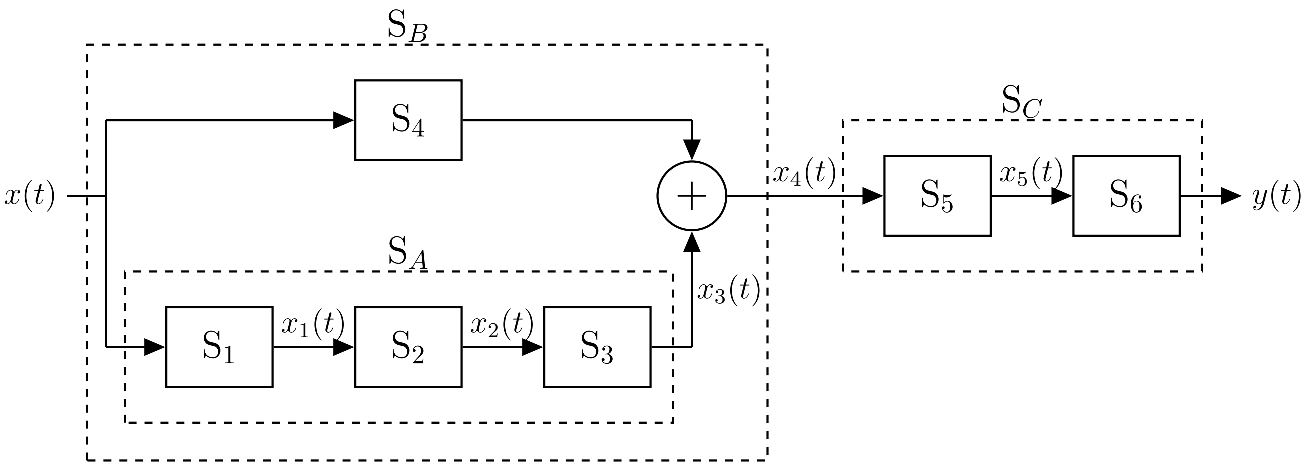
NOM: **Prénom:** **Section (MT/SV):**

Signaux & Systèmes I
Examen Final - 16 janvier 2021

Problème I

On considère le schéma bloc suivant.



Prenez soin de bien observer le schéma bloc afin d'identifier correctement les entrées et sorties de chaque sous-système !

A) Analyse de S_A**.**
Les systèmes S_1, S_2 et S_3 sont caractérisés par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_1 : &\quad x_1'(t) + x_1(t) = 3x(t) \\
\mathrm{S}_2 : &\quad x_2(t) = \mathrm{D}\{x_1\}(t) \\
\mathrm{S}_3 : &\quad h_3(t) = u(t)\mathrm{e}^{-t}\cos(t).
\end{aligned}$$

1) Exprimer le système S_1 sous forme d'opérateurs.

2) Donner l'expression de $h_1(t)$, la réponse impulsionelle du système S_1.

3) Le système S_1 est-il causal ? BIBO stable ? Justifier.

4) Donner l'expression de $H_1(\omega)$, la transformée de Fourier de $h_1(t)$.

5) Donner l'expression de $\varphi_1(t)$, la fonction de Green causale du système S_1.

6) Donner l'expression de $H_2(\omega)$, la réponse fréquentielle du système S_2.

7) Donner l'expression de $H_3(\omega)$, la réponse fréquentielle du système S_3.

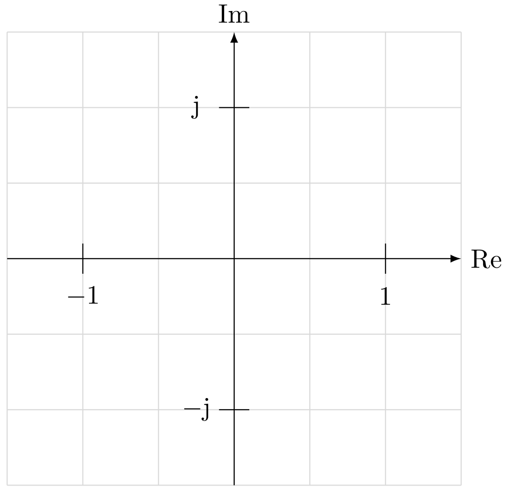
8) Donner les pôles et les zéros du système S_3.

9) Le système S_3 est-il réel ? BIBO-stable ? Justifier.

