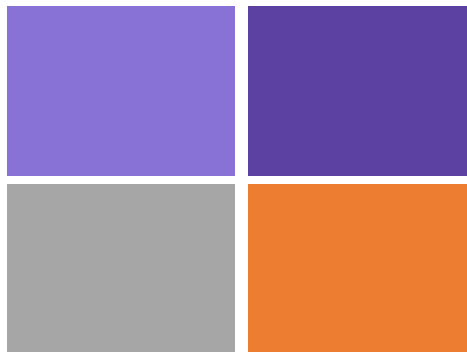


# Semaine 6b

Contraintes et déformations  
relatives pour poutre en flexion



**PARTIE 1: (slide 4 - 25)**

**Contraintes et déformations relatives pour poutre en flexion**

(en partie expliqué dans Chapitre 5 de Gere et Goodno)

**PARTIE 2: (slide 26 - 50)**

**Poutres: Moment quadratique (moment d'inertie)**

(en partie expliqué dans Chapitre 12 de Gere et Goodno)

# PROGRAMME DU COURS, semaines 6-10

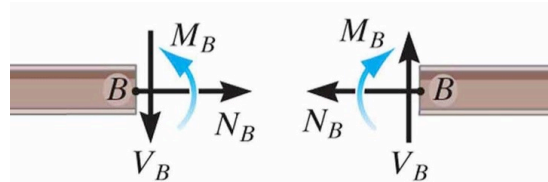
6	14.10	Forces internes dans les poutres non-déformées	x	
6	16.10	$\varepsilon(y)$ et $\sigma(y)$ en flexion pure. Moment d'inertie	x	Série 6
7	28.10	Poutres chargées axialement. Poutres composites	x	Série 6
7	30.10	Quiz + Session questions & réponses D. Briand		Série 1-5
8	04.11	Examen mi-semester D. Briand		
8	06.11	Flèches des poutres	x	Série 7
9	11.11	Flèche pour guidage flexible	x	Série 8
9	13.11	Poutres statiquement indéterminées	x	Série 8
10	18.11	Poutres statiquement indéterminées. Flambage	x	Séries 9
10	20.11	Flambage	x	Série 10

# Résumé du chapitre précédent (semaine 6a)

$$\blacksquare \frac{dV}{dx} = -q(x)$$

$$\blacksquare \frac{dM_z}{dx} = V(x)$$

- $M_z(x)$ : Moment de flexion
- $V(x)$ : Force de cisaillement
- $q(x)$ : Charge distribuée (positif vers le bas pour relations différentielles)



C'était des poutres magiques sans "épaisseur" en y

# Résumé chapitre actuel (semaine 6b)

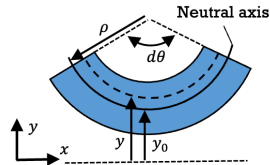
Poutre en flexion pure avec une épaisseur en  $y$

## ■ Déformation Relative normale $\varepsilon_x(y)$ :

$$\varepsilon_x(y) = -\frac{y - y_0}{\rho} = -\kappa(y - y_0)$$

- $y_0$ : Position de l'axe neutre
- $\rho$ : Rayon de courbure
- $\kappa = \frac{1}{\rho}$ : Courbure
- $y - y_0$ : Distance de l'axe neutre
- $y_0 =$  l'axe neutre: centroïde de la section transverse pour poutres mono-matériaux:

$$y_0 = \frac{\int_A y \, dydz}{A}$$



## □ Contrainte normale $\sigma_x(x, y)$ :

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}}(y - y_0) = -E \frac{y - y_0}{\rho}$$

- $I_{z,y_0}$ : Moment d'inertie de la section sur un axe parallèle à l'axe  $z$  passant par l'axe neutre  $y_0$
- $I_{z,y_0} = \int_A (y - y_0)^2 \, dydz$

## ■ $M_z(x) = \frac{E}{\rho} I_{z,y_0}$

## □ Contrainte normale maximum $\sigma_{x,max}$ :

$$|\sigma_{x,max}(x)| = \frac{|M_z(x)|}{I_{z,y_0}} c = \frac{|M_z(x)|}{S}$$

- $c$ : Distance maximale vers l'axe neutre
- $S = \frac{I_{z,y_0}}{c}$  : Module d'inertie élastique

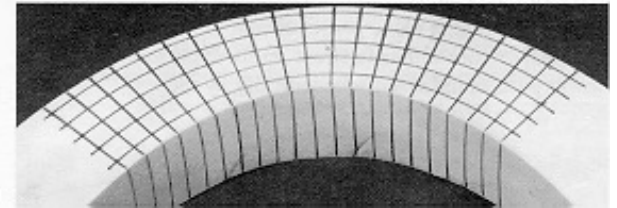
# Semaine 6b –partie 1

## Objectifs d'apprentissage

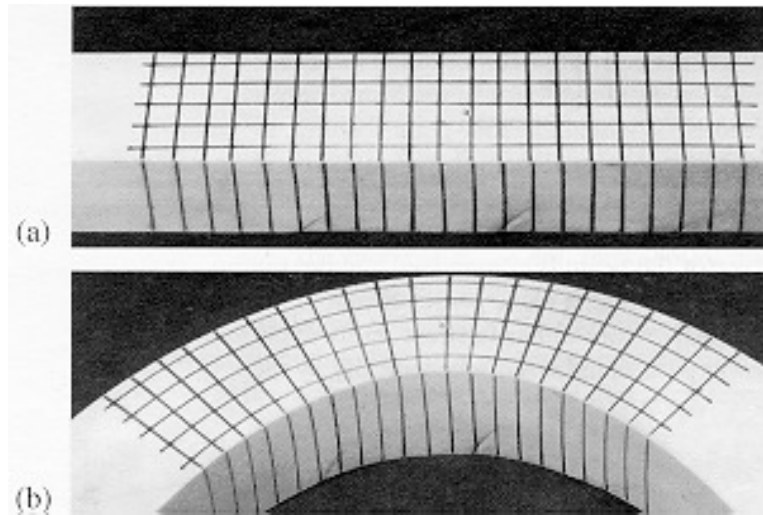
### **Savoir ce qu'est une Poutre en flexion pure**

Pour les poutres en flexion pure:

- Exprimer  $\varepsilon_x(y)$  [in english strain!]
- Définir et savoir trouver l'axe neutre
- Exprimer  $\sigma_x(y)$  [in english stress!]



