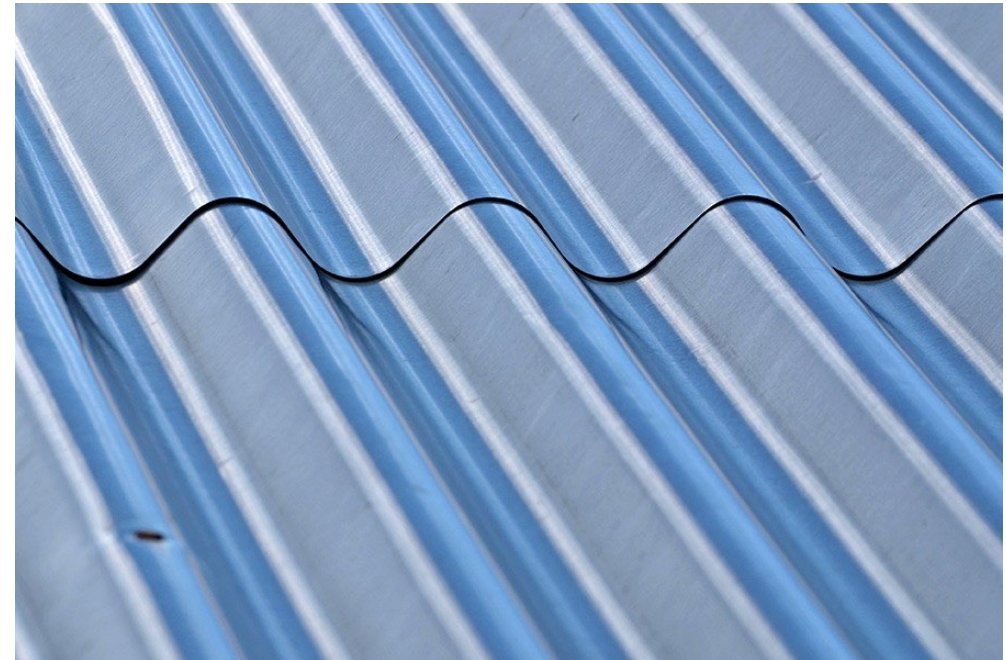
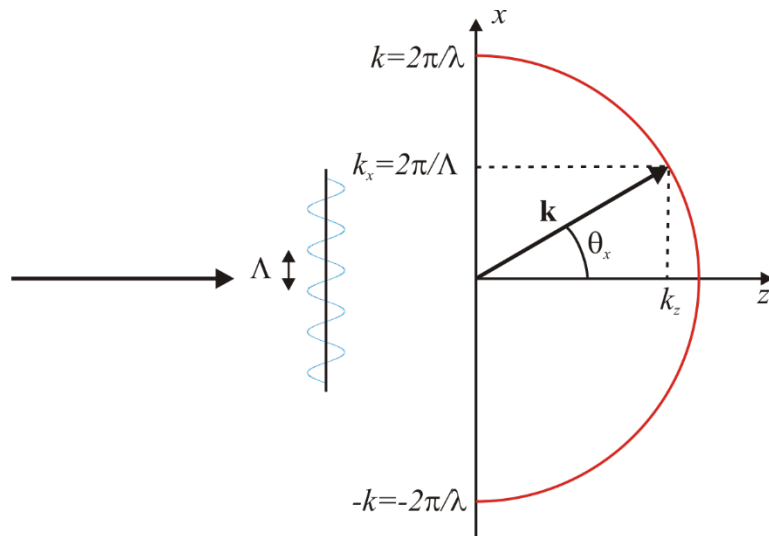
Grande composante $k \rightarrow$
petite période et inversement

- On peut introduire des ondes partielles dans chaque direction



Optique de Fourier

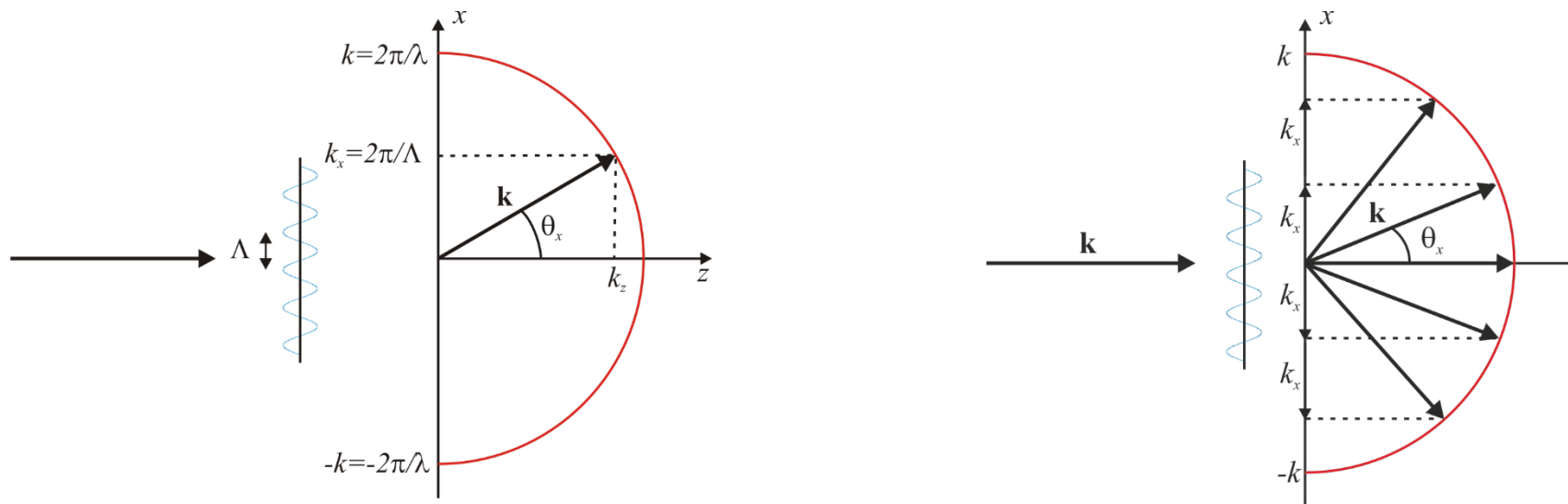
- En résumé, une onde se propageant dans une direction donnée a une composante transverse k_x de son vecteur d'onde, qui correspond à une périodicité transverse λ_x : $k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}$
- Un phénomène similaire se produit lorsqu'une onde arrive sur une surface périodique de période Λ : son vecteur d'onde acquiert une composante transverse k_x qui dépend de la périodicité : $k_x = \frac{2\pi}{\Lambda}$



Great Northern Metal Company

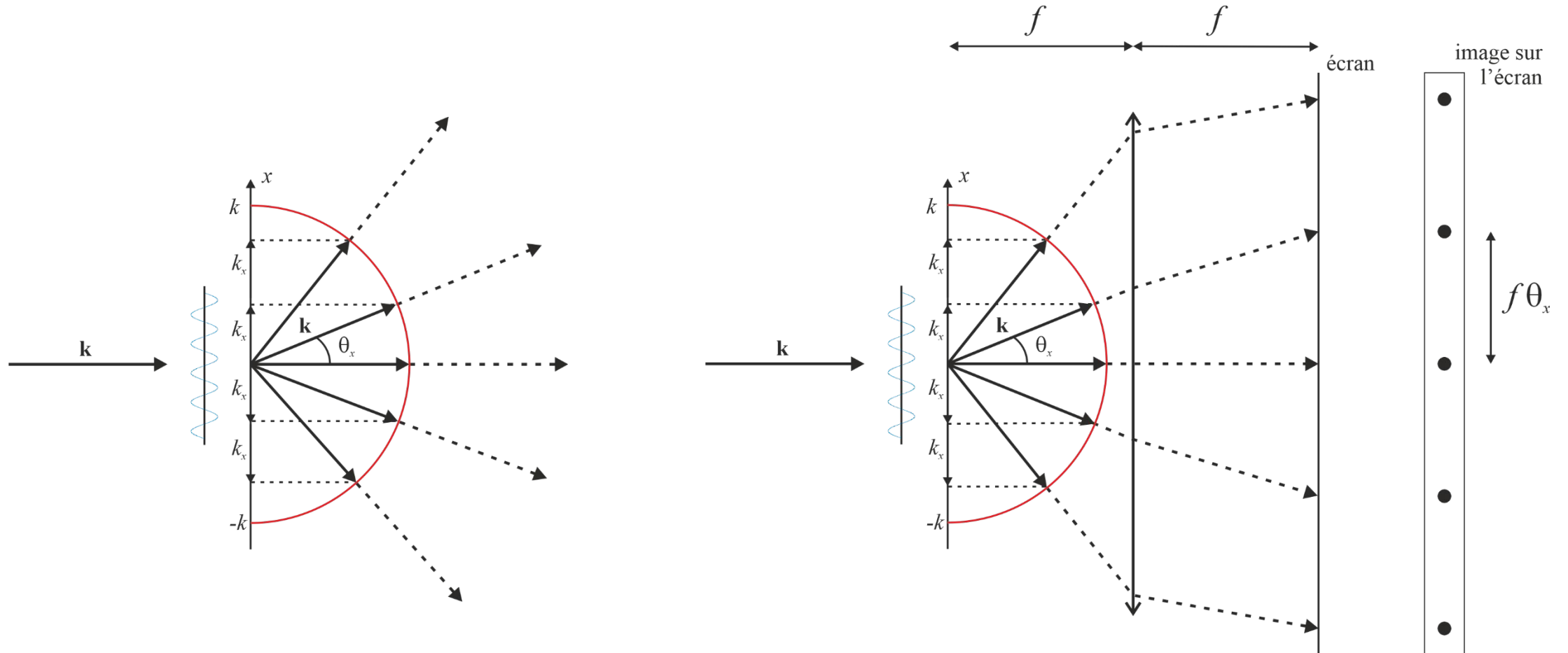
Optique de Fourier

- En résumé, une onde se propageant dans une direction donnée a une composante transverse k_x de son vecteur d'onde, qui correspond à une périodicité transverse λ_x : $k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}$
- Un phénomène similaire se produit lorsqu'une onde arrive sur une surface périodique de période Λ : son vecteur d'onde acquiert une composante transverse k_x qui dépend de la périodicité : $k_x = \frac{2\pi}{\Lambda}$
- En fait, une multitude d'ondes diffractées sont ainsi créées, avec chacune un multiple de k_x comme composante transverse du vecteur de propagation \mathbf{k} (qui reste sur le cercle!)



Optique de Fourier

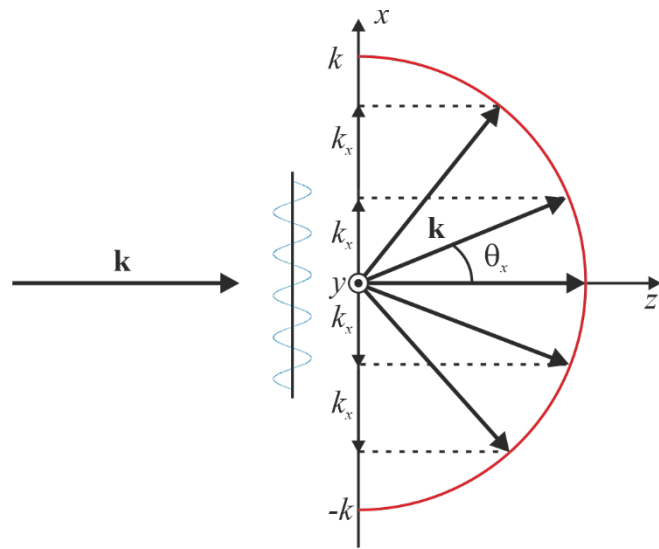
- Toutes ces ondes divergent...
- Une lentille permet de les aligner dans un plan
- On obtient sur l'écran des points qui correspondent à la périodicité de la surface



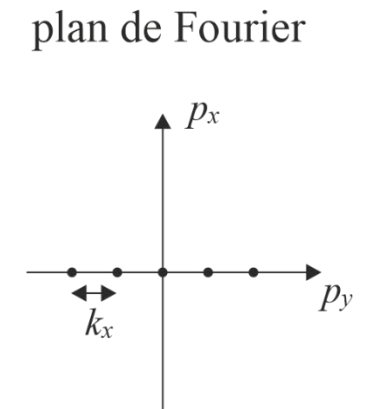
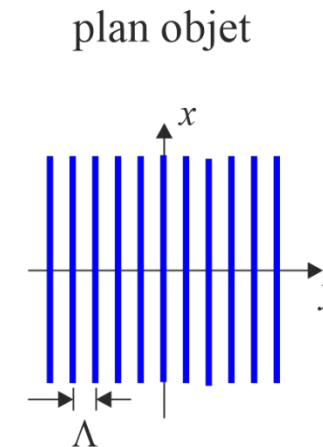
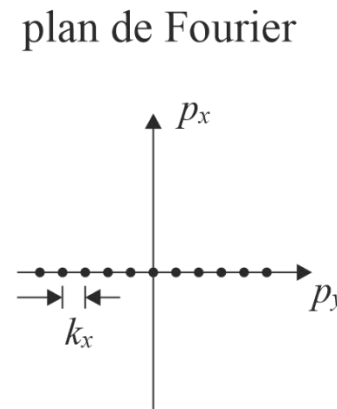
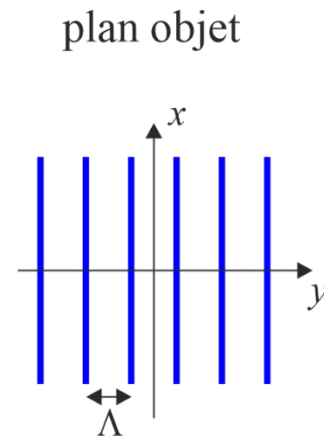
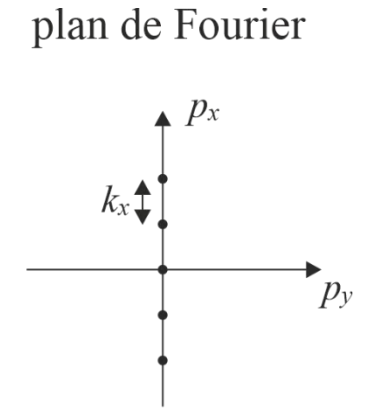
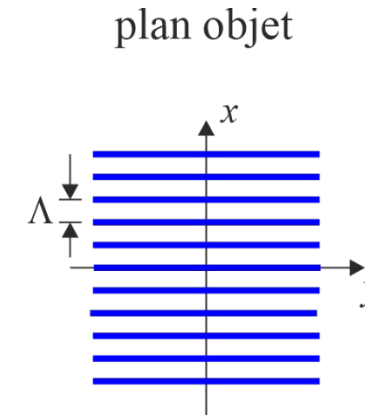
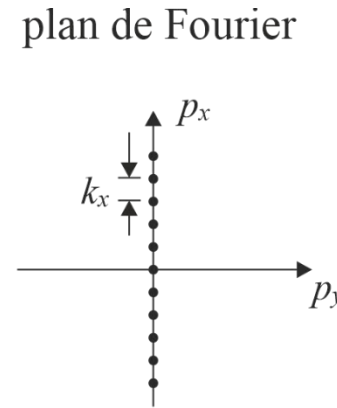
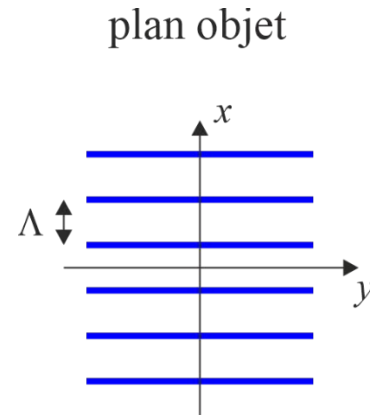
Transformée de Fourier avec une lentille, système $4f$

