Série 11

Réponses à l'exercice 11.1 : TRANSFORMÉES DE FOURIER

1) $H_1(\omega) = \frac{2}{\mathrm{j}(\omega+2\pi)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega+2\pi}{5}}$.

2) $H_2(\omega) = \frac{2-e^{-1-\mathrm{j}\omega}\left(2+2(\mathrm{j}\omega+1)+(\mathrm{j}\omega+1)^2\right)}{(\mathrm{j}\omega+1)^3}$.

3) $H_3(\omega) = -2\pi\omega u(-\omega)\mathrm{e}^{2\omega}$.

4) $H_4(\omega) = -\frac{12\mathrm{j}\omega}{(\omega^2+9)^2}$.

Réponses à l'exercice 11.2 : ANALYSE DE SYSTÈME

1) (a) $x'(t) + 10x(t) = x_2(t)$.

(b) $H_1(\omega) = \mathrm{j}\omega + 10$.

(c) Il est causal.

2) (a) $H_2(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+\mathrm{j}(\omega+1)} + \frac{1}{2+\mathrm{j}(\omega-1)}\right)$.

(b) Il est BIBO stable.

3) (a) $h_3(t) = u(t)\mathrm{e}^{-2t}$.

(b) $y'(t) + 2y(t) = x_3(t)$.

(c) Il est causal et BIBO stable.

(d) i. $y(t) = \delta(t)$.

ii. $\frac{u(t)}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2t})$.

iii. $y(t) = \frac{3}{2\sqrt{2}}\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$.

4) (a) $H(\omega) = \frac{\mathrm{j}\omega+10}{(2+\mathrm{j}(\omega+1))(2+\mathrm{j}(\omega-1))}$.

(b) Il est LIT et BIBO stable.

(c) C'est un passe-bas.

(d) i. $u(t)\mathrm{e}^{-2t}(\cos(t) + 8\sin(t))$.

ii. $y(t) = (8 - \mathrm{j})u(t)\mathrm{e}^{-(2+\mathrm{j})t} + \delta(t)$.

Réponses à l'exercice 11.3 : ÉCHANTILLONAGE ET RECONSTRUCTION

1) (a) $y_1(t) = p(t)$.

(b) $y_2(t) = -p(t)$.

2) Le système n'est pas invariant par translation.

3) $P(\omega) = 2\pi \sum_{n\in 2\mathbb{Z}+1} \delta(\omega - \pi n)$.

4) $Y(\omega) = \sum_{n\in 2\mathbb{Z}+1} X(\omega - \pi n)$.

5) C.f. Figure 1.

6) Dans le domaine fréquentiel, un décalage de π suivi d'un filtrage passe-bas qui conserve les fréquences dans $[-\pi, \pi]$.

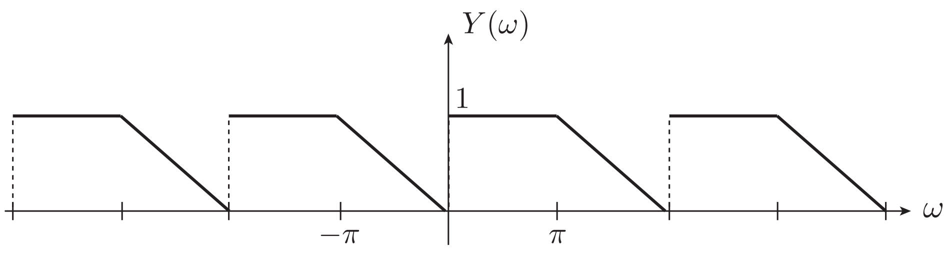

FIGURE 1 – Exercice **11.3.5** : $Y(\omega)$ pour la fonction $X(\omega)$ donnée dans l'exercice.

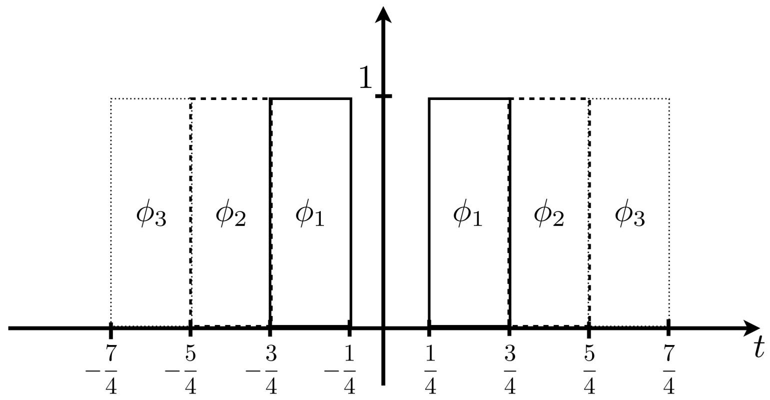

FIGURE 2 – Exercice **11.4.1** : $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, $\phi_3(t)$.

Réponses à l'exercice 11.4 : APPROXIMATION DE FONCTIONS

1) C.f. Figure 2.

2) $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = 1$ si $n = m$ et 0 sinon. Le système $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est orthonormal.

3) $\Phi_n(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)\cos\left(\frac{\omega n}{2}\right)$.

4) $f(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}$.

5) $\langle f, \phi_n \rangle = e^{-\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)} - e^{-\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)}$.

6) La meilleure approximation est $\tilde{f}(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(e^{-\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)} - e^{-\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)}\right)\phi_n(t)$. L'erreur d'approximation est $\|f-\tilde{f}\|_2^2 = \frac{1}{4} - (e^{+\frac{1}{2}} - 2 + e^{-\frac{1}{2}})\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}$.