# Déformation relative dans les poutres en flexion pure



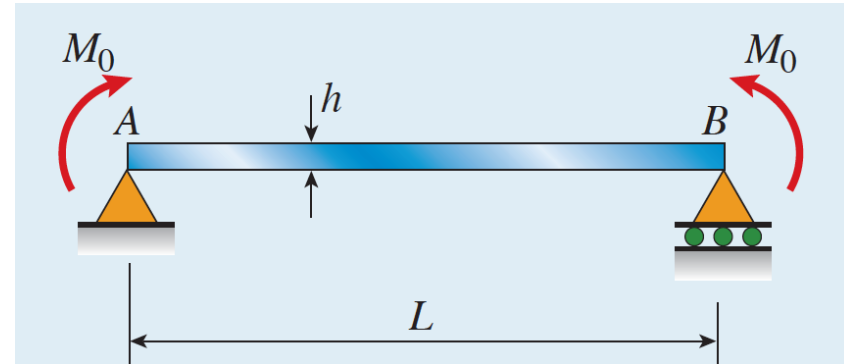
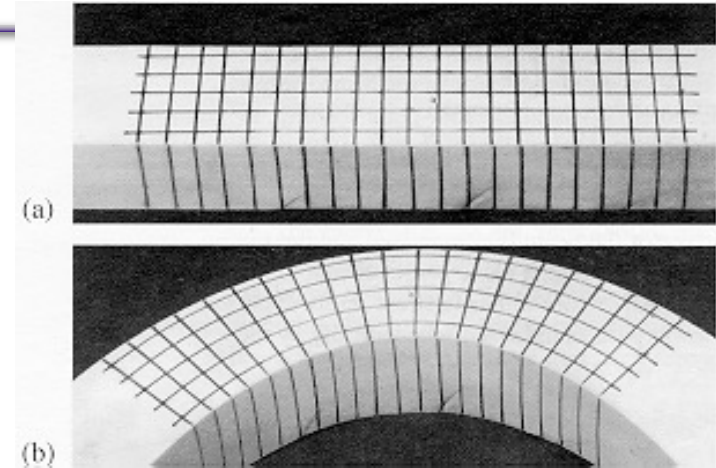
Pas de forces axiales pour le moment

# Déformation relative dans une poutre en flexion pure

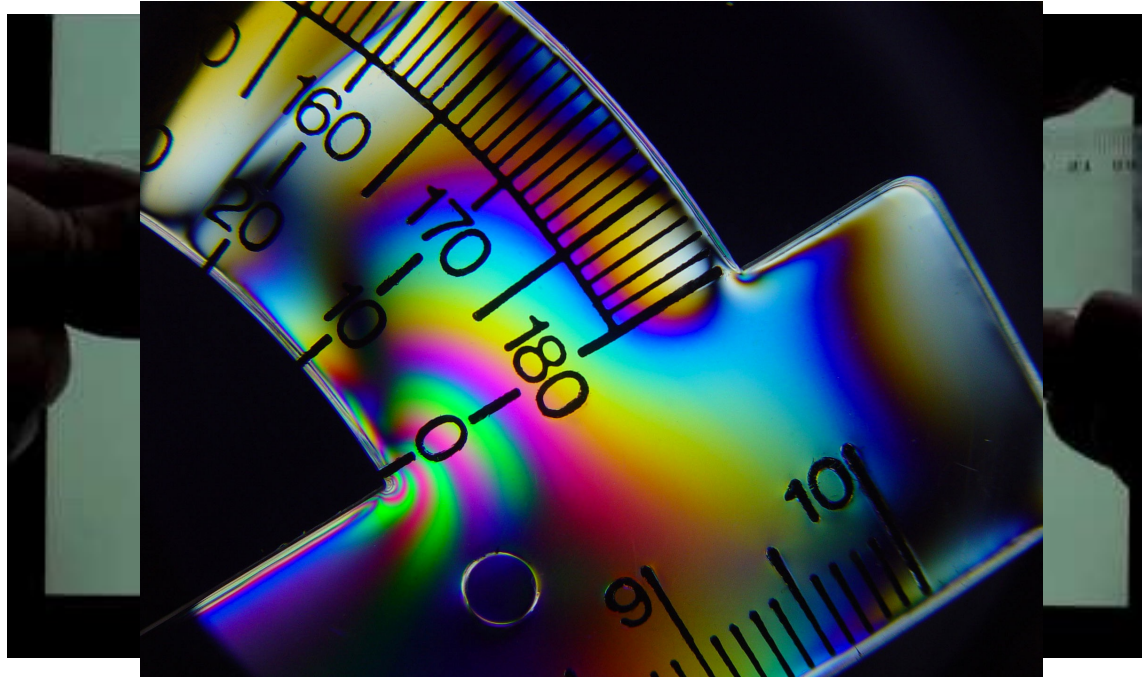
C'est quoi être en flexion pure ?

- Moment interne  $M_z$  non-nul et constant le long de la poutre. Pas de forces internes  $V(x)$  ou  $N(x)$ 
  - C-à-d : on « tord » les 2 extrémités de la poutre, sans tirer ou pousser
- La flexion ne crée pas d'élongation de l'axe neutre
- Une contrainte normale  $\sigma_x(y)$  est la seule contrainte induite par la flexion
- Le niveau de contrainte dépend de  $y$  (en compression d'un côté, en traction de l'autre)

Mais heureusement, les équations de ces slides sont aussi valables pour toute poutre sans force normale interne, mais avec un  $V(x)$



vous pouvez voir certaines contraintes internes !



[https://en.wikipedia.org/wiki/Photoelasticity#/media/File:Plastic\\_Protractor\\_Polarized\\_05375.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Photoelasticity#/media/File:Plastic_Protractor_Polarized_05375.jpg)

