

Ingénierie optique, série d'exercices 12, du 8 décembre 2025

Exercice 1

La théorie de Planck,

$$B_{\lambda_0, T} = \frac{2hc^2}{\lambda_0^5 (e^{hc/\lambda_0 kT} - 1)}, \quad (1)$$

donne la quantité de photons émis à la longueur d'onde λ_0 par un corps noir à la température T .

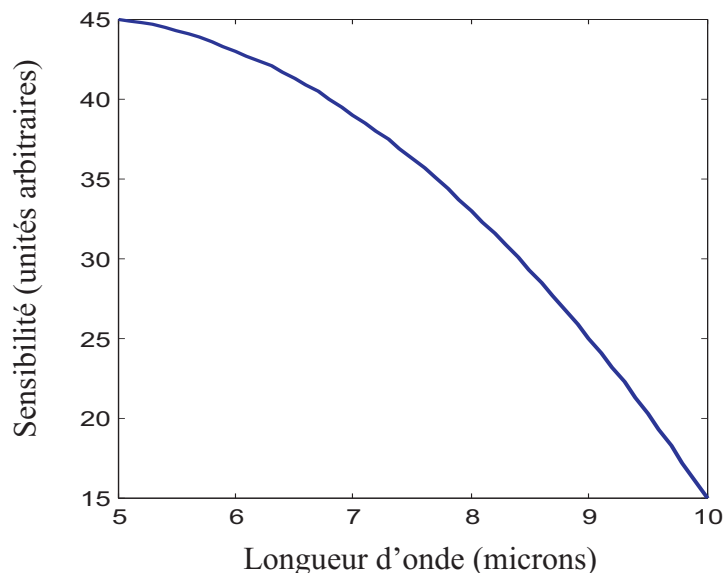
Calculer la puissance émise par une lampe de tungstène dans un angle solide $\Omega = 2\pi$ à la longueur d'onde centrale $\lambda_0 = 0.5 \mu\text{m}$ pour une largeur de ligne $\Delta\lambda_0 = 100 \text{ nm}$. Le filament a une surface $A = 1 \text{ mm}^2$ et émet comme un corps noir idéal à la température 2400 K . On négligera la variation de $B_{\lambda, T}$ sur l'intervalle spectral.

Exercice 2

a) Calculer la longueur d'onde correspondant au maximum d'émission d'un corps noir à $T_1 = 300 \text{ K}$ et à $T_2 = 400 \text{ K}$.

b) La sensibilité $\sigma(\lambda)$ en fonction de la longueur d'onde d'un film pour la thermographie est donnée sur la figure ci-dessous et peut s'écrire $\sigma(\lambda) = 50 - (\lambda - \lambda_0)^2 - \lambda$ avec $\lambda_0 = 5 \mu\text{m}$. La plage de sensibilité du film est entre $\lambda = 5 \mu\text{m}$ et $10 \mu\text{m}$.

Quelle est la gamme de températures qui peut être mesurée avec ce film : étalonner le film en fonction de la température (i.e. trouver la relation entre la sensibilité et la température), en supposant que la longueur d'onde que l'on mesure correspond au maximum d'émissivité.

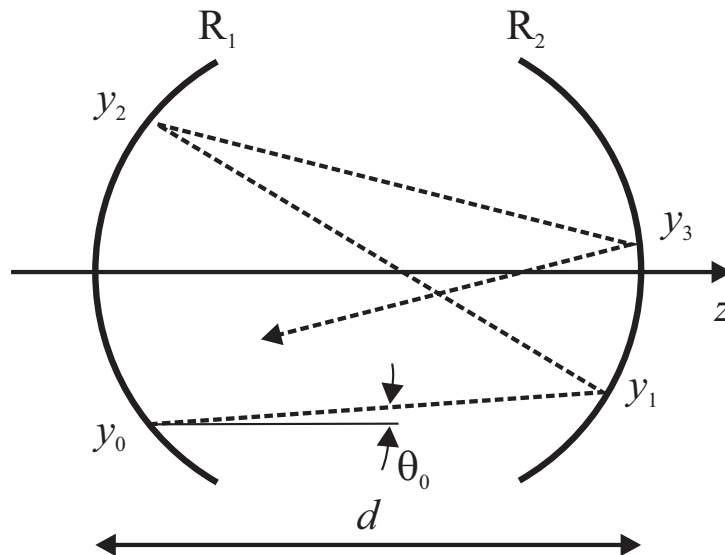


Exercice 3

Dans l'atome d'hydrogène, la durée de vie de la transition spontanée $2P \rightarrow 1S$ est $t_{\text{sp}} = 1.6 \cdot 10^{-9}$ s ; l'énergie de cette transition est $\hbar\omega = 10.2$ eV.