- Exemples d'images dans le plan de Fourier

- Vue de côté:



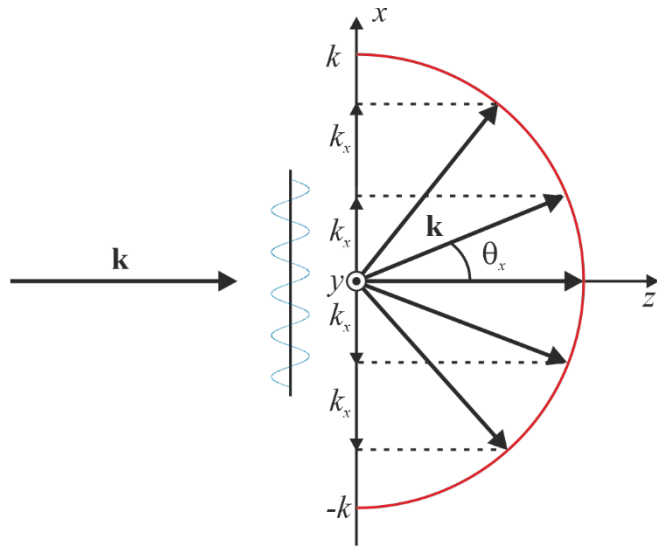
- Vue de derrière:



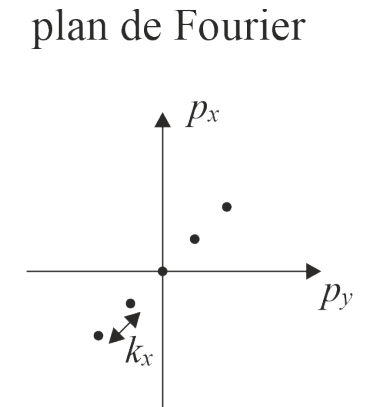
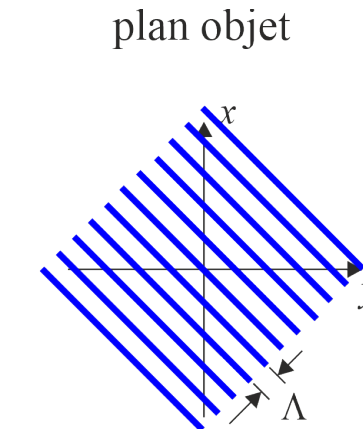
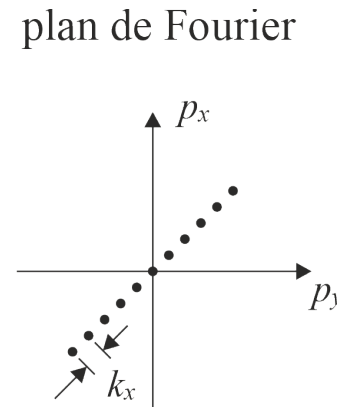
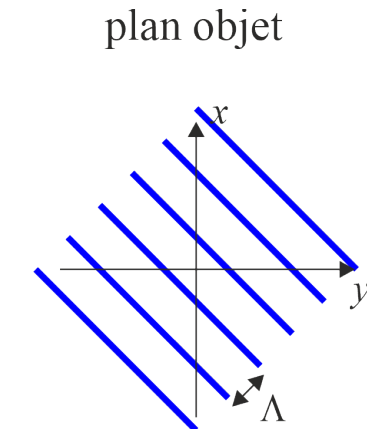
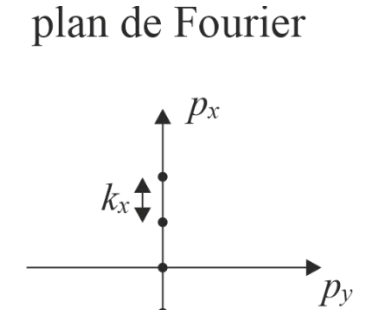
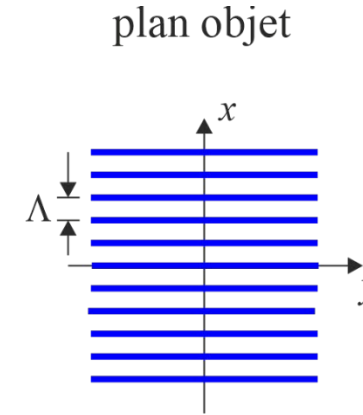
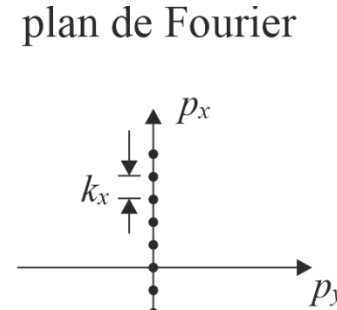
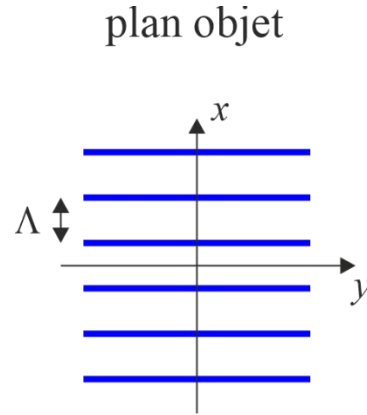
Transformée de Fourier avec une lentille, système $4f$

- Exemples d'images dans le plan de Fourier

- Vue de côté:

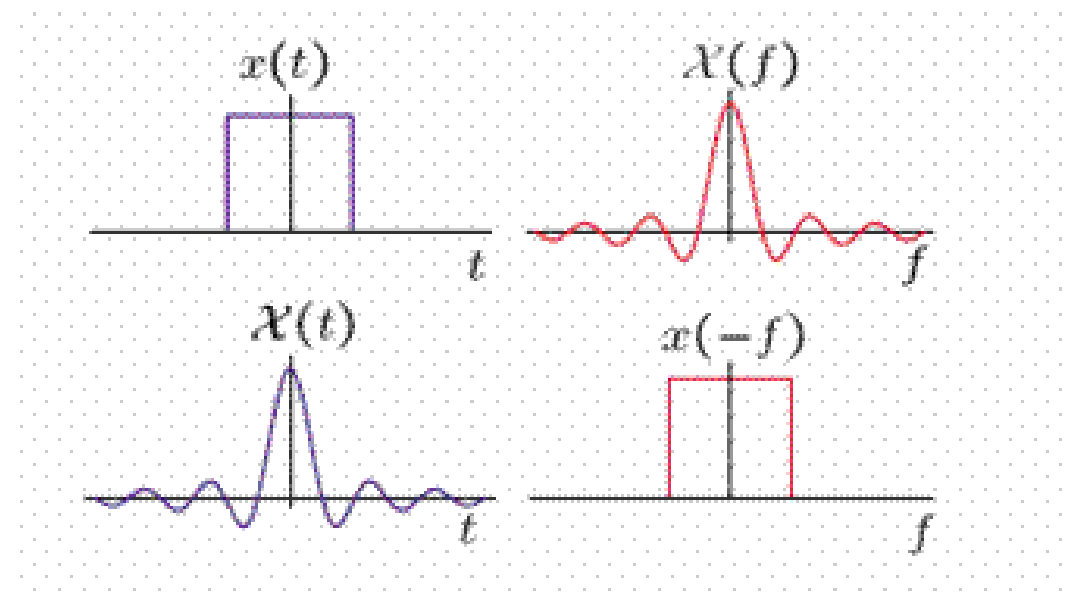
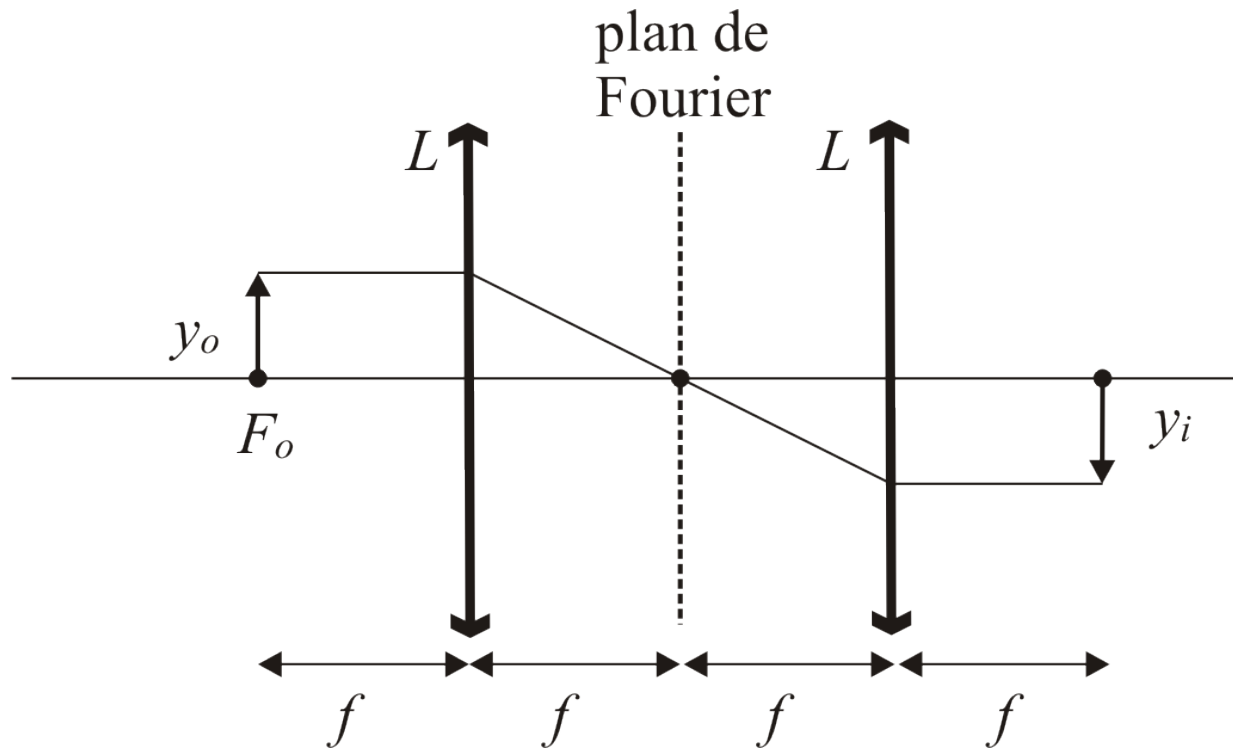


- Vue de derrière:

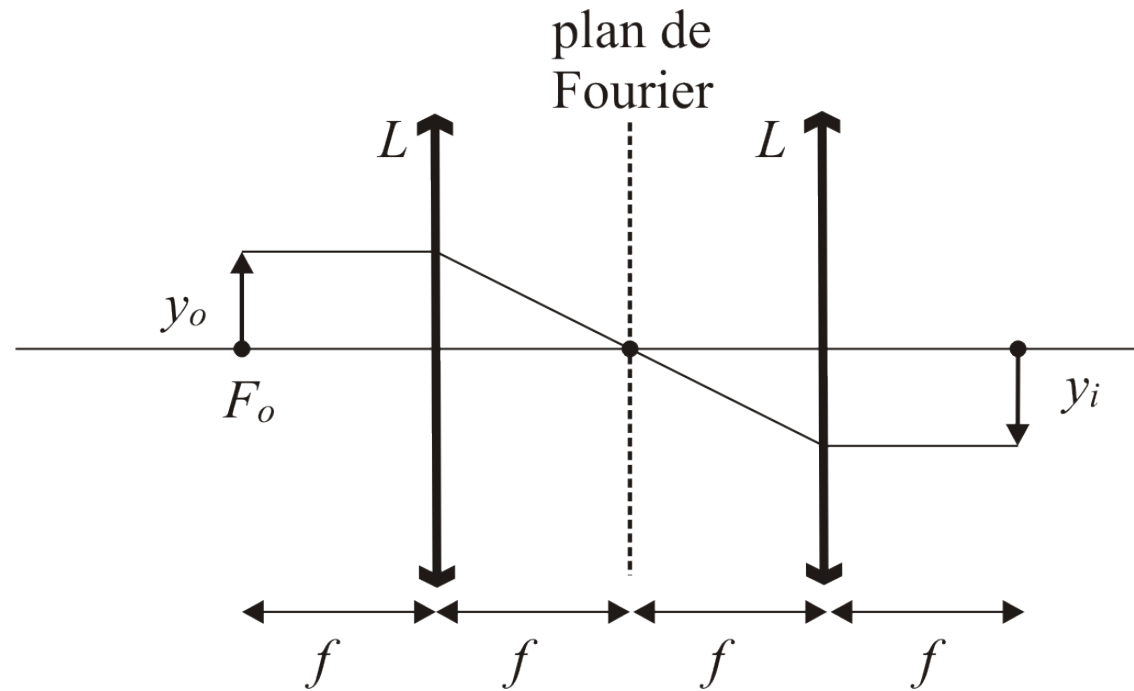


Transformée de Fourier avec une lentille, système $4f$

- Une lentille fait la transformée de Fourier d'une image, elle permet de visualiser les fréquences spatiales de l'image
- En faisant deux transformées de Fourier successives, on obtient l'objet initial (au signe près...)