<https://www.youtube.com/watch?v=Bv7HsJ4LbkA>

## Source des vidéos des prochains slides

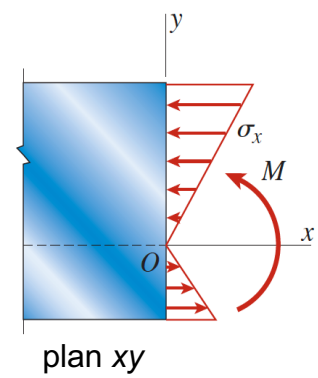
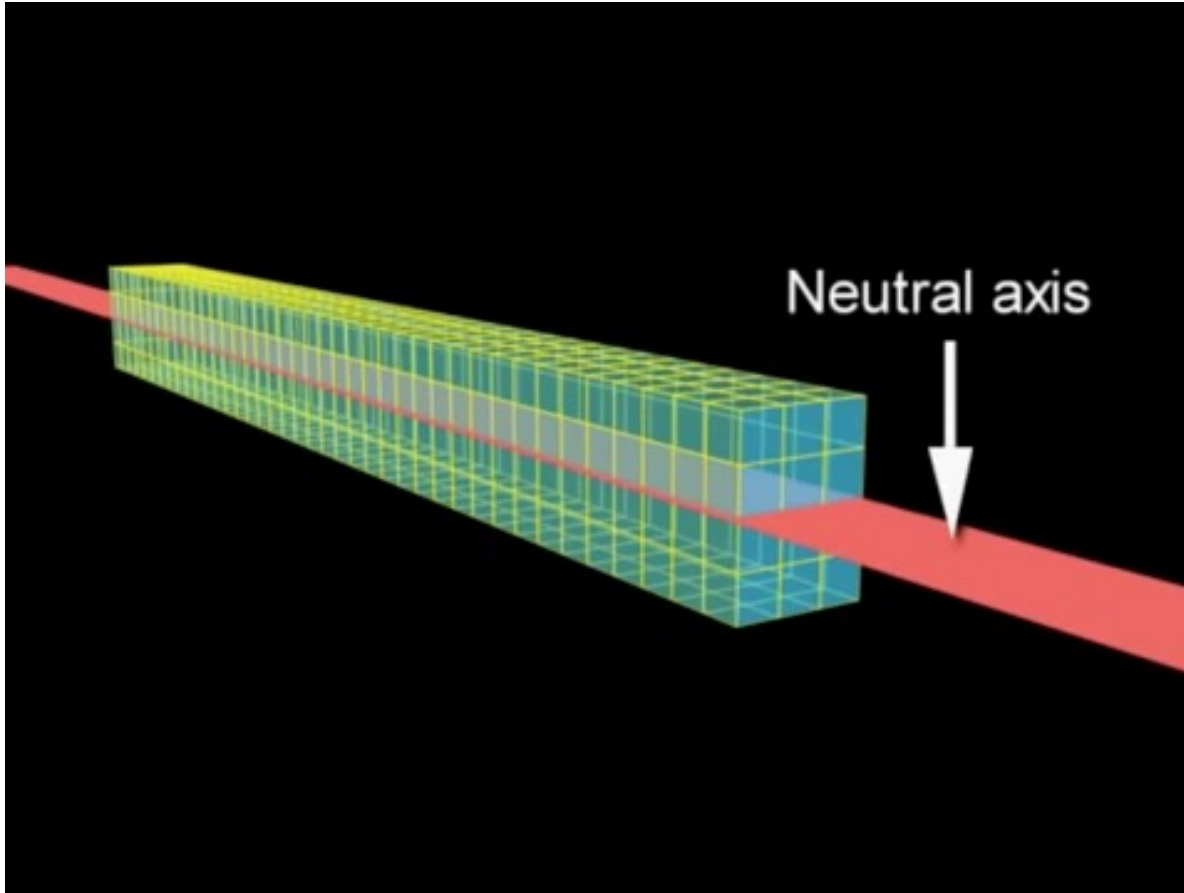
The Bending of Beams (10 part video series) was created  
for CIV E 204: Mechanics of Solids 1  
University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada.

Author .....G. Wayne Brodland  
Animator .....Judy Sherwood  
Narrator .....Colin Campbell

Permission is granted to use this video for educational purposes  
only, provided it is unaltered and includes these credits.

© 2009 G W Brodland and J Sherwood

# Déformation relative dans une poutre en flexion pure



$$\varepsilon_x(y) = -\frac{y - y_0}{\rho}$$

Visualisation de la  
contrainte pour une  
poutre de section  
rectangulaire

$y_0$  = axe neutre

$y_0 = 0$  dans cette vidéo

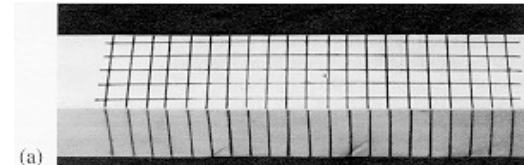
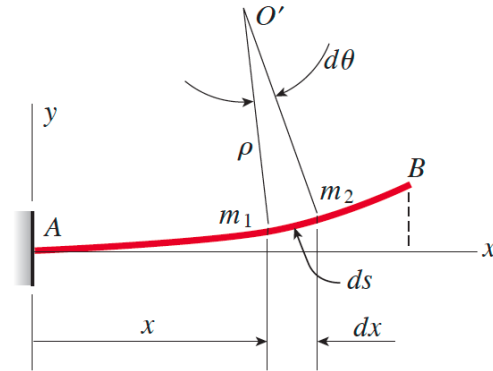
## $\varepsilon_x(x,y)$ : Déformation relative normale pour une poutre en flexion pure, en fonction de $x$ et $y$

- Lorsqu'une poutre fléchit, nous pouvons définir localement un rayon de courbure  $\rho$  et une courbure  $\kappa=1/\rho$
- Les sections de la poutre perpendiculaires à l'axe de la poutre avant la flexion resteront plan après pliage (c-à-d à  $x$  constant)
- Un côté (par ex ici le dessus) de la poutre va s'allonger, tandis que l'autre côté devient plus court.
- L'axe où il n'y a pas d'allongement est appelé **axe neutre** et passe à travers le **centroïde** de la poutre

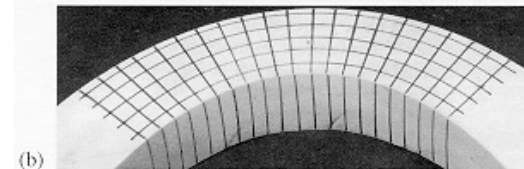
$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$



(a)

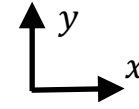


(a)



(b)

# Axe Neutre (poutre simple) et déformation relative selon $y$



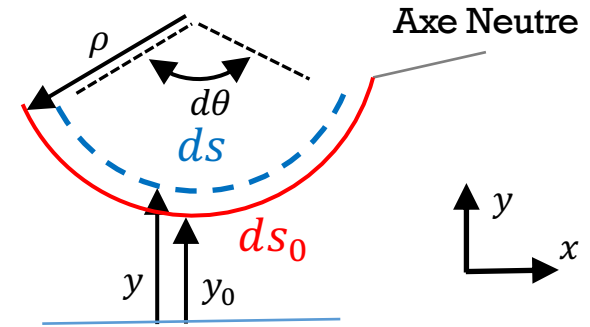
- Après déformation, l'axe neutre conserve sa longueur d'origine.
- tout autre ligne parallèle à l'axe neutre s'allonge ou se raccourcit.