10) Montrer que la réponse fréquentielle du système S_A s'exprime

$$H_A(\omega) = \frac{3j\omega}{(j\omega + 1 + j)(j\omega + 1 - j)}$$

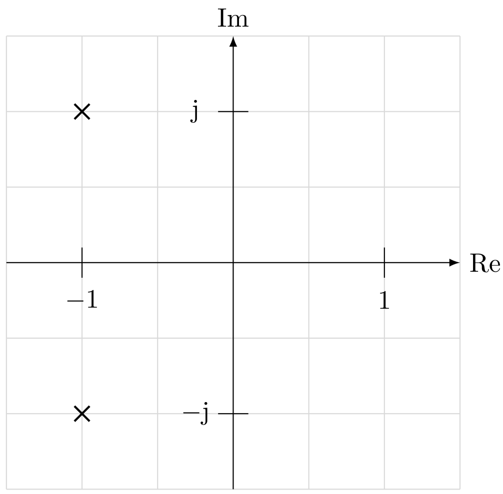
11) Représenter les pôle(s) et les zéro(s) du système S_A sur le diagramme ci-dessous



12) Le système S_A correspond à quel type de filtre ? Justifier.
Indication : on pourra calculer les valeurs $|H_A(0)|$, $|H_A(1)|$ *et* $\lim_{\omega\to+\infty} |H_A(\omega)|$.

B) Analyse de S_B.

Le système S_4 est caractérisé par le diagramme pôle-zéro suivant :



et par la valeur en zéro de sa réponse fréquentielle $H_4(0) = \frac{3}{2}$.

1) Donner l'expression de $H_4(\omega)$, la réponse fréquentielle du système S_4.

2) Donner l'expression de $H_B(\omega)$, la réponse fréquentielle du système S_B.

C) Analyse de S_C.

Le système S_5 et S_6 sont caractérisés par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_5 : &\qquad (\mathrm{D}+\mathrm{I})\{x_5\}(t) = x_4(t-1) \\ \mathrm{S}_6 : &\qquad H_6(\omega) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}{3}. \end{aligned}$$

1) Donner l'expression de $H_5(\omega)$, la réponse fréquentielle du système S_5.

2) Donner l'expression de $h_6(t)$, la réponse impulsionelle du système S_6.

3) Le système S_6 est-il causal ? BIBO stable ? Justifier.

4) Donner l'expression de $H_C(\omega)$, la réponse fréquentielle du système S_C.

D) Analyse de système complet S**.**

1) Montrer que la réponse fréquentielle du système complet s'exprime

$$H(\omega) = \frac{1}{(\mathrm{j}\omega + 1 + \mathrm{j})(\mathrm{j}\omega + 1 - \mathrm{j})}.$$

2) Donner l'expression de $h(t)$, la réponse impulsionelle du système S.

Problème II

Dans ce problème on considère le produit scalaire

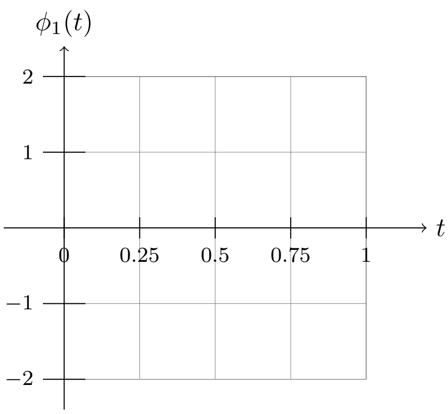
$$\langle f\,,\,g\rangle = \int_0^1 f(t)\cdot g(t)\,\mathrm{d}t$$

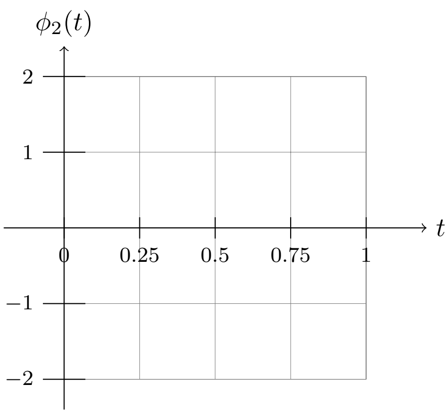
et la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pour l'espace $L_2\left([0,1]\right)$.