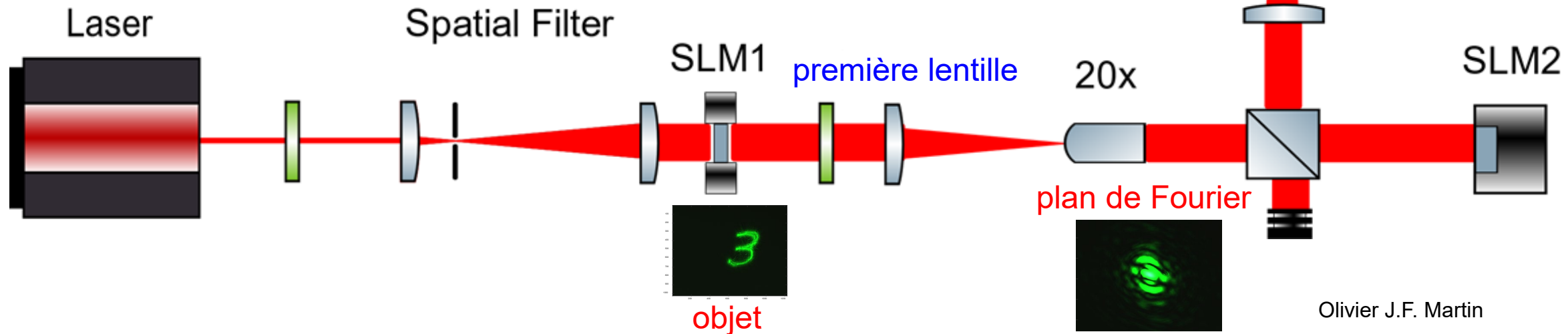
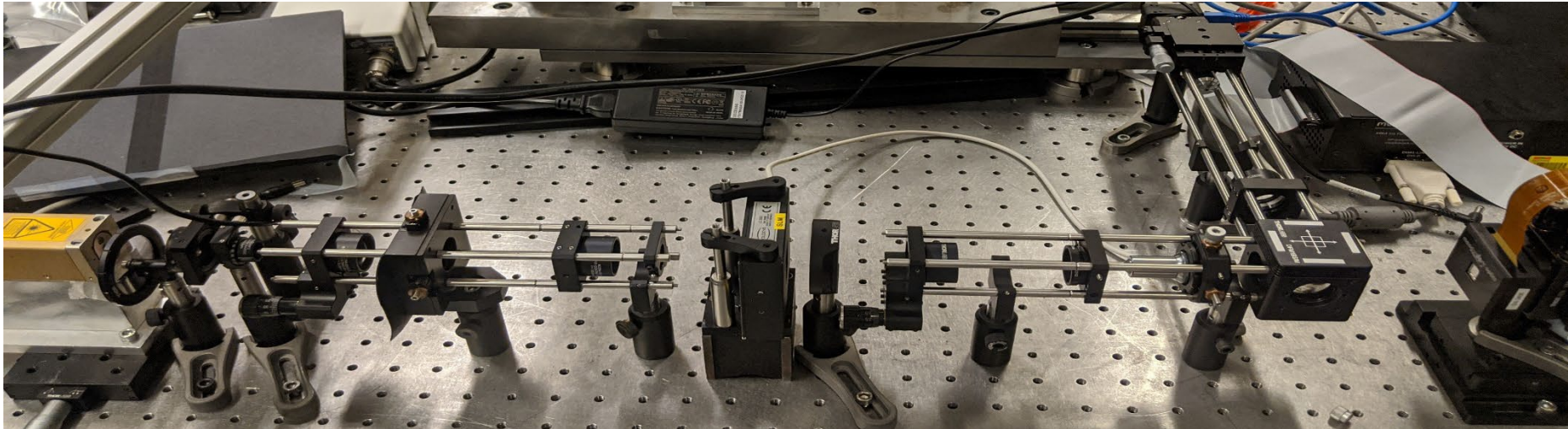
Transformée de Fourier avec une lentille, système $4f$



- Dans un système $4f$ toutes les distances correspondent à la longueur focale f
- Ce système permet d'accéder au plan de Fourier de l'objet
- On peut y effectuer du filtrage, en enlevant des composantes particulières du spectre

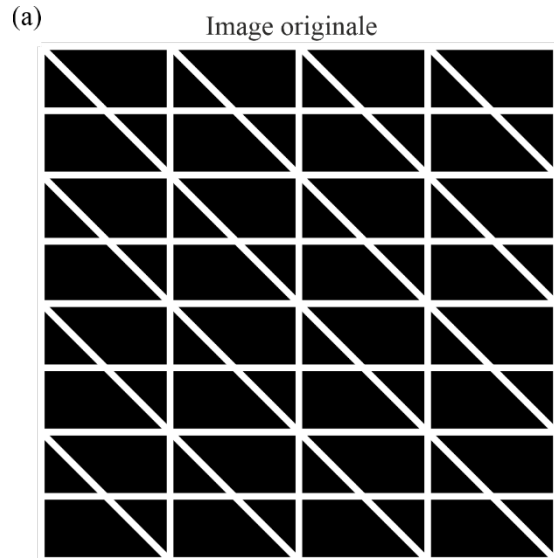
Transformée de Fourier avec une lentille, système $4f$

- Dans la pratique, l'arrangement est rarement rectiligne
- Une lentille supplémentaire permet d'accéder directement au plan de Fourier

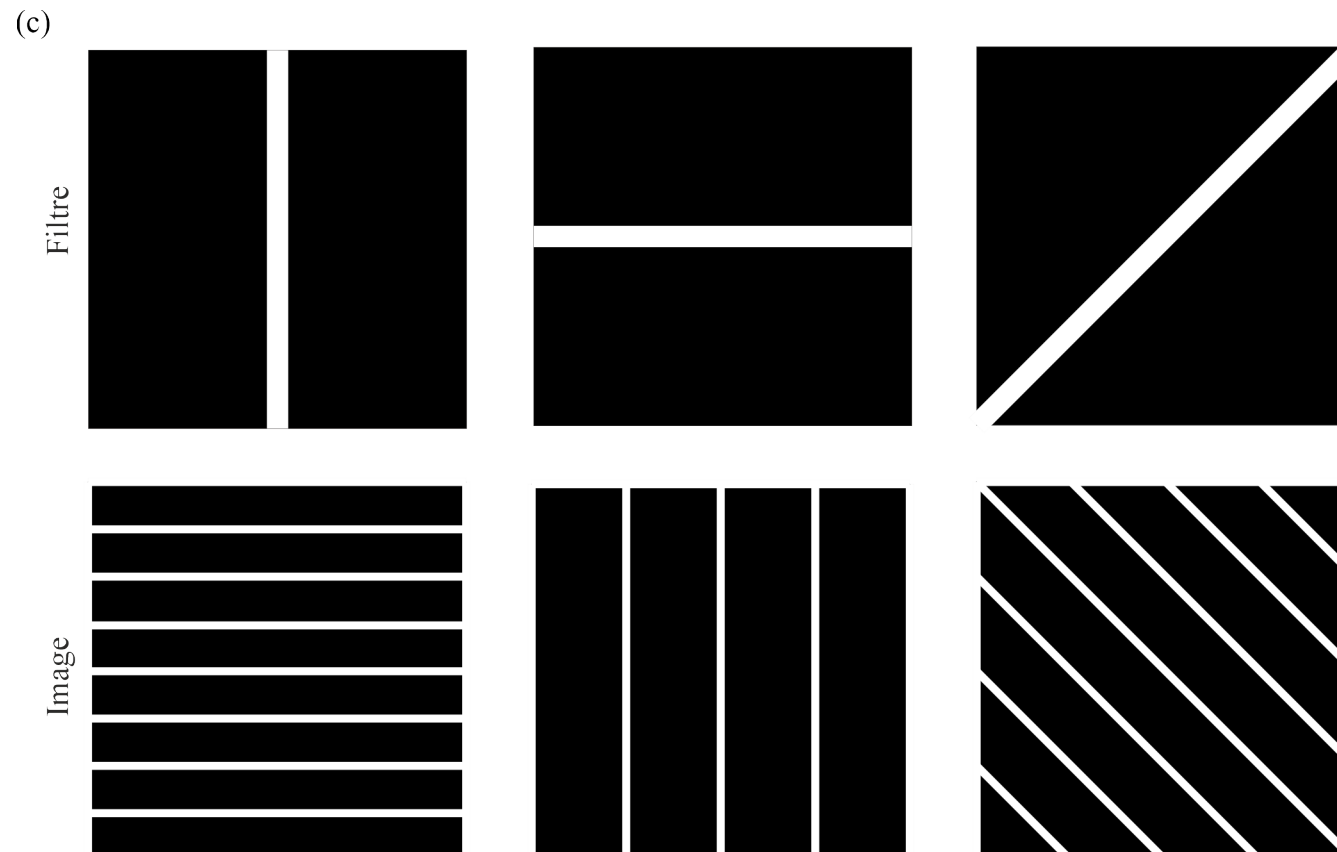
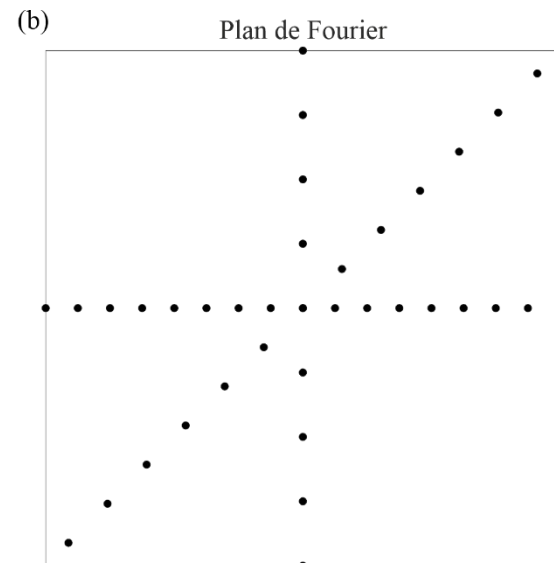


Filtrage dans le plan de Fourier avec un système $4f$

- Pour une image périodique, l'image dans le plan de Fourier est aussi périodique



- Rapport des distances inverse entre image et plan de Fourier
- Des filtres qui ne laissent passer qu'une partie du plan de Fourier permettent de ne voir que la partie correspondante de l'image

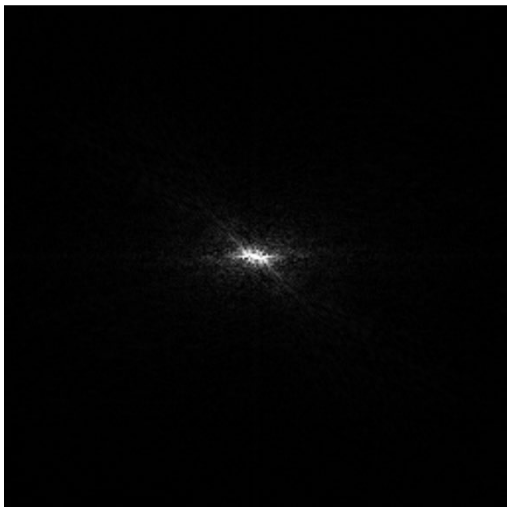


Filtrage dans le plan de Fourier avec un système $4f$

(a) Image originale

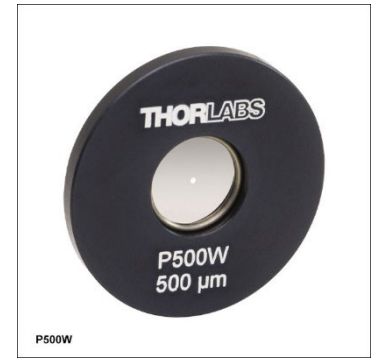
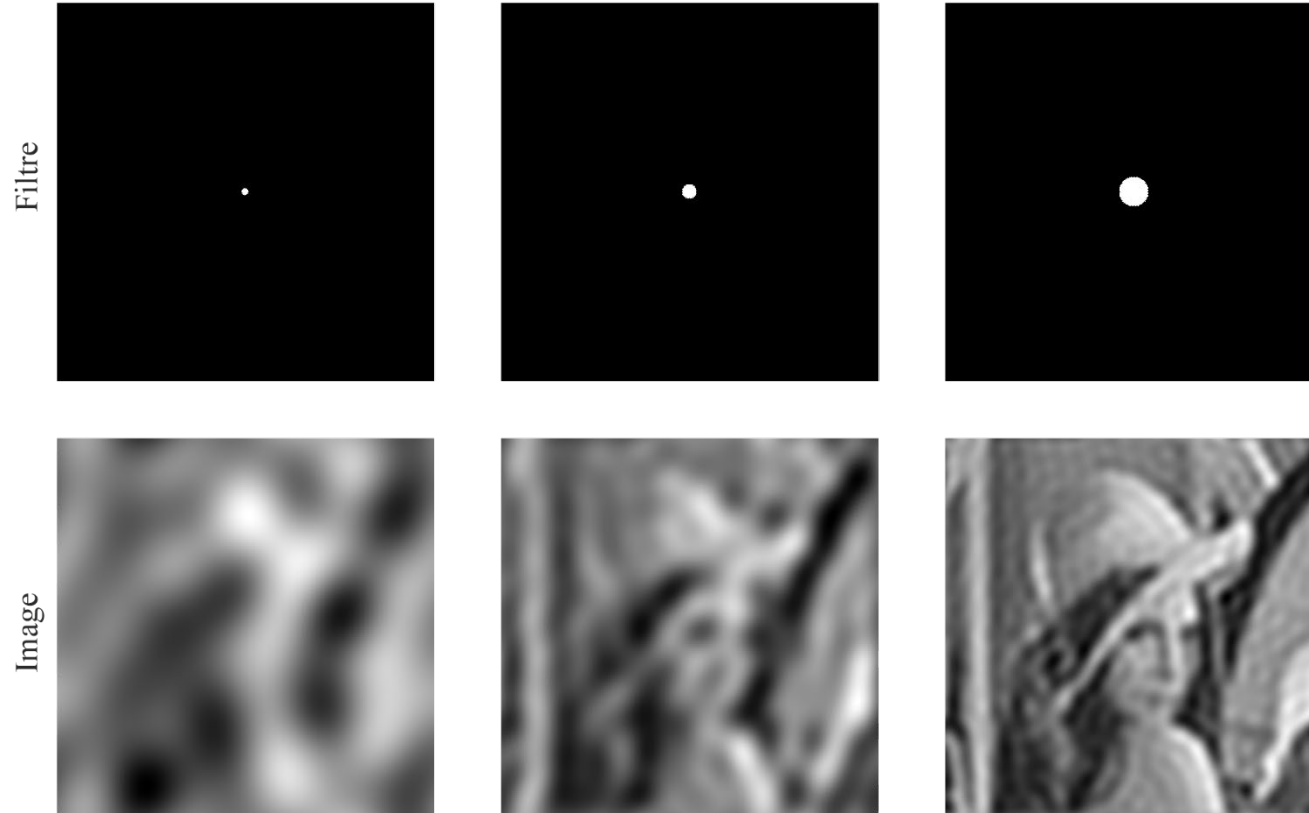


(b) Plan de Fourier



- Différentes ouvertures dans le plan de Fourier:

(c)



Filtrage dans le plan de Fourier avec un système $4f$

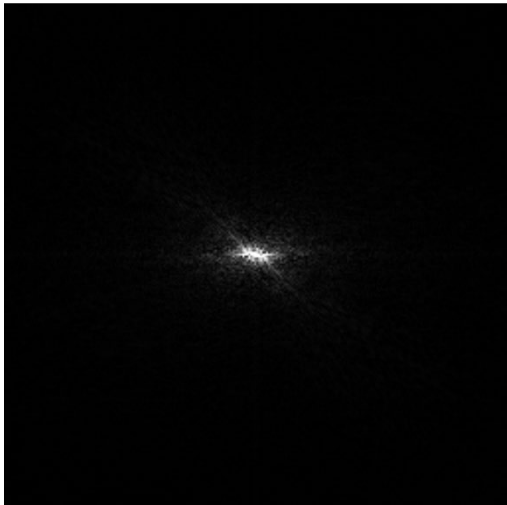
(a)