$$ds_0 = \rho d\theta \text{ (longueur de l'axe neutre } y_0)$$

$$ds = (\rho - (y - y_0)) d\theta. \text{ longueur d'un axe parallèle à } y_0$$

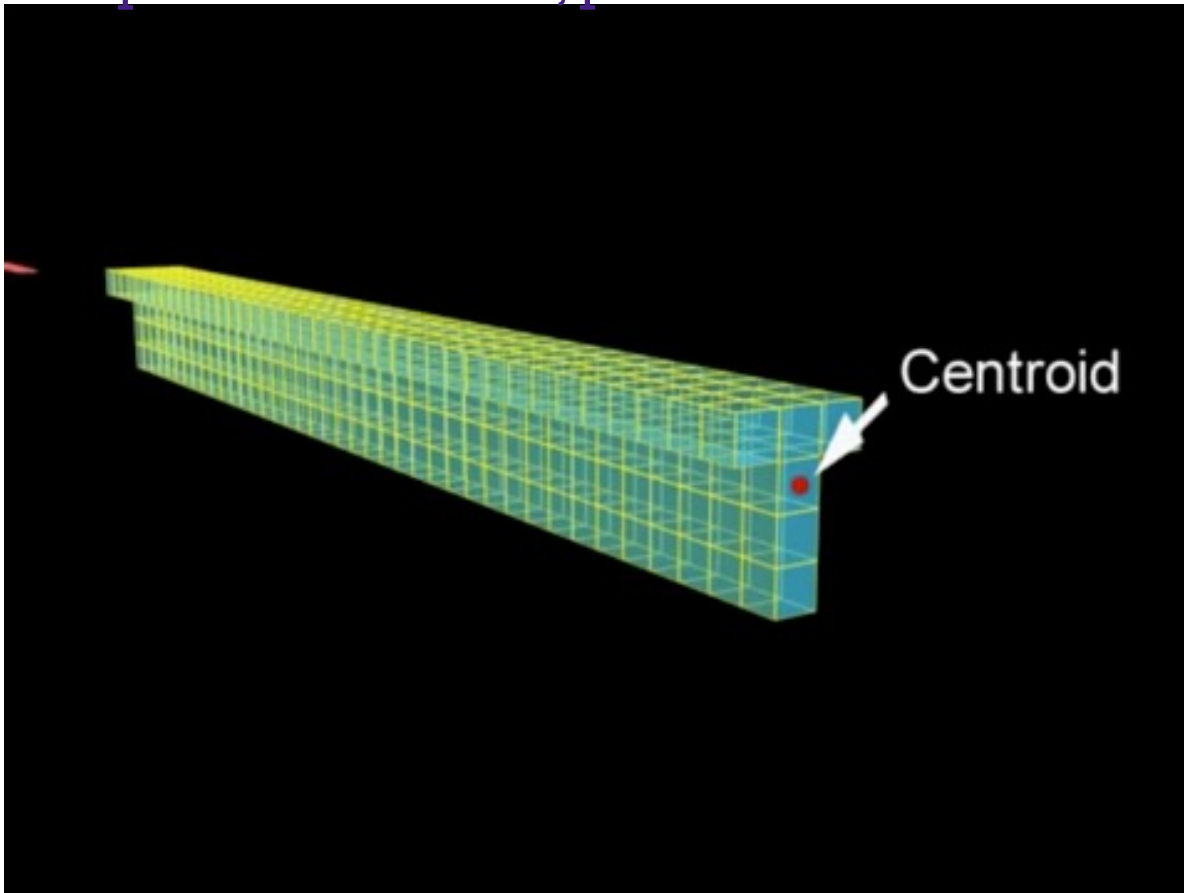
$$\varepsilon_x = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \rightarrow \boxed{\varepsilon_x(x, y) = -\frac{y - y_0}{\rho}}$$

- $y_0$  est la position de l'axe neutre (centroïde)



poutre flexion pure: pas de dépendance en  $x$  de  $\varepsilon_x$

## Déformation relative $\varepsilon_x(x, y)$ normale (= selon axe $x$ ) dans une poutre en flexion, pour section non rectangulaire



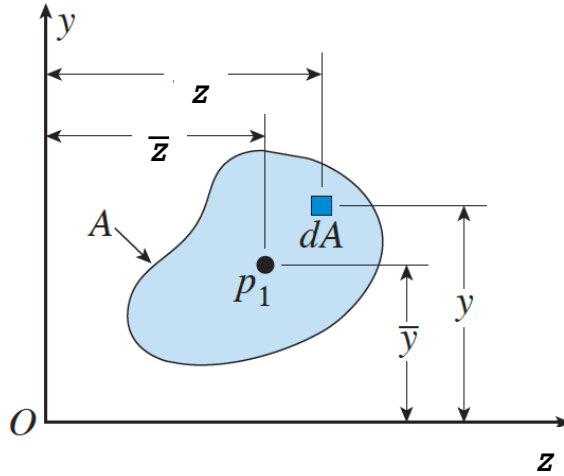
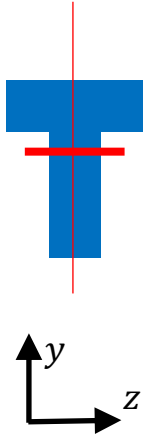
$$\varepsilon_x(y) = -\frac{y - y_0}{\rho}$$

Visualisation de  $\varepsilon_x$  pour poutre avec section en T

L'axe neutre est toujours au centroïde, et donc pas nécessairement au milieu (en  $y$ ) de la poutre.

# Où est le Centroïde de la poutre?

## Analyse de la section dans plan $yz$



Section d'une poutre

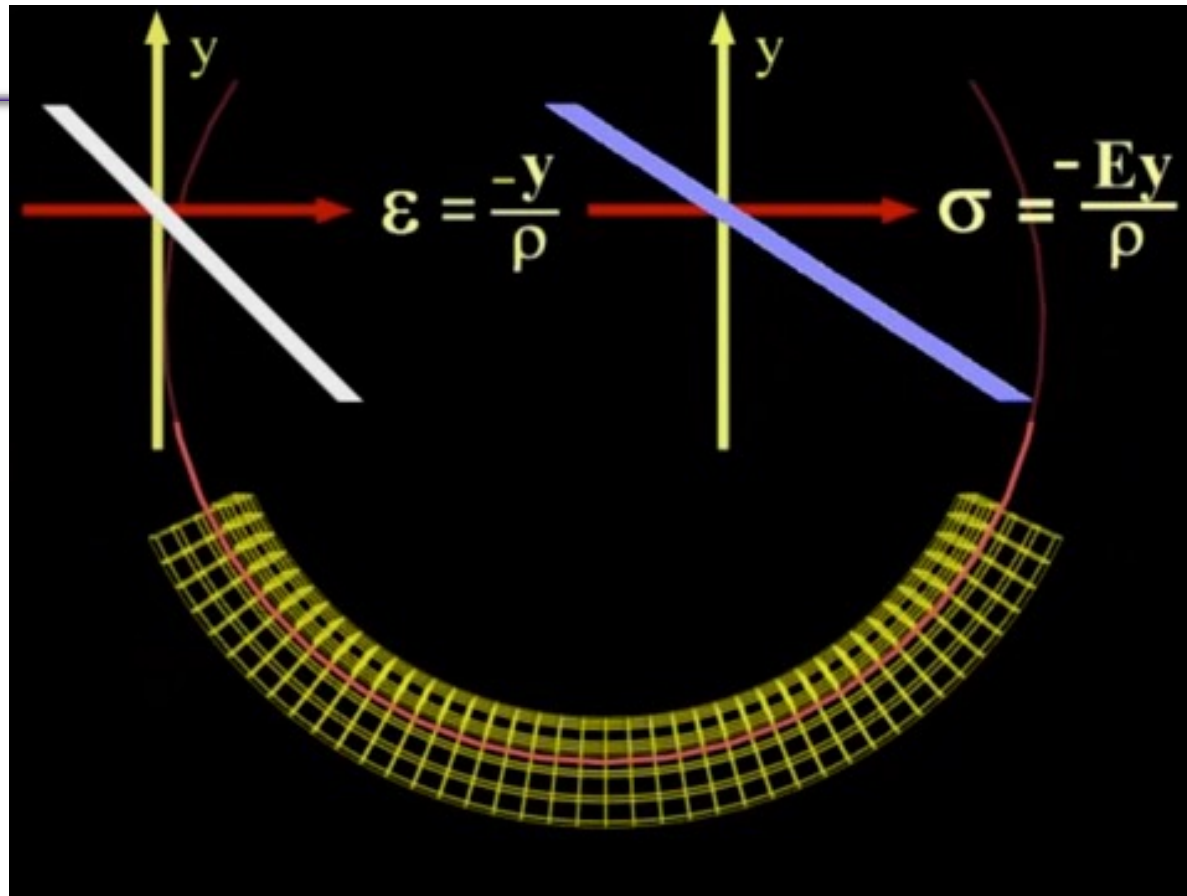
$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \quad \bar{z} = \frac{\int z dA}{A}$$

intégrales dans le plan  $yz$ .  $dA = dy dz$

Centroïde = centre de masse

Nous n'allons calculer que  $\bar{y}$  dans ce cours car nos poutres ne bougent que dans la direction  $y$