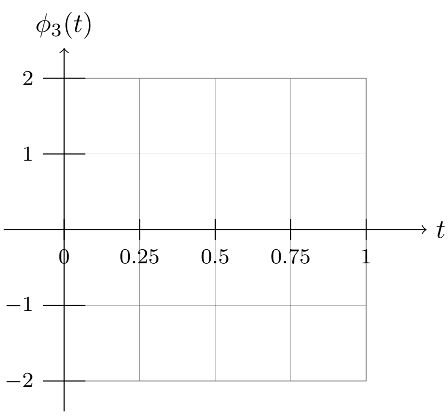
Partie A. Soient les fonctions

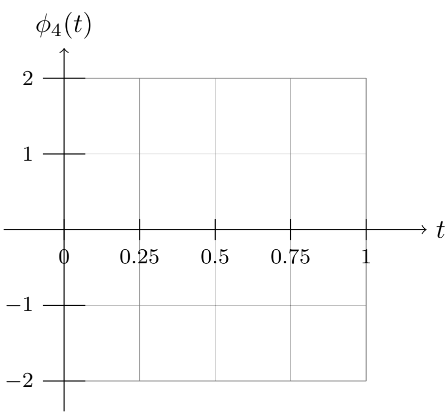
$$\begin{aligned}
\phi_1(t) &= \begin{cases} \sqrt{2} & \text{pour } 0 \le t < 1/4 \\ -\sqrt{2} & \text{pour } 1/4 \le t < 1/2 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\
\phi_2(t) &= \phi_1(t - 1/4), \\
\phi_3(t) &= \phi_1(t - 1/2), \\
\phi_4(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1(t/2).
\end{aligned}$$

1) Tracer ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 et ϕ_4 sur leur graphe respectif.
Indication : On peut approximer $\sqrt{2} \approx 1.4$.









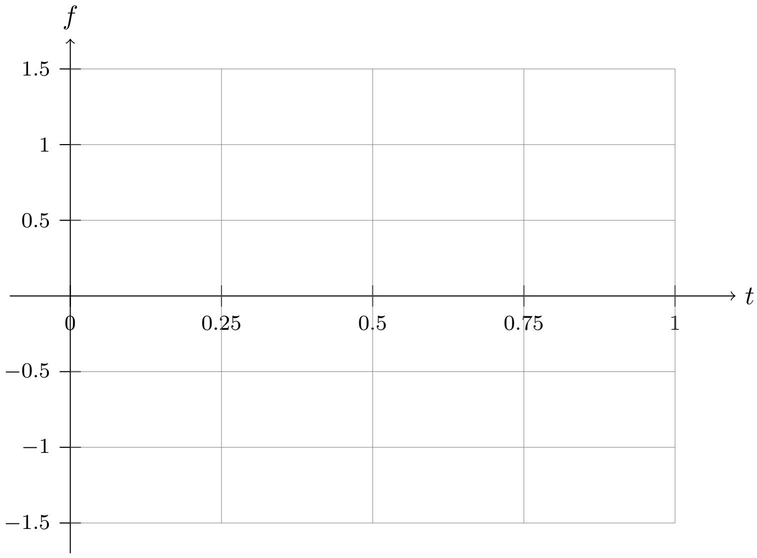
2) Calculer $\|\phi_1\|$, $\|\phi_2\|$, $\|\phi_3\|$ et $\|\phi_4\|$.

3) Les familles de fonctions suivantes sont-elles orthonormales ? Justifier.
Indication : De bons arguments peuvent remplacer des calculs.

		OUI	NON
a)	$\{\phi_1, \phi_2\}$	☐	☐
b)	$\{\phi_2, \phi_3\}$	☐	☐
c)	$\{\phi_1, \phi_3\}$	☐	☐
d)	$\{\phi_1, \phi_3, \phi_4\}$	☐	☐

Partie B. Soit la fonction $f(t) = \sin(\pi t)$ pour $t \in [0, 1]$.

1) Esquissez la fonction $f(t)$ sur $[0, 1]$.



2) Calculer $\langle \phi_i \, , \, f \rangle$ pour $i \in \{1, 3, 4\}$.

3) Calculer $\widetilde{f}(t)$, l'approximation de $f(t)$ sur $[0,1]$ dans la base $\{\phi_1, \phi_3, \phi_4\}$ qui minimise l'erreur $\|f - \widetilde{f}\|$.