Image originale

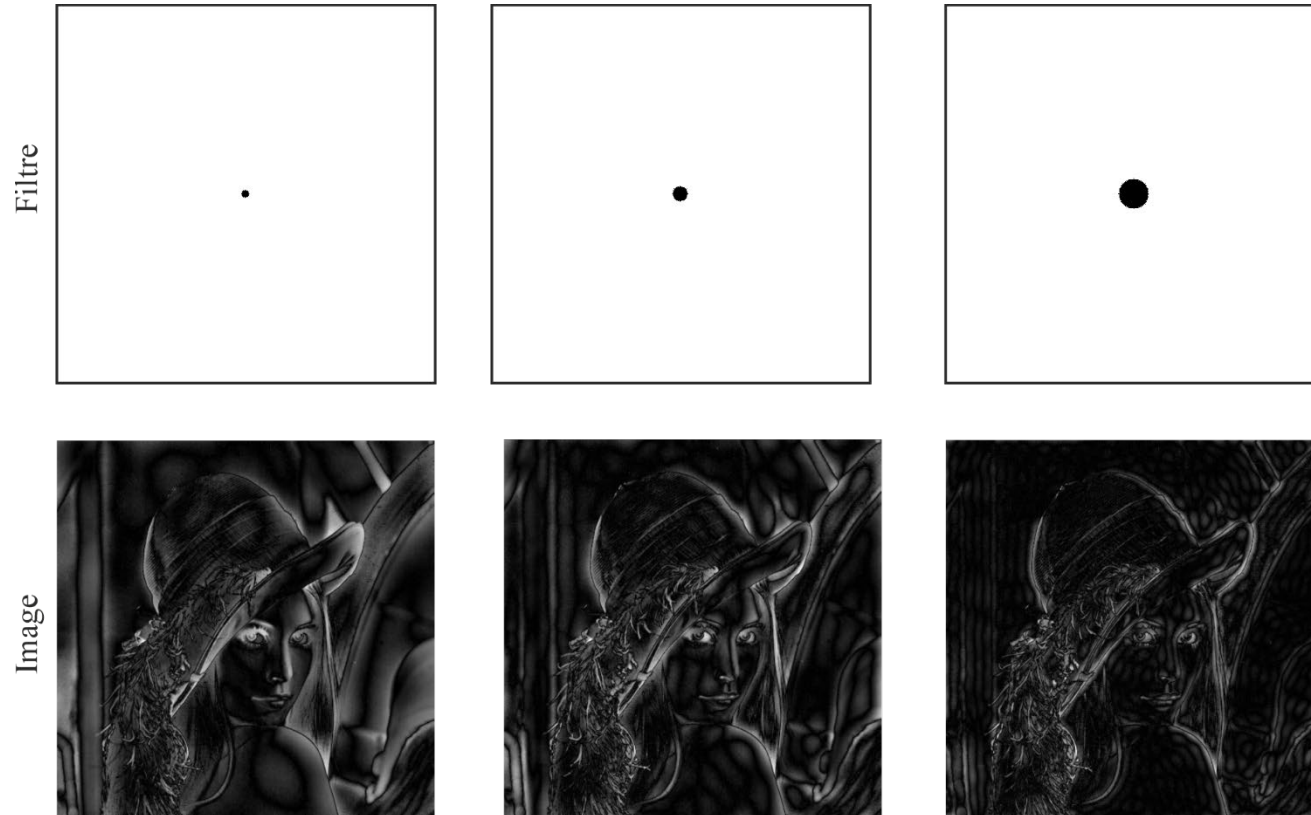


(b)

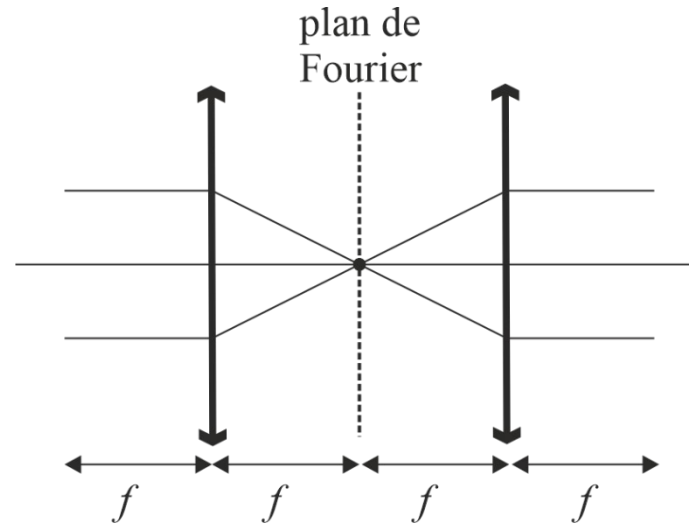
Plan de Fourier



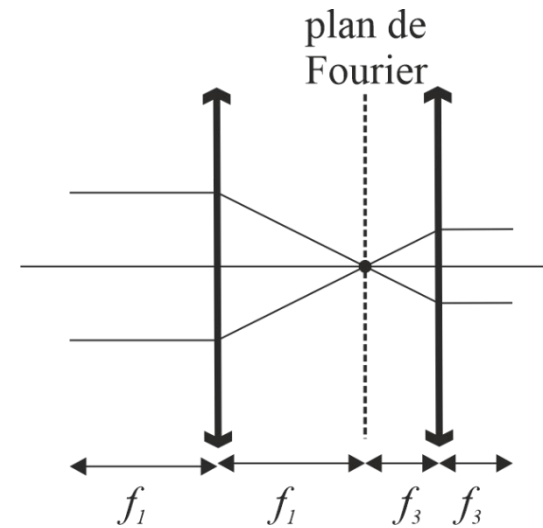
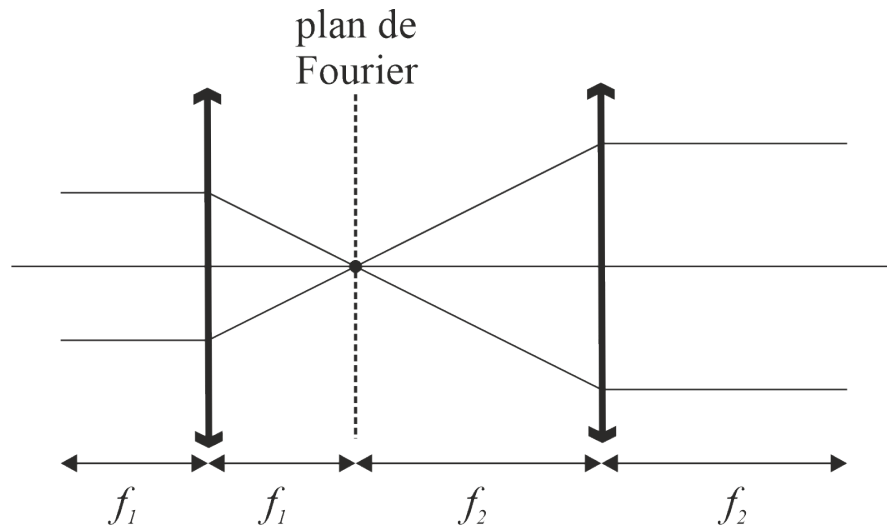
- Différents obstacles au centre du plan de Fourier:



Un système $4f$ permet aussi d'agrandir ou de réduire une image

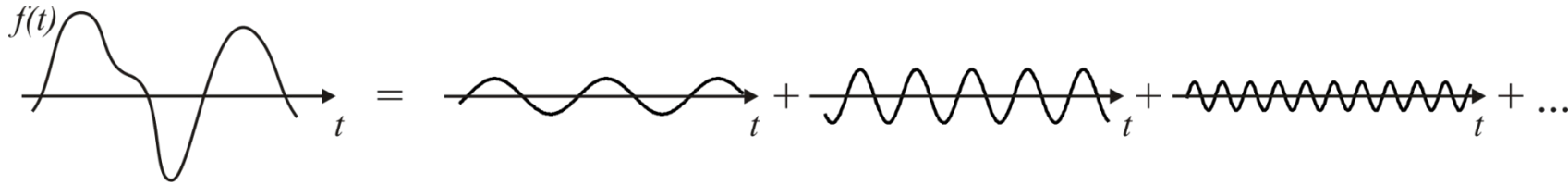


- Différentes paires de longueurs focales f modifient la taille de l'image

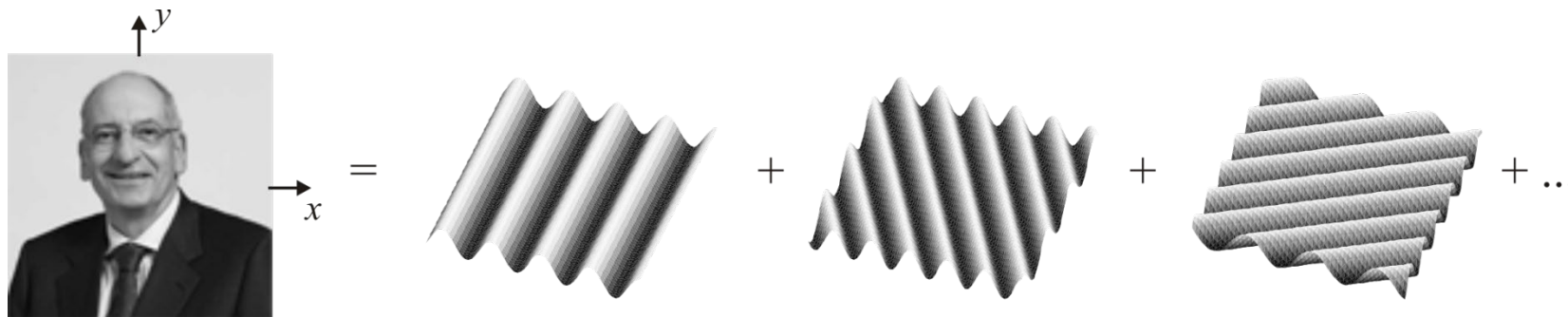


En résumé

- En traitement du signal un signal quelconque peut être décomposé en une somme de signaux périodiques de différentes fréquences:



- En optique, une image quelconque peut être décomposée en une superposition d'ondes planes
- Chaque onde plane est caractérisée par sa fréquence spatiale transverse:



- Ces différentes ondes planes représentent la transformée de Fourier de l'image

Ingénierie optique

Semaine 6 – partie 2

Olivier J.F. Martin
Laboratoire de Nanophotonique et Métrologie

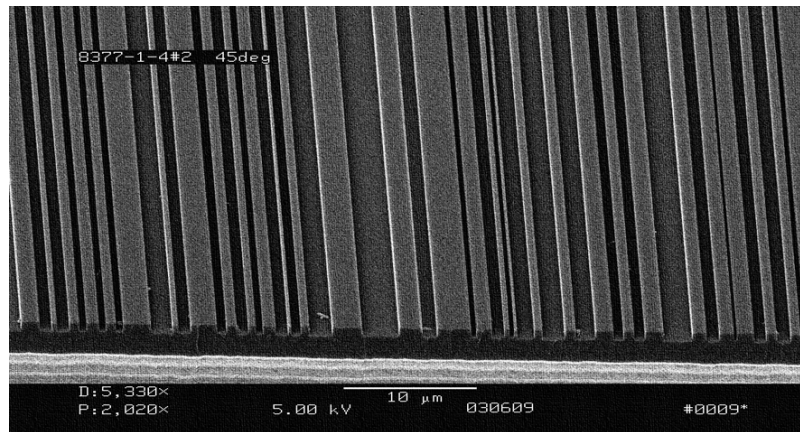


Elements diffractifs

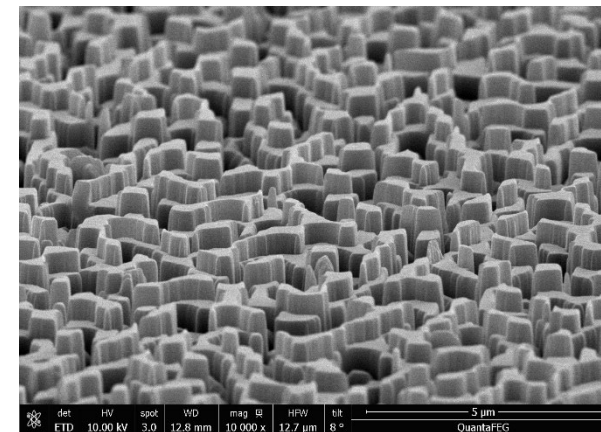
- Le champ diffracté correspond à la transformée de Fourier de l'ouverture/objet

$$U(p_x, p_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x', y') e^{j2\pi(p_x x' + p_y y')} dx' dy' = \mathcal{F} \{U(x', y')\}$$

- On peut donc créer des surfaces qui produisent une illumination spécifique en leur donnant le profil de la transformée inverse de l'image souhaitée

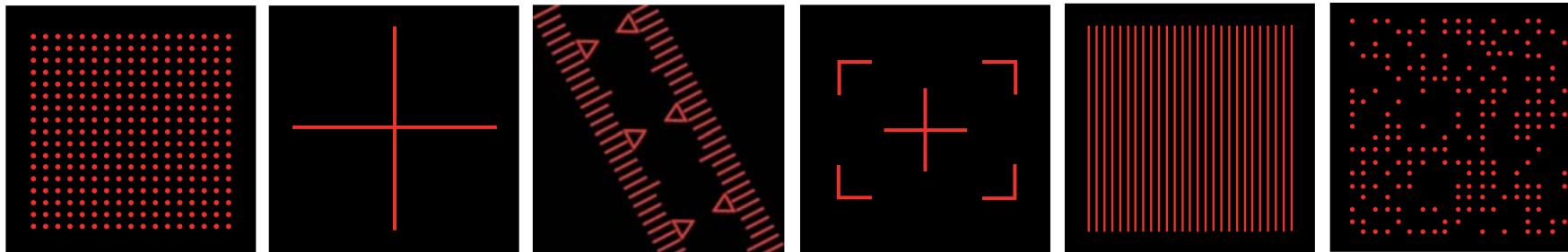


Holographix



Opton

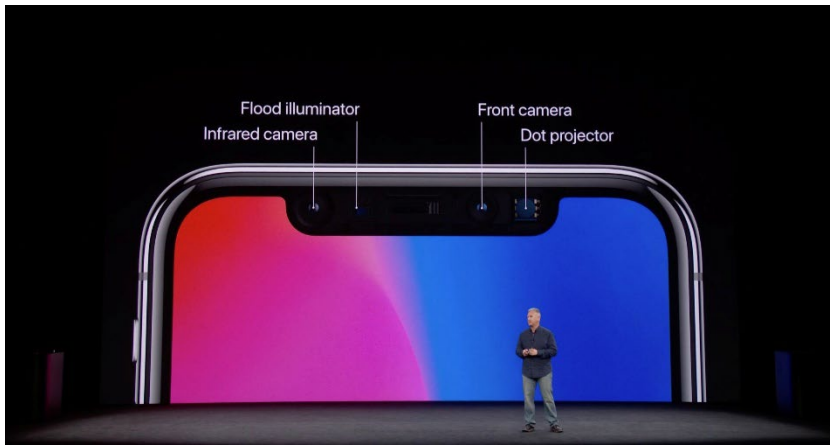
Hololeye



TrueDepth camera (Apple phones)