# Contraintes normales $\sigma_x(y)$ dans une poutre en flexion



Loi de Hooke dans  
la poutre

Permet de lier  
 $\epsilon_x(y)$  avec  $\sigma_x(y)$

# Contraintes normales $\sigma_x(y)$

---

■  $\varepsilon_x(y) = -\frac{y-y_0}{\rho}$

■ la loi de Hooke:

$$\sigma_x(y) = E\varepsilon_x(y) = -E\frac{y-y_0}{\rho}$$

- Rappelez-vous des matrices de souplesse et de rigidité
- Ici simple car  $\sigma_y = \sigma_z = 0$

**Pour trouver  $\sigma$  et  $\varepsilon$ , il faut connaître la position de l'axe neutre  $y_0$**

# Contraintes normales dans une poutre

---

- Pour une poutre en flexion pure : la contrainte normale est la seule contrainte induite par la flexion:

flexion pure  
 $V = 0$   
 $M = \text{constante}$

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Nous avons des déformations relatives en  $x$ , et donc aussi en  $y$  et  $z$  !!

$$\varepsilon_x(x, y) = \frac{\sigma_x(x, y)}{E}$$

$$\varepsilon_y(x, y) = \varepsilon_z(x, y) = -\nu \varepsilon_x(x, y)$$

# Comment trouver l'axe neutre?

L'axe où  $\sigma_x = 0$  (ici sans force axiale)

Prendre une section dans le plan  $yz$ , puis utiliser équations de la statique, sachant que la force axiale est 0 en flexion pure.

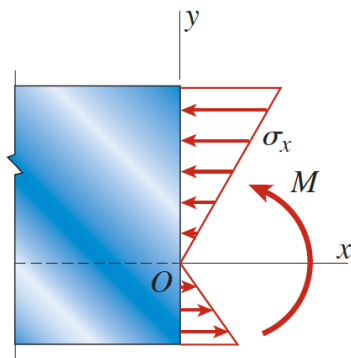
$$\sum F_x = N = 0$$

$$N = \int_A \sigma_x(x, y) dA = \iint -E \frac{(y-y_0)}{\rho} dy dz = 0$$

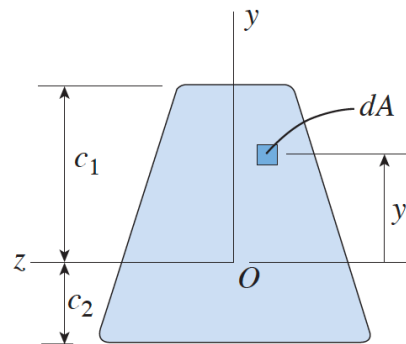
Et donc

$$y_0 = \frac{\int y dy dz}{\int dy dz} \rightarrow \text{centroïde}$$

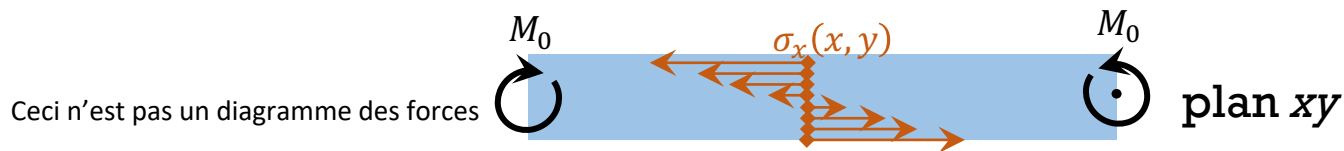
Les intégrales sont dans le plan  $yz$



plan  $xy$



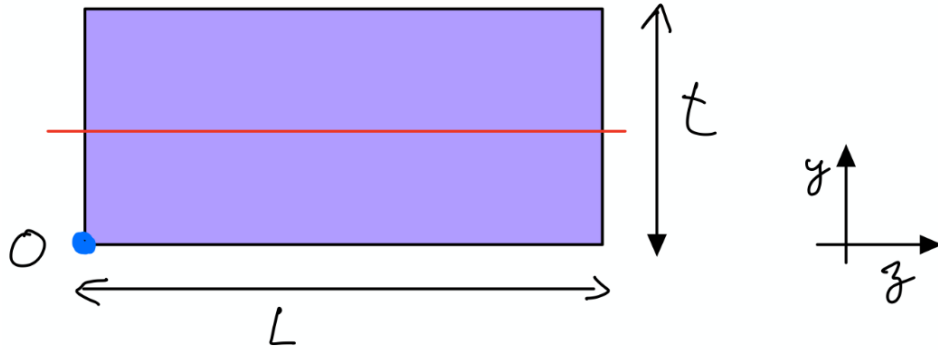
plan  $yz$



Ceci n'est pas un diagramme des forces

plan  $xy$

## Exemple: calcul de l'axe neutre pour poutre de section rectangulaire



$$y_0 = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

Les intégrales sont dans le plan yz

$$\int_A dA = \int_{y=0}^{y=t} \int_{z=0}^{z=L} dy dz = Lt$$

$$\int_A y dA = \int_{y=0}^{y=t} \int_{z=0}^{z=L} y dy dz = L \frac{t^2}{2}$$

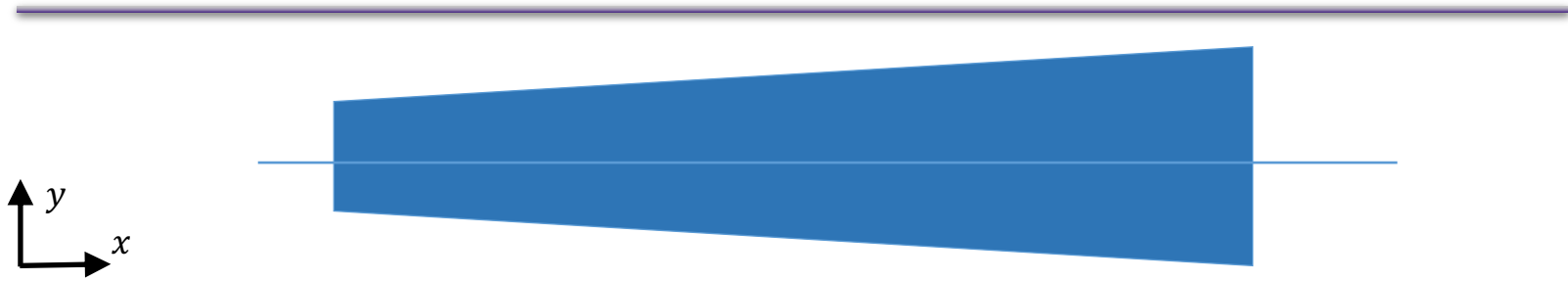
$$y_0 = \frac{L \frac{t^2}{2}}{Lt} = \frac{t}{2}$$