Calculer le coefficient d'Einstein B pour l'émission stimulée de cette transition (on supposera que l'indice de réfraction du milieu vaut $n = 1$).

Exercice 4



Pour réaliser un laser, il faut deux ingrédients : un matériau avec du gain optique et une cavité (résonateur optique) dans laquelle la lumière est réfléchi. La figure ci-dessus montre un résonateur optique formé par deux miroirs sphériques concaves de rayons R_1 et R_2 séparés par une distance d avec du vide ($n = 1$). Dans ce résonateur, les rayons lumineux sont réfléchis successivement entre les deux miroirs. On considère que chaque rayon parcourt toujours une distance d entre deux réflexions, quel que soit son chemin optique. On cherche à obtenir une condition sur la géométrie de la cavité pour qu'elle soit stable, i.e. que le rayon lumineux demeure dans la cavité, sans s'en échapper. Nous verrons plus loin que cette condition peut s'exprimer en fonction des valeurs propres de la matrice ABCD qui décrit un aller-retour dans la cavité

- a) Trouver la matrice ABCD, \mathbf{M} , pour un aller-retour dans la cavité (par exemple sur la figure : départ du point y_0 , propagation sur une distance d , réflexion sur le miroir R_2 , propagation sur une distance d et réflexion par le miroir R_1).

Il est clair que si le rayon initial est selon l'axe du résonateur, $y_0 = 0$ et $\theta_0 = 0$, la matrice \mathbf{M} doit ramener le rayon initial vers le même point :

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} y_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Equation (2) est un cas particulier d'une équation aux valeurs propres,

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} y_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

où λ est une constante. On peut récrire cette équation sous la forme suivante,

$$(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{1}) \begin{pmatrix} y_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = 0, \quad (4)$$

où $\mathbf{1}$ est la matrice unité.

On considère maintenant le cas particulier où $R_1 = R_2 = R$. On peut simplifier l'étude de ce résonateur en ne considérant qu'un aller-simple dans la cavité : propagation sur une distance d suivie par une réflexion par un miroir de rayon R .

- b) Calculer la matrice ABCD, \mathbf{M} , correspondant à ce cas particulier.
- c) En utilisant la matrice trouvée au point b) calculer $\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{1}) = 0$ pour obtenir une équation du deuxième degré pour les deux valeurs propres λ_{\pm} et résoudre cette équation. Pour faciliter l'écriture et le calcul on introduira le paramètre $S = 1 - (d/R)$.
- d) Le résonateur est stable si les valeurs propres λ_{\pm} sont des nombres complexes. Montrer que cette condition de stabilité est satisfaite si $S^2 < 1$.
- e) Trouver une condition sur la valeur du rapport d/R pour que la condition de stabilité trouvée au point d) soit satisfaite ?

Exercice 5

- a) On peut obtenir la finesse \mathcal{F} d'une cavité de longueur d formée de deux miroirs de réflectances \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 avec la formule suivante

$$\mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{\mathcal{R}V}}{1 - \mathcal{R}V}, \quad (5)$$

où $\mathcal{R} = \sqrt{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2}$ et $V = \exp((g - \alpha)d)$ représente le gain net avec g le gain et α les pertes.

Utiliser cette équation pour calculez la finesse \mathcal{F} d'une plaque de verre ($n = 1.5$) dans l'air et dans l'eau ($n = 1.33$).

- b) Calculez la finesse d'une couche d'huile ($n = 1.45$) sur le Golfe du Mexique (on négligera l'absorption).
- c) On illumine maintenant la plaque de verre dans l'air à incidence normale depuis un côté avec un laser de puissance 1 mW et d'une longueur d'onde correspondant au maximum possible de transmittance de la cavité ($\mathcal{T} = 1$). Quelle est la puissance lumineuse de l'autre côté de la plaque de verre ? Il se met en place un effet cavité dans la plaque de verre et la puissance lumineuse dans cette cavité P_{cav} est plus importante que la puissance transmise à l'extérieur. Utilisez la valeur de la transmittivité \mathcal{T}_2 du second miroir pour calculer la puissance lumineuse à l'intérieur de cette cavité ?