4) Soit la fonction

$$\phi_5(t) = \mathrm{rect}(t - 1/2).$$

La famille de fonctions $\{\phi_1, \phi_3, \phi_4, \phi_5\}$ est-elle orthonormale ? Justifier.

5) Calculer $\widehat{f}(t)$, l'approximation de $f(t)$ sur $[0,1]$ dans la base $\{\phi_1, \phi_3, \phi_4, \phi_5\}$ qui minimise l'erreur $\|f - \widehat{f}\|$.

6) Calculer le coefficient c_0 de la série de Fourier correspondant à $f(t)$ avec la période $T = 1$. Quelle est l'interprétation de cette valeur ?

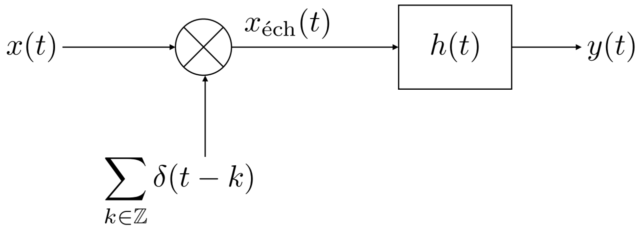
7) Calculer l'énergie $\|f\|^2$.
Indication : On rappelle que $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$.

8) Calculer les énergies $\|\widehat{f}\|^2$ et $\|\widetilde{f}\|^2$.

9) Calculer les erreurs d'approximation $\|f - \widetilde{f}\|$ et $\|f - \widehat{f}\|$. Comparer les deux valeurs.

Problème III

Soit le schéma-bloc suivant :



Le signal $x(t)$ est échantilloné à une période $T_e = 1$ ce qui produit le signal $x_{\text{éch}}(t)$. Ce signal échantillonné est ensuite filtré par un système de réponse impulsionnelle $h(t)$, ce qui donne le signal de sortie $y(t)$.
Les parties du problème sont indépendantes.

Partie A

Pour cette partie on considère les signaux

$$x(t) = \cos(\alpha t) \qquad\qquad \text{où } \alpha > 0 \text{ est un nombre réel}$$

$$h(t) = \frac{1}{2}\text{sinc}^2\left(\frac{t}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right).$$

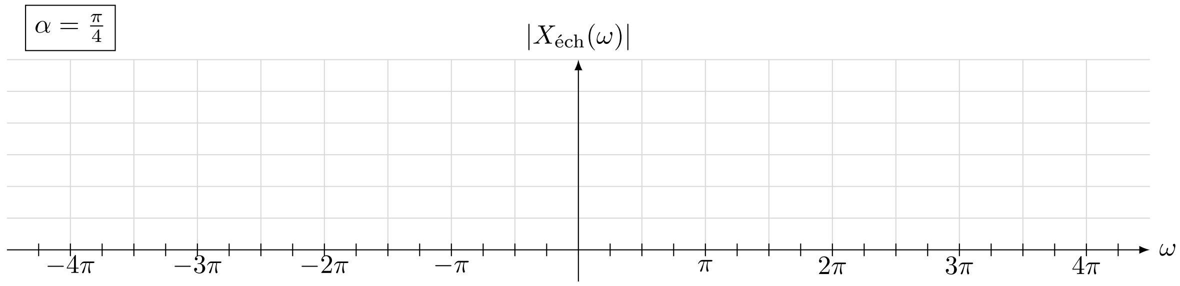
1) Donner $X(\omega)$, la transformée de Fourier de $x(t)$

2) Donner $X_{\text{éch}}(\omega)$, la transformée de Fourier de $x_{\text{éch}}(t)$, en fonction de $X(\omega)$.