Ça dépend de  
votre choix de  
l'origine

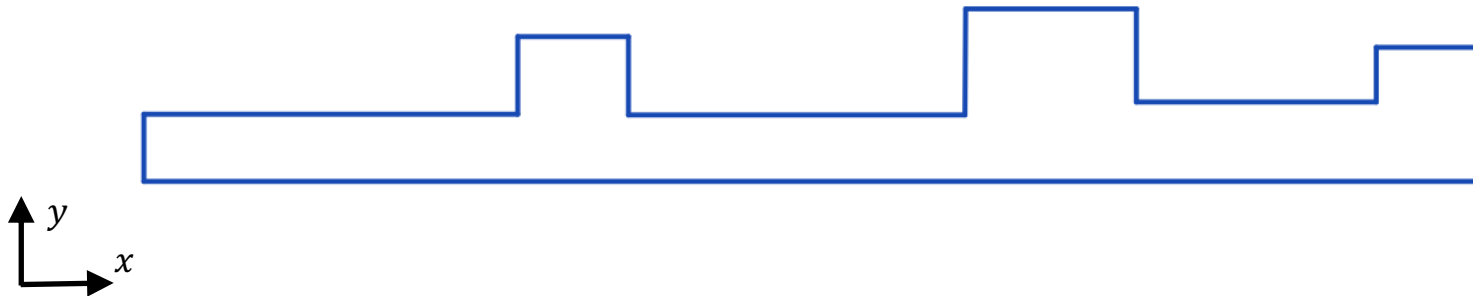
Notez que **vous choisissez**  
**l'origine** du système de  
coordonnées.

On pourrait choisir origine à  
 $t/2$  pour avoir  $y_0 = 0$

# Axe neutre, sans force axiale: axe continue?

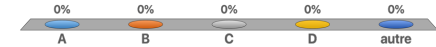
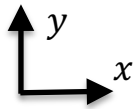


*Que se passe-t-il si la section de la poutre change, et n'est pas symétrique*



Question

Quel Dessin est juste pour l'axe neutre ?



- A. A
- B. B
- C. C
- D. D
- E. autre

**Solution**

Quel Dessin est juste pour l'axe neutre ?

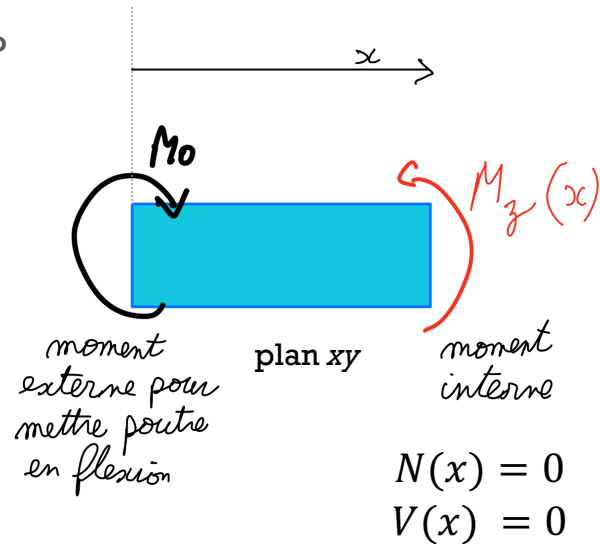
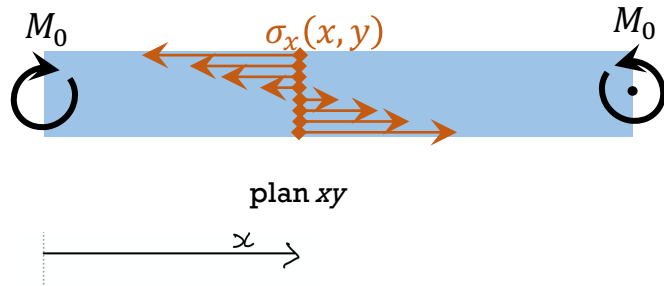
# Lien entre contrainte $\sigma_x(x, y)$ et moment de flexion $M_z(x)$

Poutre sur laquelle on impose moment  $M_0$  à chaque extrémité

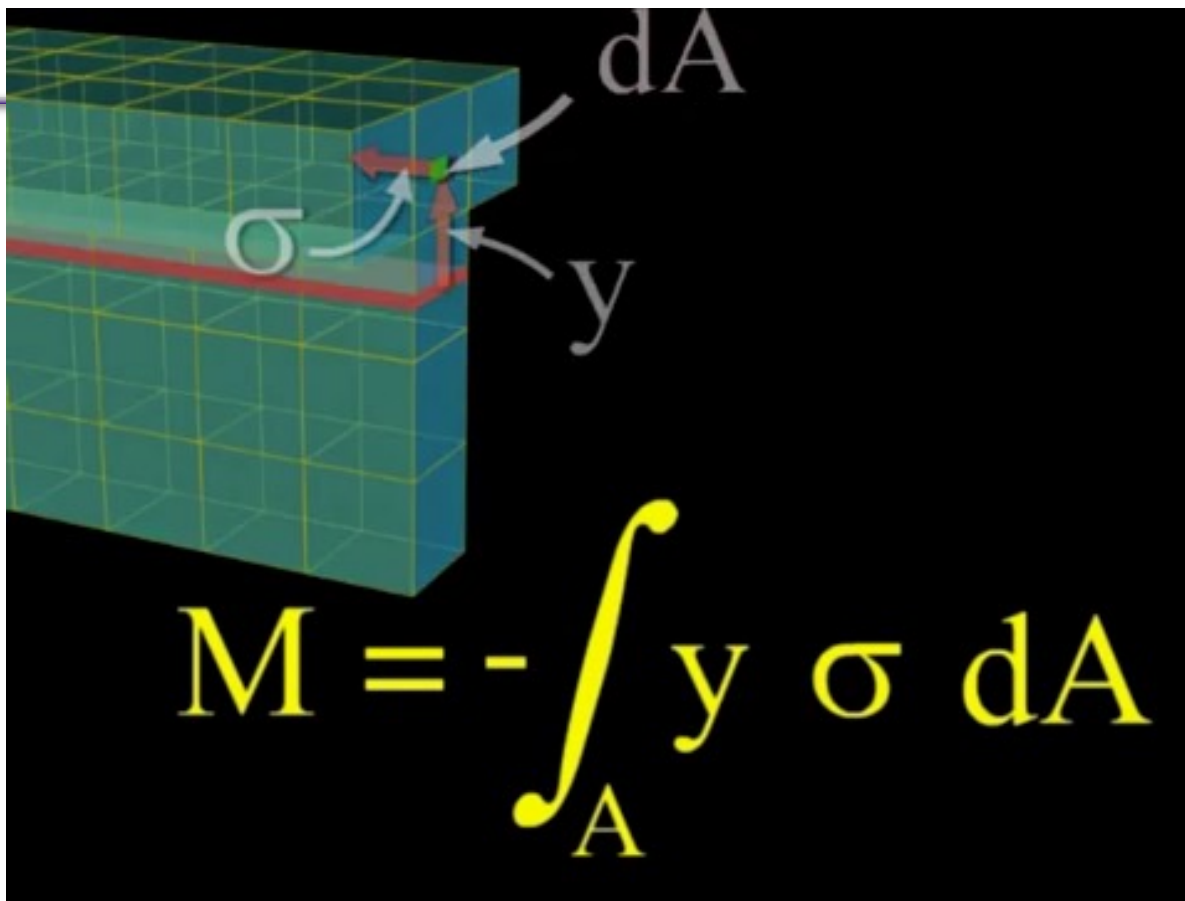
1. Pour trouver  $M_z(x)$  : "couper" la poutre (à  $x$  donné, selon axe  $y$ ), puis utiliser équations de la statique pour trouver  $M_z(x)$ , le moment interne