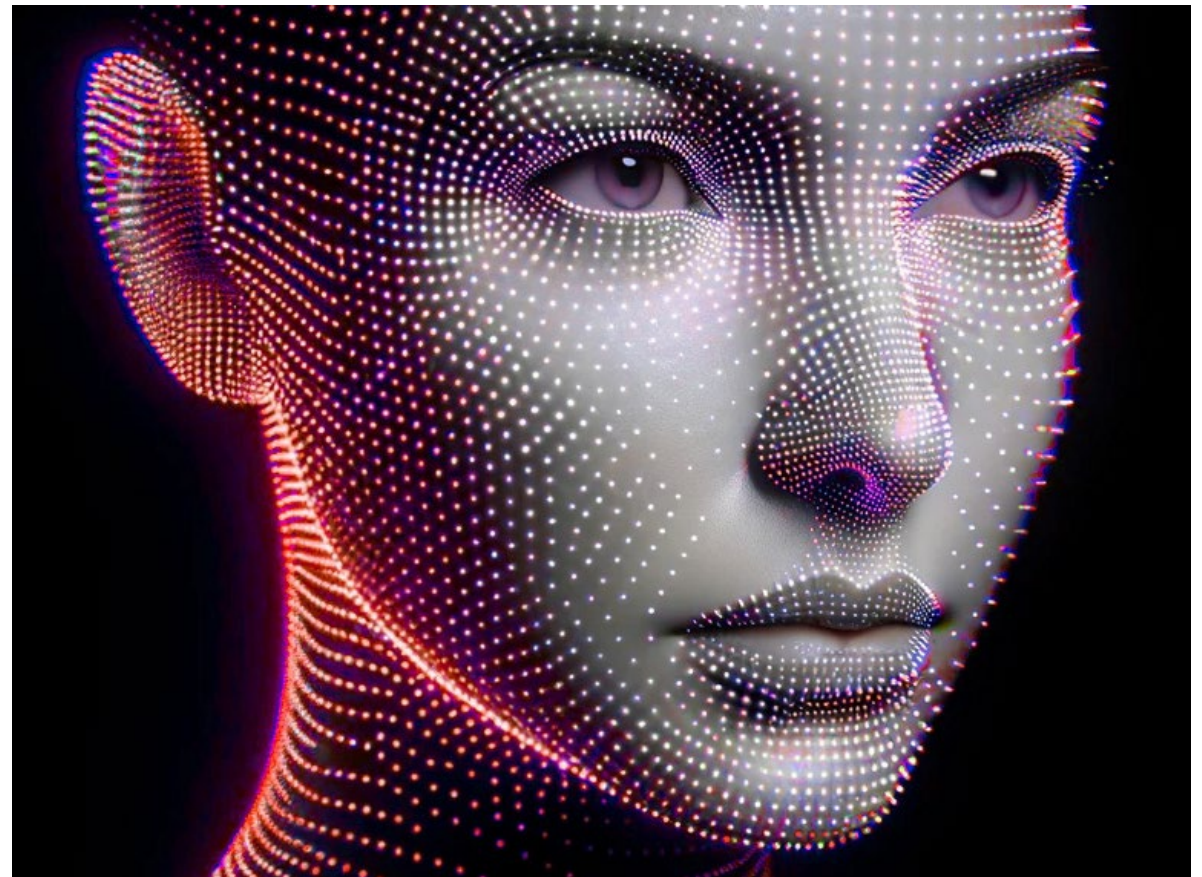
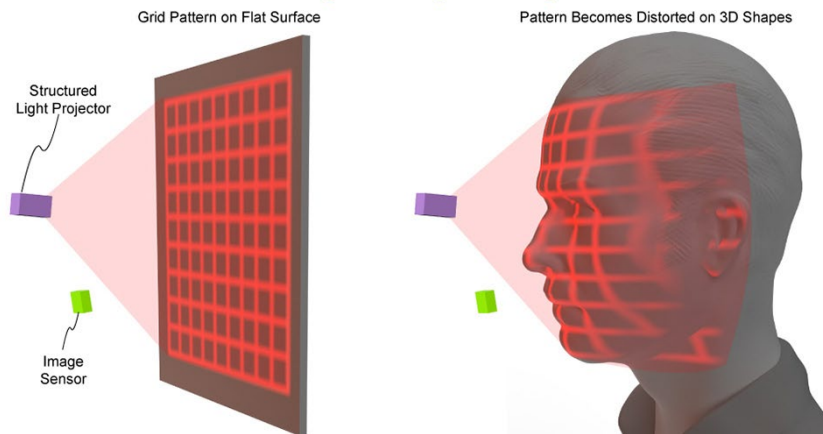
- Un élément diffractif projette dans l'infrarouge ($\lambda=800\dots1'300$ nm) un grille de points régulièrement espacés
- La topographie du visage déforme cette grille qui est enregistrée par une caméra

Apple



Triangulation Depth Sensing

Coherent



Coherent

Ingénierie optique

Semaine 6 – partie 3

Olivier J.F. Martin
Laboratoire de Nanophotonique et Métrologie



Onde évanescente causée par une grande composante du vecteur d'onde

- On considère $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = (k_x, 0, k_z)$

- Or, on doit satisfaire l'équation d'Helmholtz $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

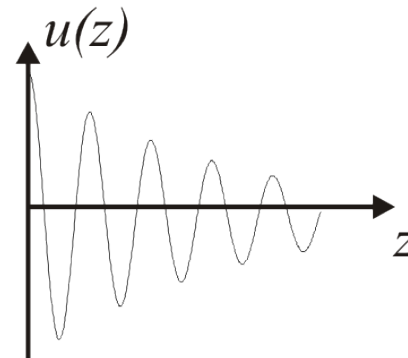
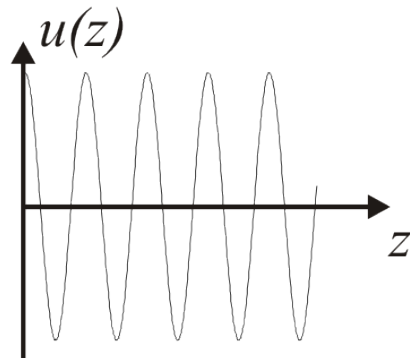
$$k_z = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2}$$

- Lorsque $k_x^2 \leq \frac{\omega^2}{c^2}$, k_z est réel et l'onde se propage

dans la direction z

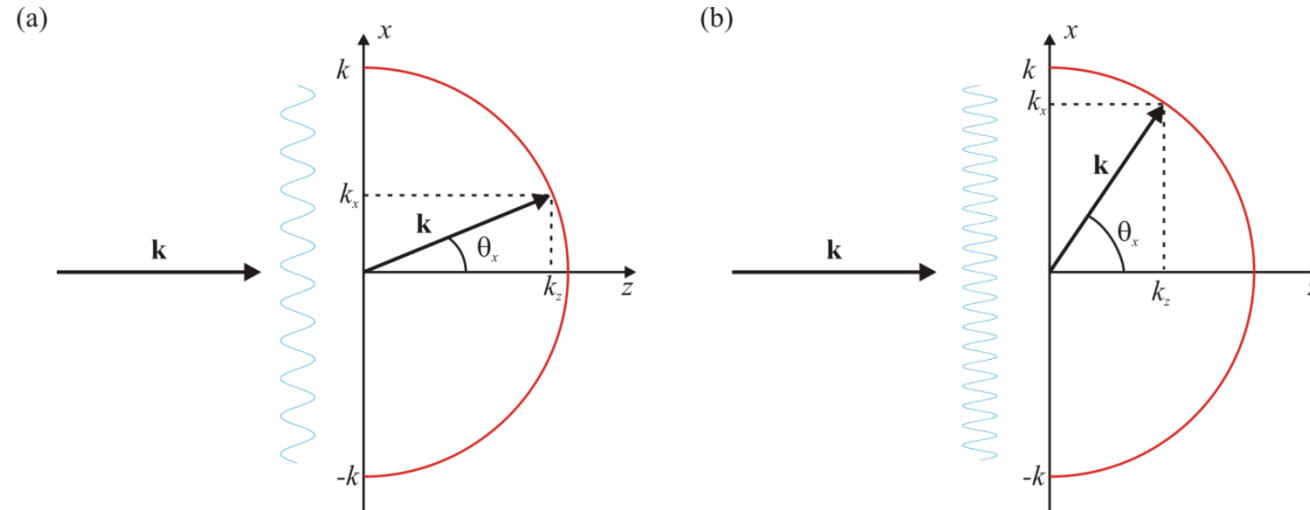
- Lorsque $k_x^2 > \frac{\omega^2}{c^2}$, k_z est imaginaire et l'onde est

évanescence dans la direction z

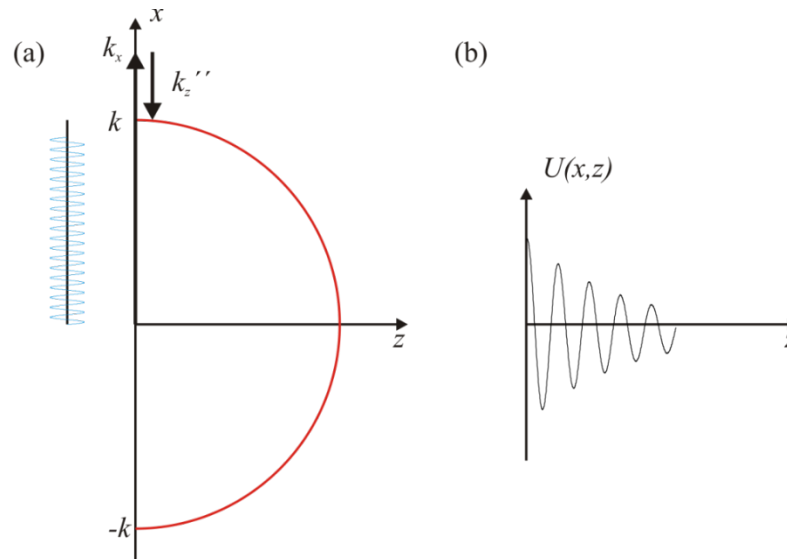


Surface avec un profil particulièrement séré

- Plus la période spatiale est importante, plus l'onde est déviée...

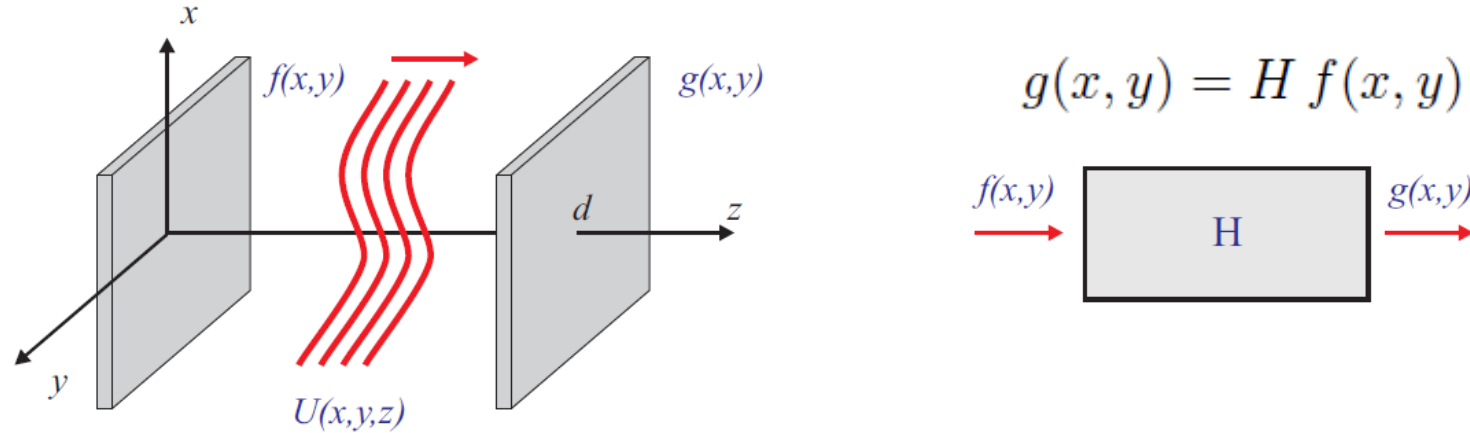


- ... lorsque le profil est trop rapide, il arrive un moment où "on sort du cercle" et l'onde devient évanescente:



Perte de résolution avec la distance

- La propagation d'une onde dans l'espace libre peut se concevoir comme une fonction de transfert H :



$$H(\nu_x, \nu_y) = \exp \left[-j2\pi d \sqrt{\lambda^{-2} - \nu_x^2 - \nu_y^2} \right]$$

$$2\pi d \sqrt{\lambda^{-2} - \nu_x^2 - \nu_y^2} = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sqrt{1 - \theta^2} \simeq 2\pi \frac{d}{\lambda} \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{8} - \dots \right)$$

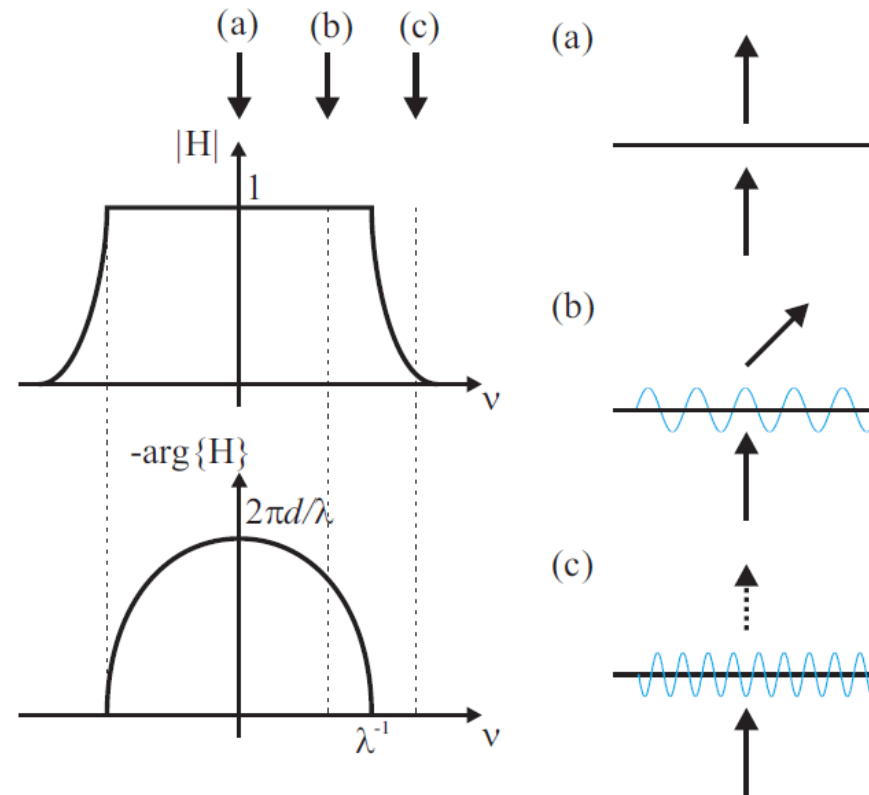
$$H(\nu_x, \nu_y) \simeq \exp(-jkd) \exp \left[j\pi \lambda d (\nu_x^2 + \nu_y^2) \right] = H_0 \exp \left[j\pi \lambda d (\nu_x^2 + \nu_y^2) \right]$$