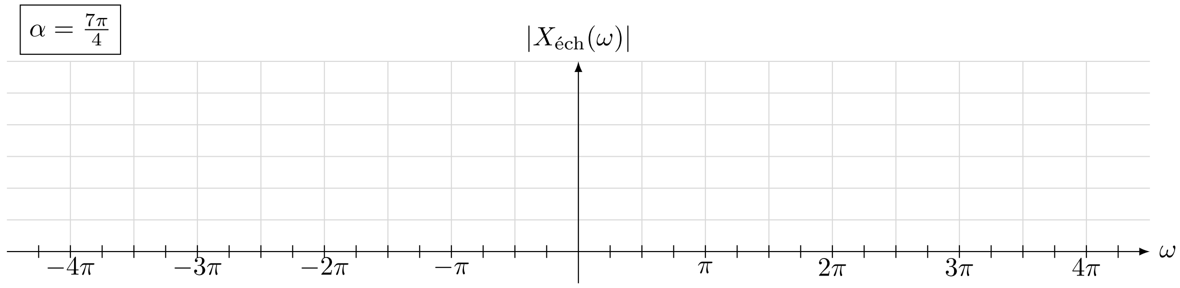
3) Pour quelles valeurs du paramètre α la période d'échantillonage $T_e = 1$ permet-elle qu'une reconstruction parfaite du signal d'entrée $x(t)$ soit possible à partir du signal échantillonné $x_{\text{éch}}(t)$?

4) Sur les graphes ci-dessous, représenter $|X_{\text{éch}}(\omega)|$, le module de la transformée de Fourier de $x_{\text{éch}}(t)$, pour les valeurs du paramètre α indiquées. Veiller à graduer l'axe des ordonnées.

$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$



$\boxed{\alpha = \frac{7\pi}{4}}$



5) Observe-t-on un phénomène de recouvrement spectral (aliasing) pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$? Et pour $\alpha = \frac{7\pi}{4}$? Justifier.

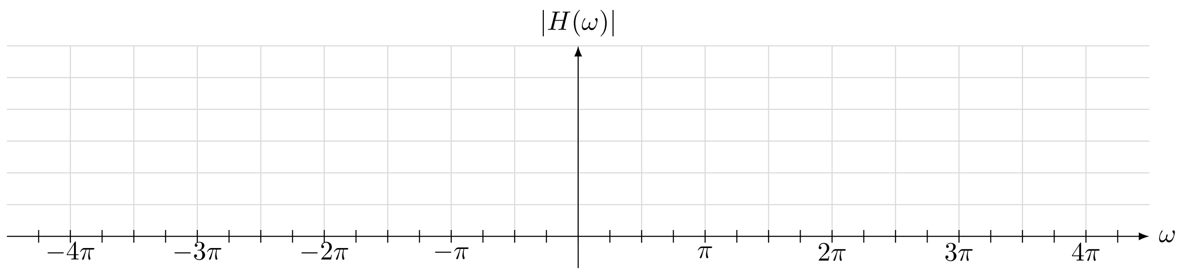
6) Donner $F(\omega)$, la transformée de Fourier de $f(t) = \frac{1}{2}\text{sinc}^2(\frac{t}{4})$ en justifiant bien les étapes.

7) En déduire $H(\omega)$, la transformée de Fourier de $h(t)$. On veillera à simplifier au maximum l'expression obtenue.

Pour la suite de cette partie on prendra :

$$H(\omega) = \text{tri}\left(\frac{\omega - \pi/4}{\pi/2}\right) + \text{tri}\left(\frac{\omega + \pi/4}{\pi/2}\right).$$

8) Représenter $H(\omega)$ sur le graphe ci-dessous, en veillant à graduer l'axe des ordonnées.



9) De quel type de filtre s'agit-il ? Est-ce un filtre idéal ? Justifier.

10) Toujours pour les cas $\alpha = \frac{\pi}{4}$ puis $\alpha = \frac{7\pi}{4}$, donner la sortie $y(t)$ en justifiant soigneusement.
On pourra raisonner dans le domaine de Fourier et s'aider des graphiques tracés précedemment.

Partie B
Pour cette partie on considère le signal d'entrée

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} \mathrm{sinc}(t-k),$$

avec $N \in \mathbb{N}$.

1) Que vaut $x_N(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$?

2) Donner $X_N(\omega)$, la transformée de Fourier de $x_N(t)$, en fonction de $\sum_{k=-N}^{N} e^{-jk\omega}$.

3) On échantillonne $x_N(t)$ avec une période $T_e = 1$, ce qui donne le signal $x_{N\mathrm{ech}}(t)$. Expliquer pourquoi la reconstruction de $x_N(t)$ est possible à partir de $x_{N\mathrm{ech}}(t)$.

4) Pour reconstruire $x_N(t)$, on fait passer $x_{N\mathrm{ech}}(t)$ dans un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$. Donner un exemple de réponse impulsionnelle $h(t)$ qui permette la reconstruction parfaite de $x_N(t)$. De quel type de filtre s'agit-il ? Est-il idéal ?

A