$$\sum M_z = M_z(x) - M_0 = 0 \rightarrow M_z(x) = M_0$$

2. Puis: exprimer  $M_z(x)$  en fonction de  $\sigma_x(x, y)$ . Mais comment?



# Lien entre contrainte $\sigma_x(x, y)$ et moment de flexion $M_z(x)$



# Lien entre contrainte $\sigma_x(x, y)$ et $M_z(x)$ : le moment d'inertie et la courbure

(sans force axiale)

- Nous pouvons calculer le moment créé par les contraintes normales par rapport à

l'axe neutre. Rappel:  $\sigma_x(x, y) = -E \frac{y-y_0}{\rho}$

- Statique: donc  $\sum M = 0$  sur chaque plan  $yz$ .  $\int_{\text{plan } yz} \text{Moments } dA = M_z(x)$

$$\blacksquare M_z(x) = - \int \underbrace{\sigma_x(x, y)}_{\text{force}} (\underbrace{y - y_0}_{\text{bras de levier}}) dA = \int_{\text{plan } yz} \frac{E}{\rho} (y - y_0)^2 dydz$$

- ainsi

$$M_z(x) = \frac{E}{\rho} I_{z, y_0}$$

avec

$$I_{z, y_0} = \int (y - y_0)^2 dydz$$

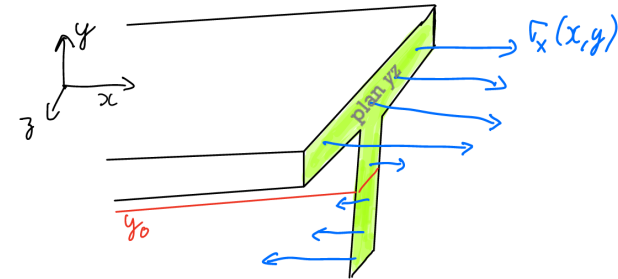
Ne dépend pas de masse  
Ne dépend pas de E

$$\frac{M_z(x)}{I_{z, y_0}} = \frac{E}{\rho}$$

$$\sigma_x(x, y) = - \frac{M_z(x)}{I_{z, y_0}} (y - y_0)$$

Formule Flexion

- Si l'origine  $y$  a été choisi sur l'axe neutre, alors  $y_0 = 0$



# Semaine 6b – partie 2

## Objectifs d'apprentissage de cette partie

- Lier contrainte et Moment de flexion par le moment d'inertie
- Trouver la contrainte maximale dans une poutre en flexion
- Calculer le moment d'inertie pour poutre de section assemblée de formes simples
- Trouver l'axe neutre pour poutre de section assemblée de formes simples

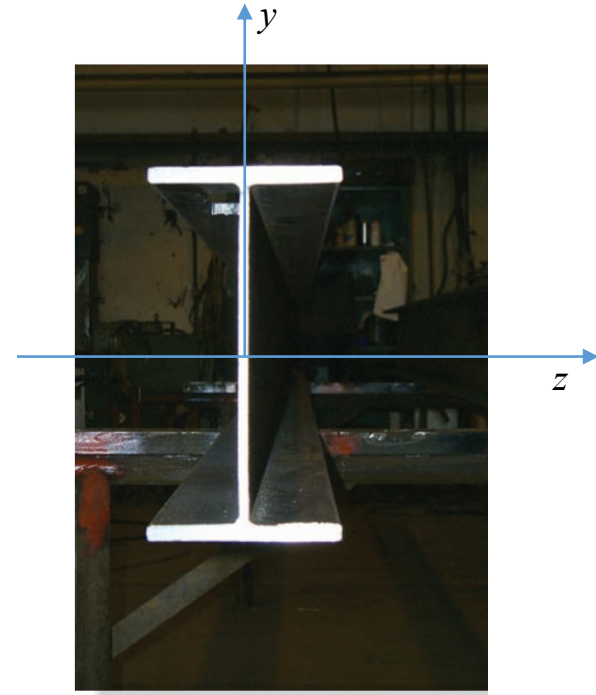
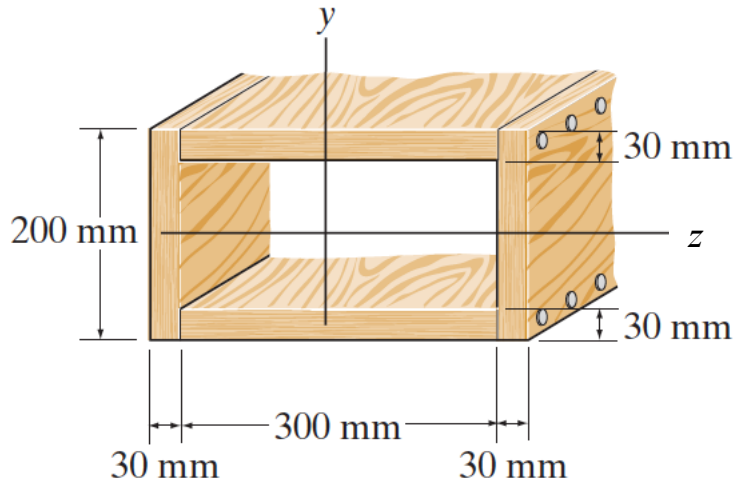
$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}}(y - y_0)$$

$$I_{z,y_0} = \int (y - y_0)^2 dA$$

# Moment quadratique (moment d'inertie)

$I_{\text{axe, position sur l'axe}}$

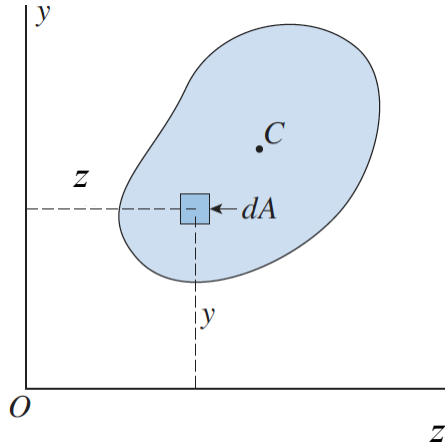
- Exprime la rigidité d'une géométrie à la flexion
- Dépend de la géométrie de la section de la poutre
- Ne dépend **pas** du matériau



Poutre: Axe long sur  $x$ , charge et déflexion sur  $y$ , flexion autour de l'axe  $z$

# Moment quadratique (moment d'inertie)

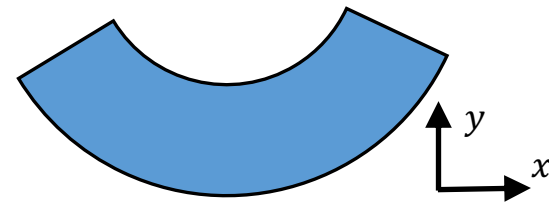
$I_{axe, position-axe}$



$$I_{z,y=0} = \int y^2 dA \quad I_{y,z=0} = \int z^2 dA$$

axe selon lequel on "enroule" ou « plie » la poutre.  
ici, ce sera l'axe z, car moment de flexion sur l'axe z, et déflexion sur l'axe y.