Perte de résolution avec la distance

- Fonction de transfert H de l'espace libre:

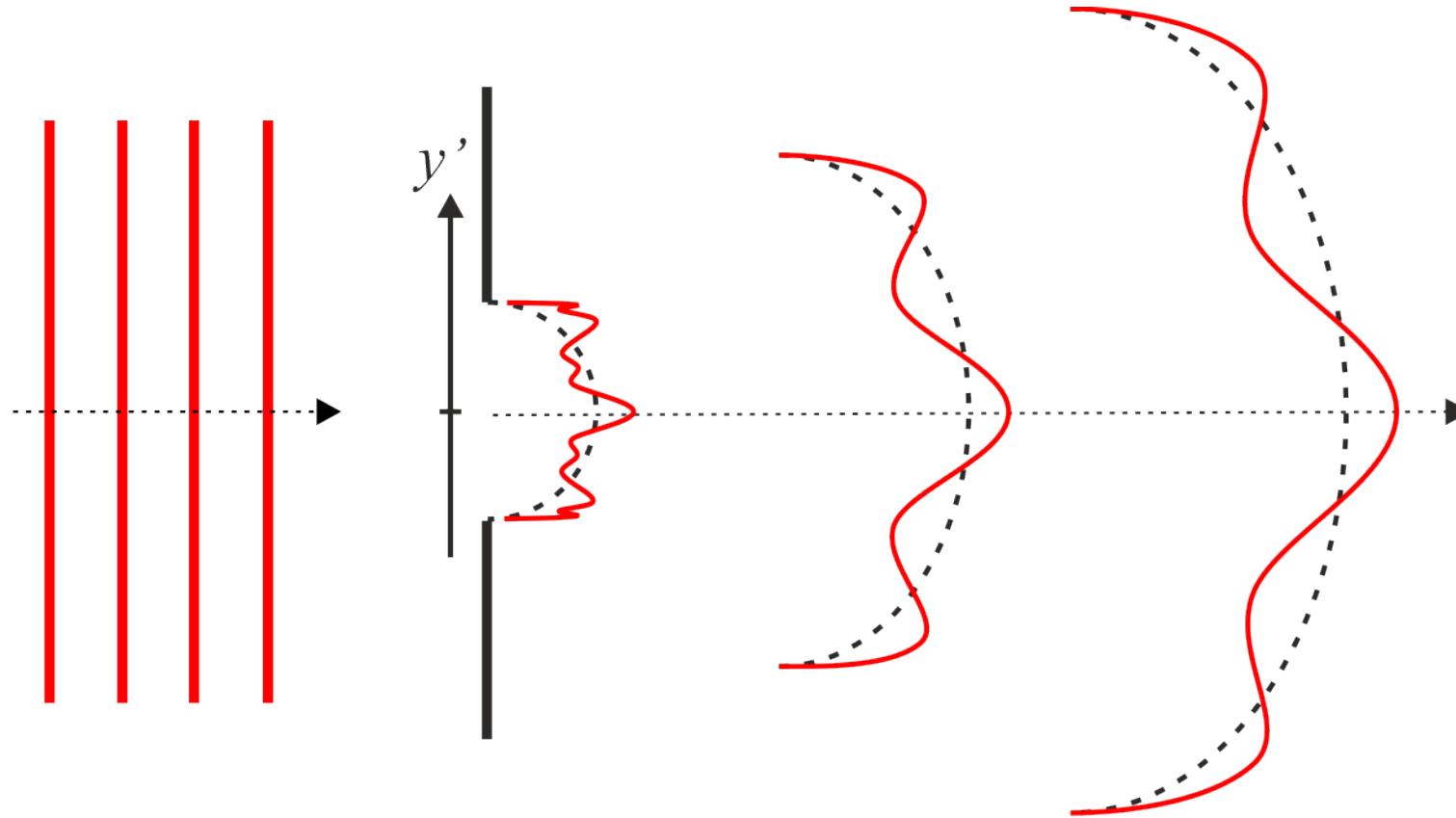
$$H(\nu_x, \nu_y) \simeq \exp(-jkd) \exp [j\pi \lambda d(\nu_x^2 + \nu_y^2)] = H_0 \exp [j\pi \lambda d(\nu_x^2 + \nu_y^2)]$$

- Les fréquences spatiales trop élevées ne se propagent pas (l'espace libre se comporte comme un filtre passe bas dont le seuil dépend de la longueur d'onde):



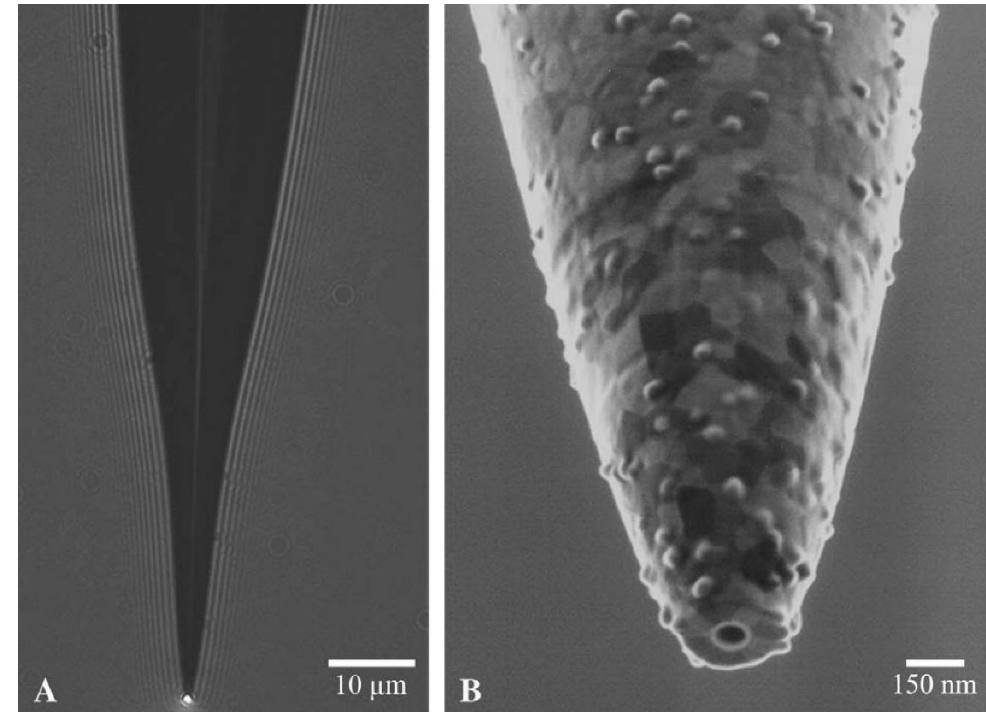
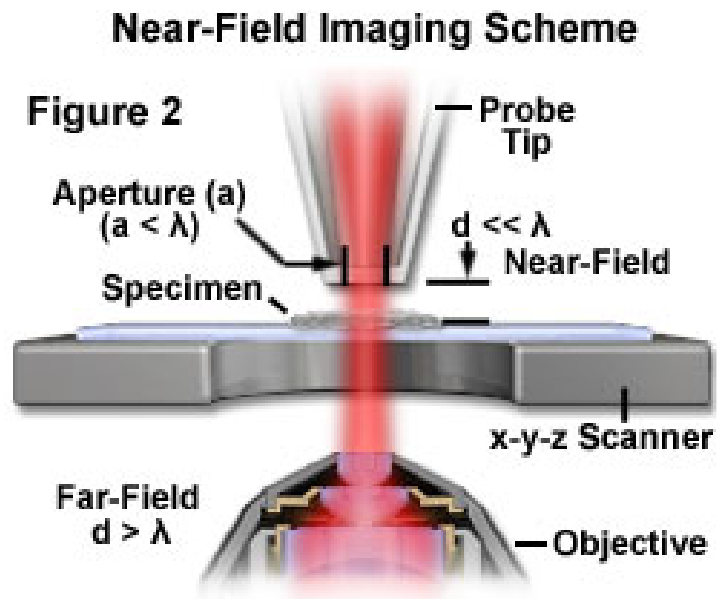
Perte de résolution avec la distance

- Les fréquences spatiales élevées associées avec l'objet disparaissent durant la propagation (dès que la distance de propagation dépasse $1-2 \lambda$):



Comment retrouver les hautes fréquences spatiales?

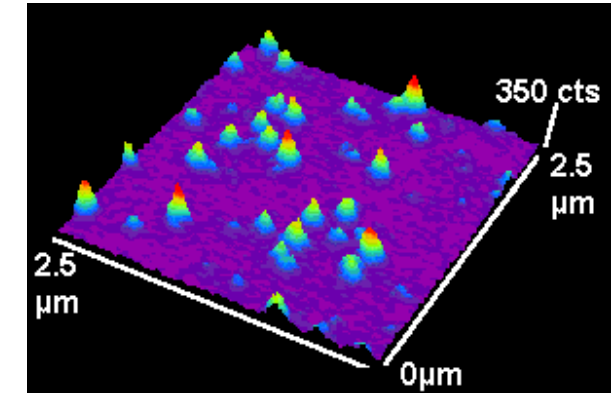
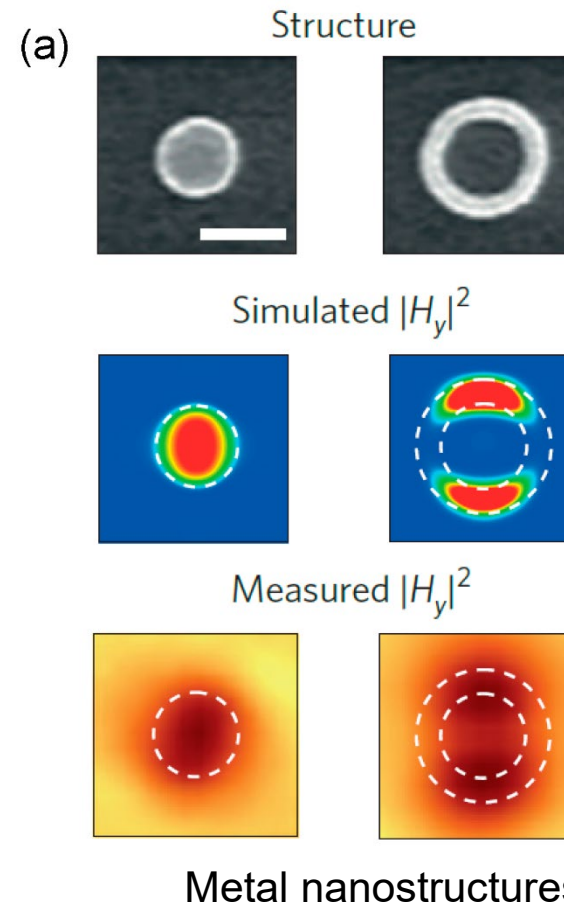
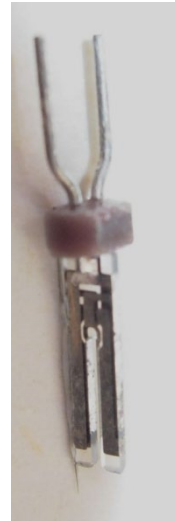
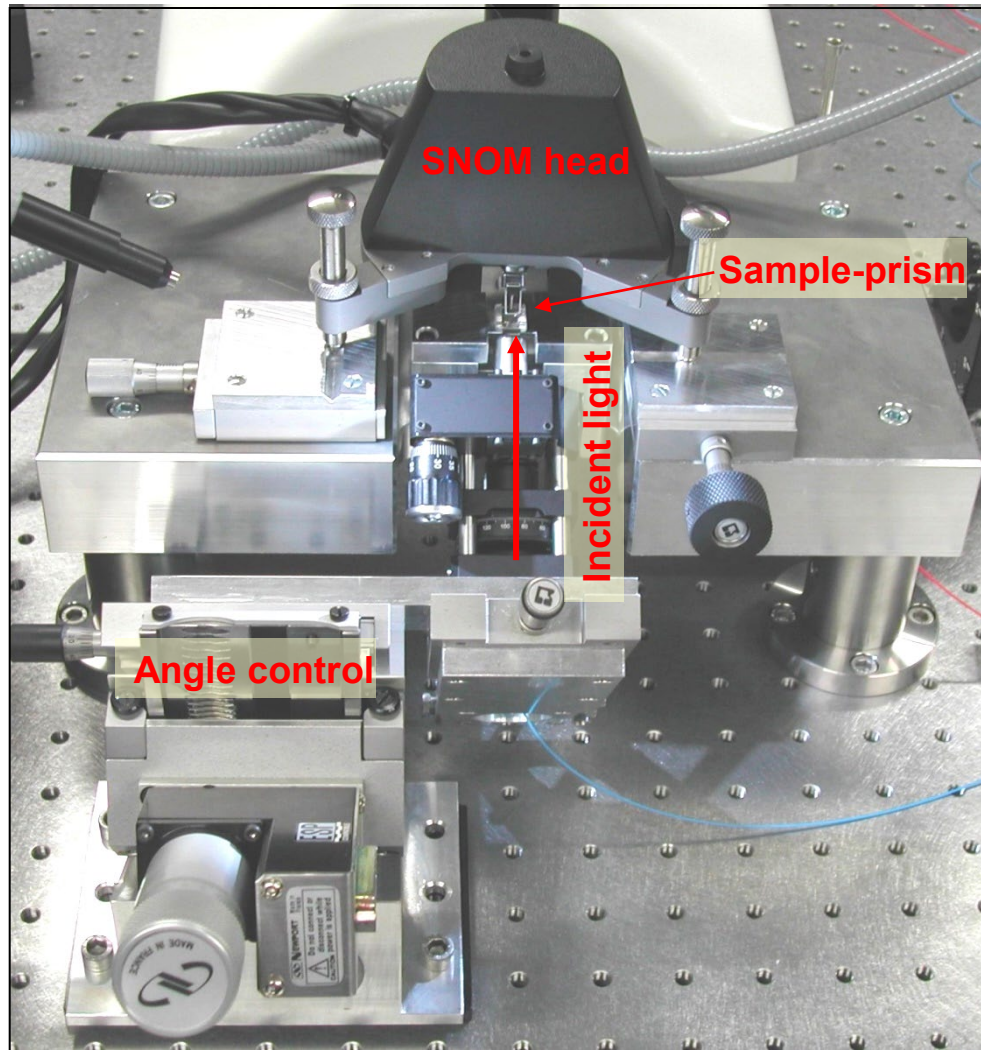
- En évitant de se propager trop loin → microscope optique de champ proche (scanning near-field optical microscope, SNOM)
- Microscope à force atomique (AFM) utilisant une fibre optique comme sonde



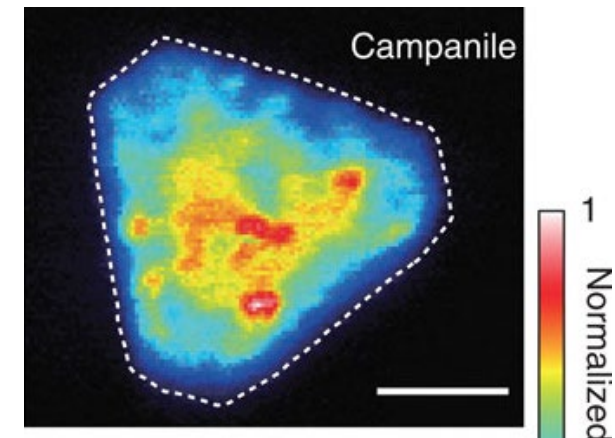
O.L. Mooren, Journal of the Association for Laboratory Automation vol. 11, p. 268 (2006)

Scanning near-field optical microscope

- On peut obtenir une résolution de l'ordre de $\lambda/10$... ou mieux...



Single molecules

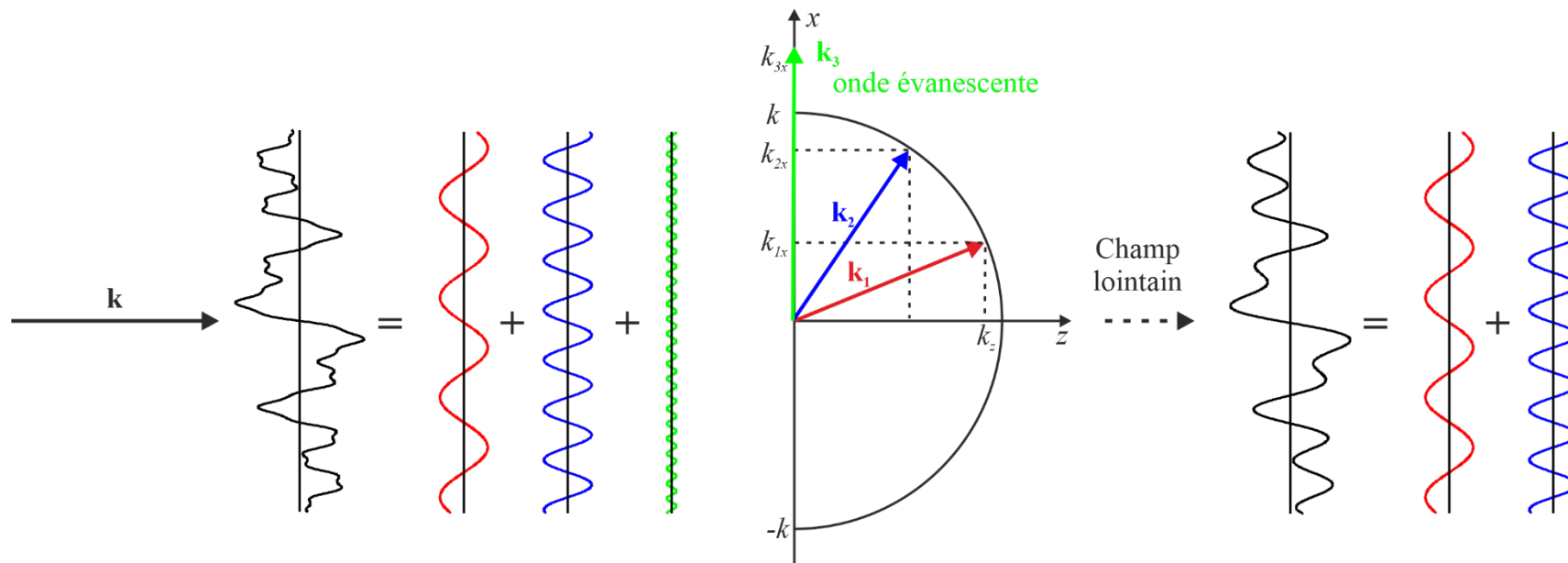


MoS₂ flake

P. Bazylewski, Applied Science vol. 7, p. 973 (2017)

En résumé

- Pour une image arbitraire, on obtient dans le champ lointain la transformée de Fourier, qui correspond aux différentes fréquences spatiales
- Les fréquences spatiales trop rapides sont évanescentes et disparaissent après propagation sur quelques longueurs d'onde, dans le champ lointain



Ingénierie optique

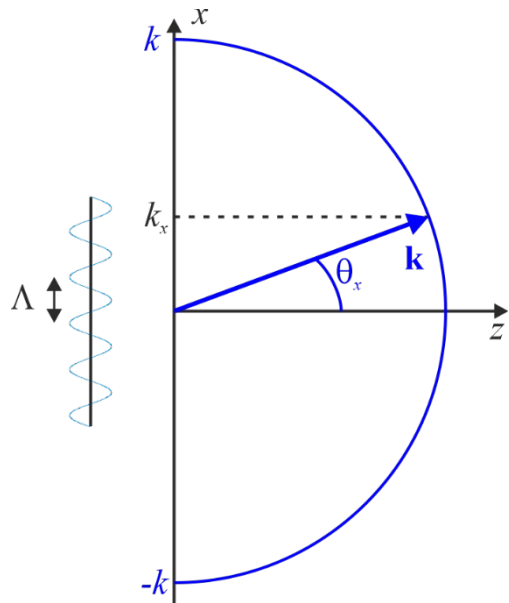
Semaine 5 – partie 4

Olivier J.F. Martin
Laboratoire de Nanophotonique et Métrologie



Réseau de diffraction

- Le principe est le même: la corrugation périodique de période Λ de la surface transmet une certaine quantité de mouvement à l'onde incidente qui est défléchie



Réseau de diffraction

- Le principe est le même: la corrugation périodique de période Λ de la surface transmet une certaine quantité de mouvement à l'onde incidente qui est défléchie
- L'angle de déflexion dépend de la longueur d'onde, donc les différentes composantes spectrales partent dans différentes directions
- Les ordres de diffraction $\pm q$ sont symétriques par rapport à la direction de l'onde incidente

Equation de Bragg:

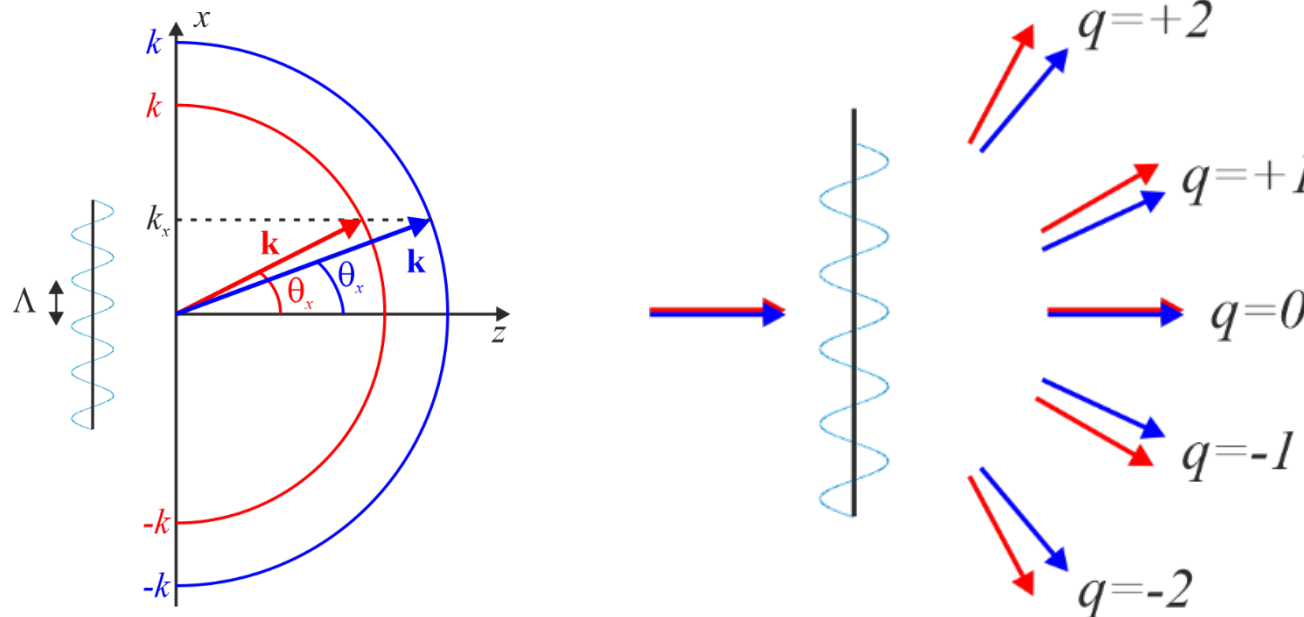
$$\sin \theta_q = \sin \theta_i + q \frac{\lambda}{\Lambda} \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\sin \theta_q = q \frac{\lambda}{\Lambda} \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Incidence normale

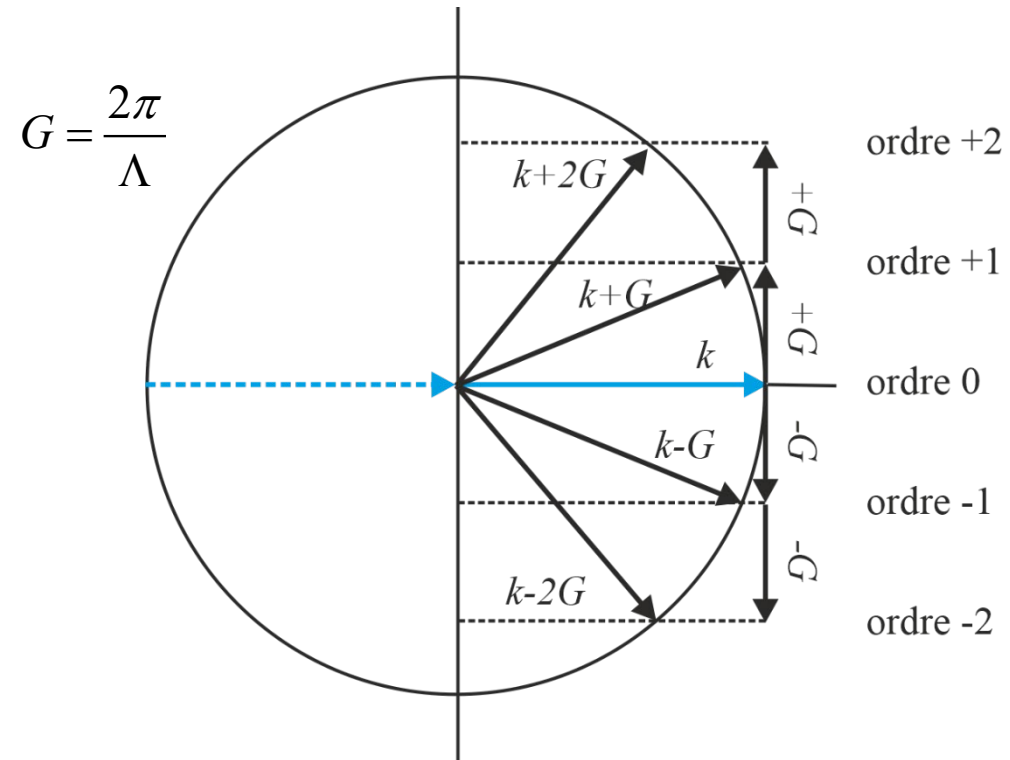
Pour les petits angles ($\sin \theta \simeq \theta$):

$$\theta_q = \theta_i + q \frac{\lambda}{\Lambda}, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



Réseau de diffraction

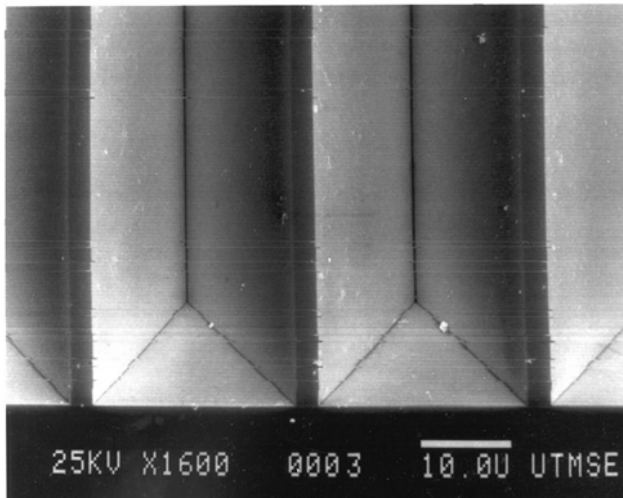
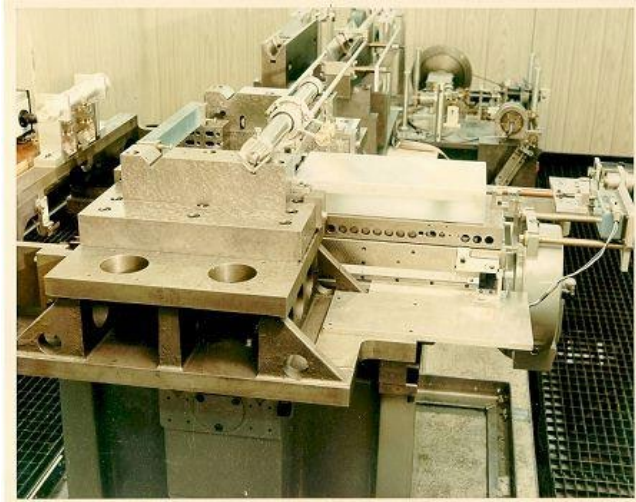
- On peut comprendre les différents ordres de diffraction comme étant l'ajout ou la soustraction du vecteur G associé au réseau périodique, parallèlement à la surface du réseau



- Si la période du réseau est plus petite que la longueur d'onde, il n'y a pas d'ordre de diffraction

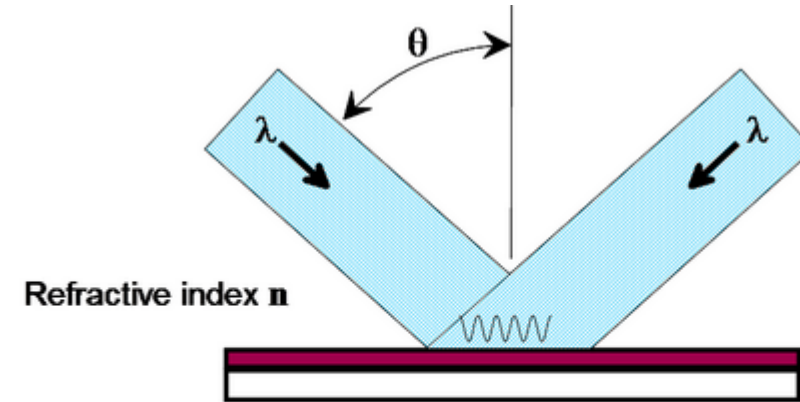
Réseau de diffraction

- Fabrication mécanique («ruled grating»):



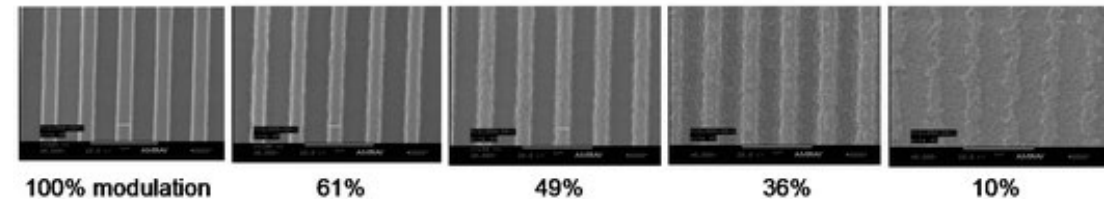
Newport

- Fabrication par interférence:



$$\text{period} = \frac{\lambda}{2\sin(\theta) n}$$

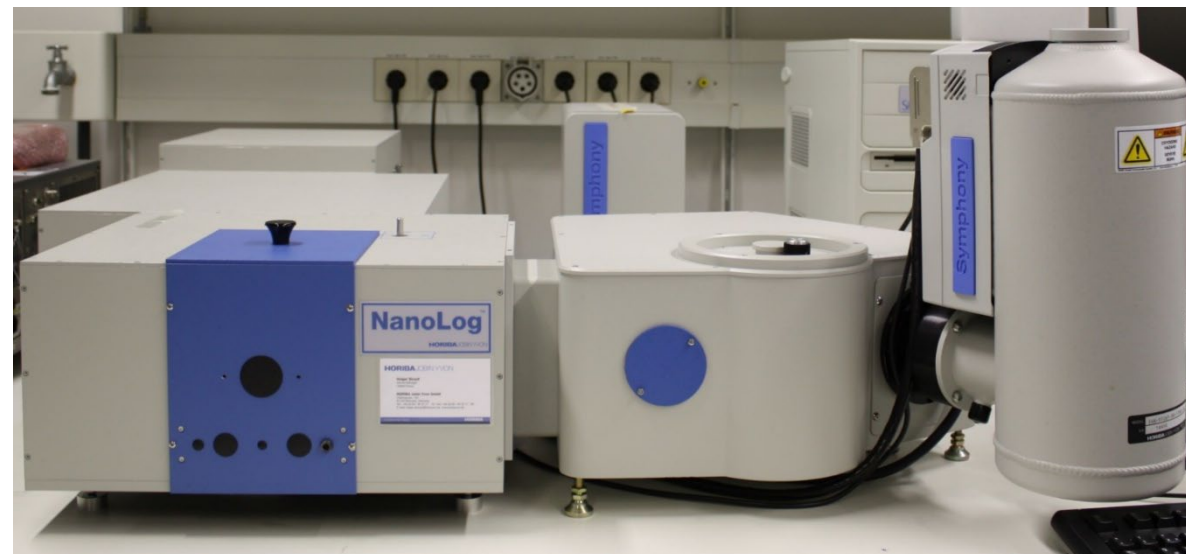
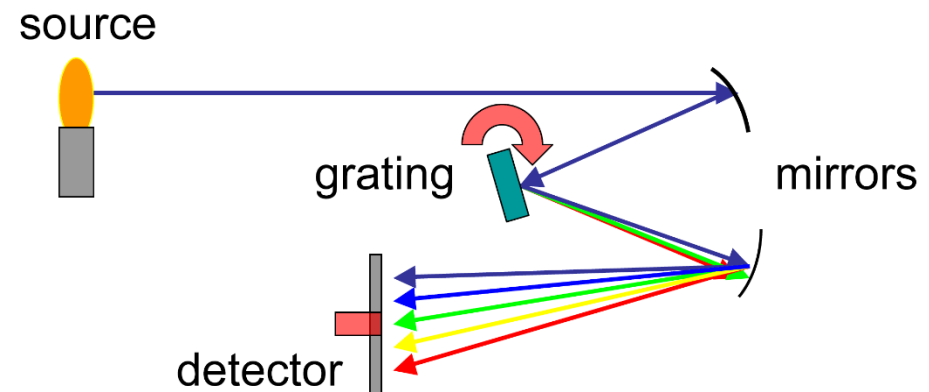
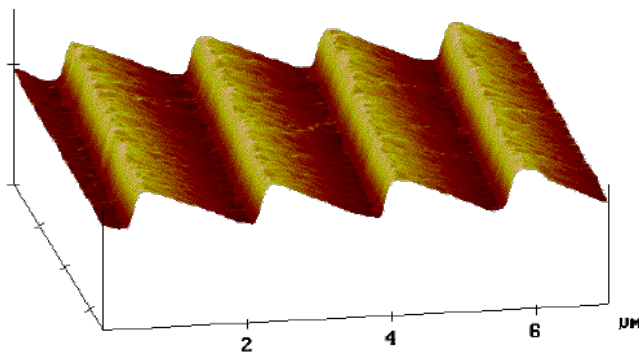
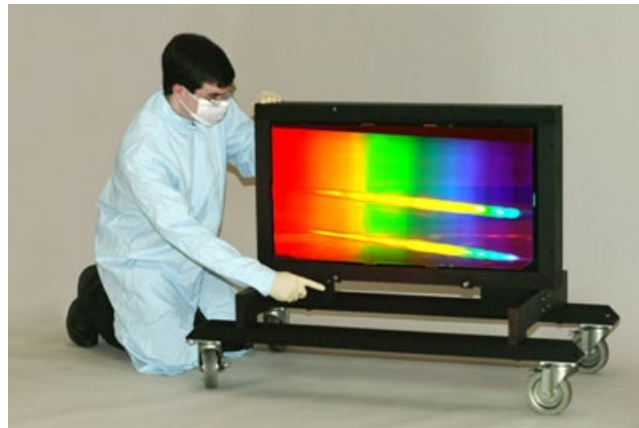
UVII-HS Resist, 230 nm lines on 500 nm pitch



IBM Research Almaden

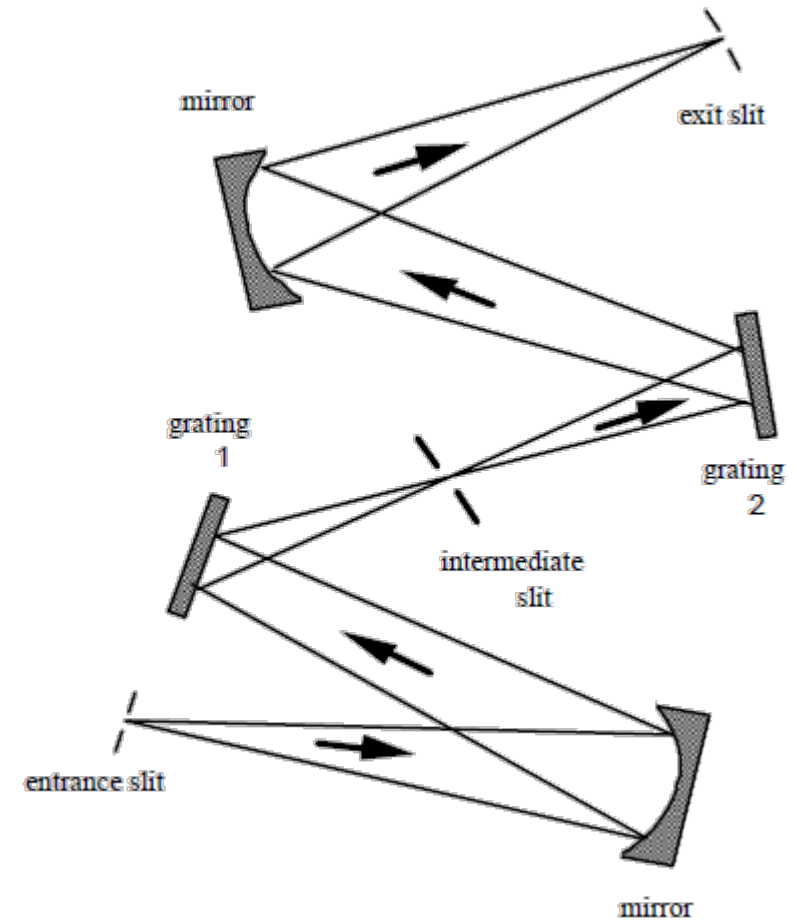
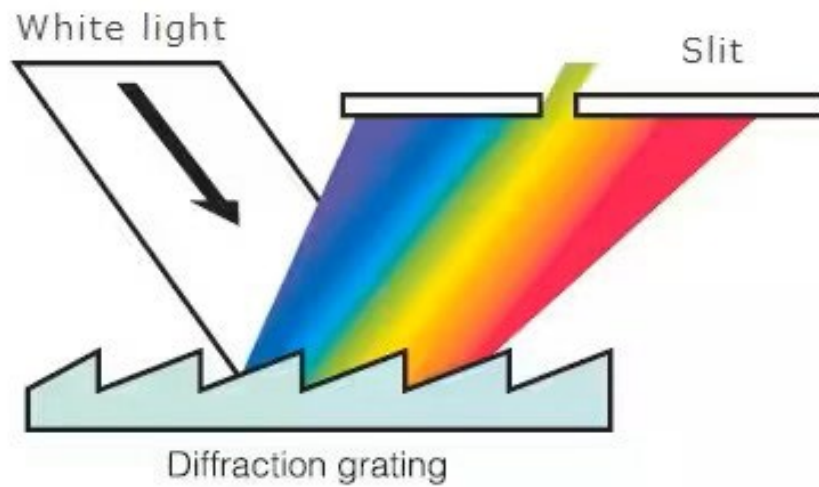
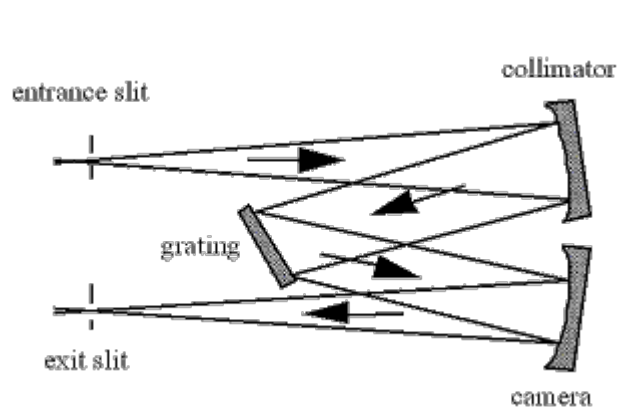
Spectromètre, monochromateur

- Le réseau de diffraction est le composant clé pour les spectromètres ou monochromateurs



Spectromètre, monochromateur

- Différentes configurations permettent d'augmenter la résolution spectrale ou de ne sélectionner qu'une longueur d'onde



Spectromètre, monochromateur

- La spectroscopie joue un rôle important dans beaucoup de disciplines scientifiques

ASTRONOMY & ASTROPHYSICS

OCTOBER II 1996, PAGE 373

SUPPLEMENT SERIES

Astron. Astrophys. Suppl. Ser. **119**, 373-390 (1996)

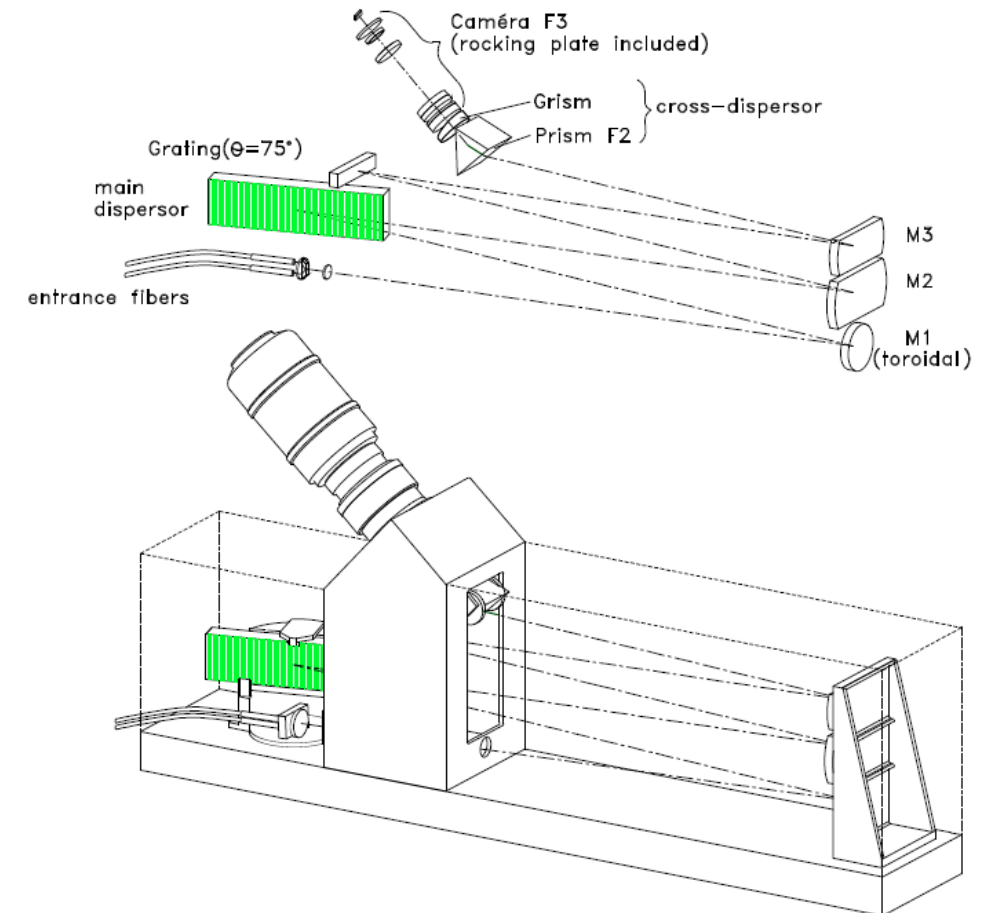
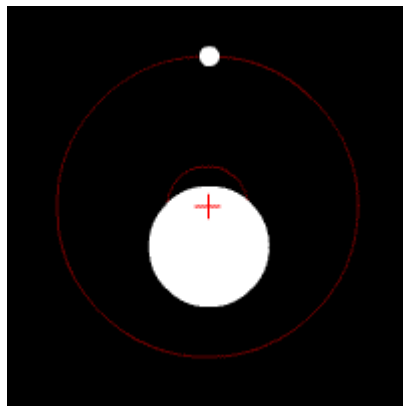
ELODIE: A spectrograph for accurate radial velocity measurements

A. Baranne¹, D. Queloz², M. Mayor², G. Adrianszyk³, G. Knispel³, D. Kohler³, D. Lacroix³, J.-P. Meunier³, G. Rimbaud³ and A. Vin³

¹ Observatoire de Marseille, 2 Place Le Verrier, F-13248 Marseille, France

² Observatoire de Genève, CH-1290 Sauverny, Switzerland

³ Observatoire de Haute-Provence, F-04870 Saint Michel l'Observatoire, France



Olivier J.F. Martin

Spectromètre, monochromateur

- Un simple CD peut s'utiliser comme réseau de diffraction grâce à sa structuration périodique



Quora