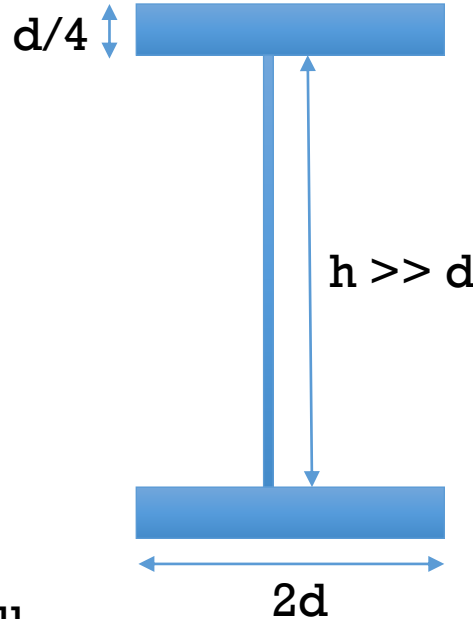
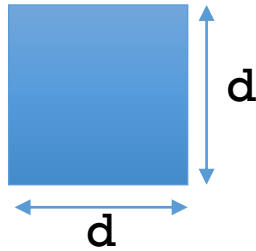
- Dépend de la géométrie de la section de la poutre
- Ne dépend pas du matériau
- Nous aller "plier" à l'axe neutre:  $I_{z,y=y_0}$



Question

# Moment d'inertie

Supposons qu'une section transversale carrée et une section transversale "I" aient la même aire, pouvez-vous comparer le moment d'inertie des deux sections transversales (sans calculs) ??



- A. A
- B. B
- C. C
- D. D

- A.  $I_{\text{car}} = I_I$
- B.  $I_{\text{car}} \gg I_I$
- C.  $I_{\text{car}} \ll I_I$
- D. cela dépend des propriétés du matériau

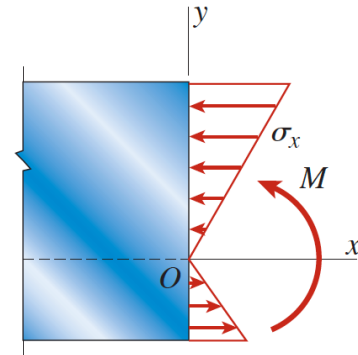
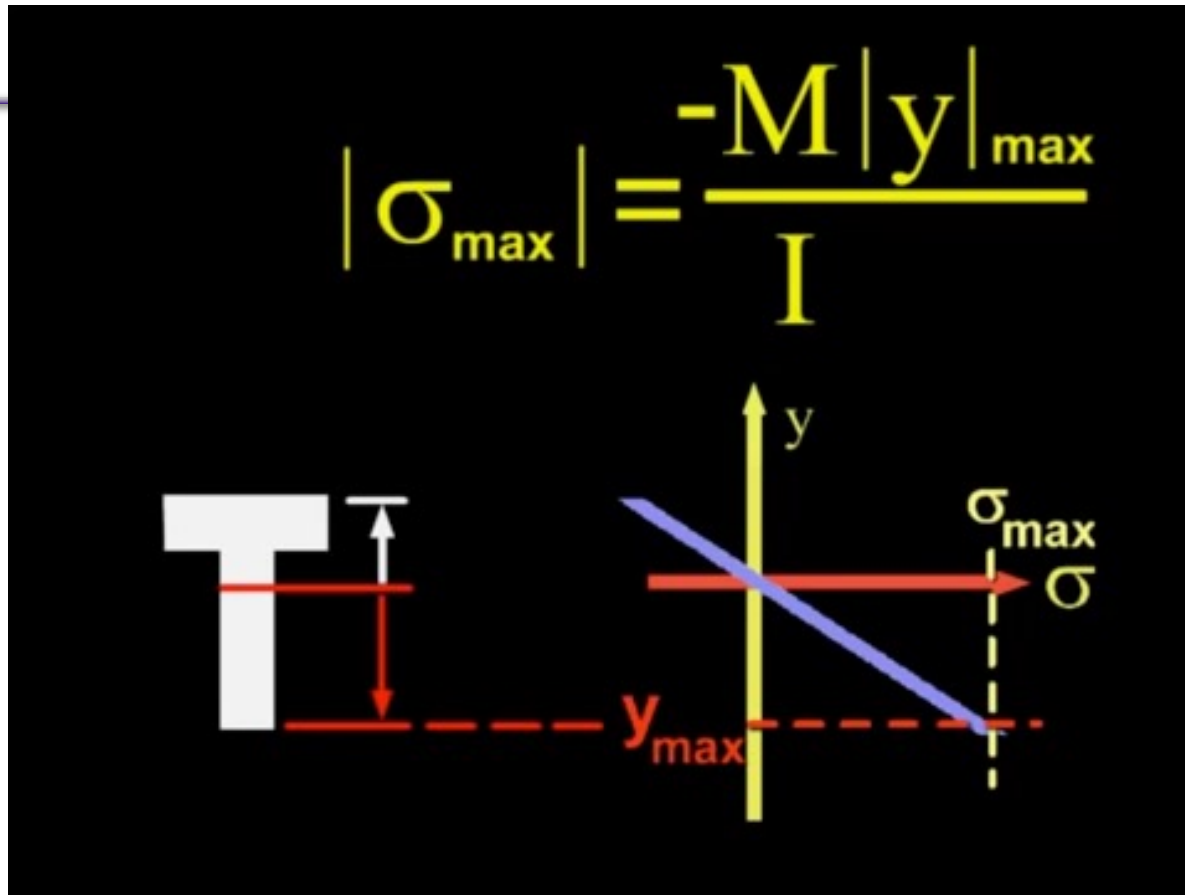


**Solution**

# Moment d'inertie

---

Contrainte MAXIMUM: toujours en haut ou en bas de la poutre

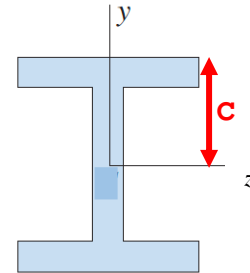


# Contrainte max dans un poutre en flexion pure

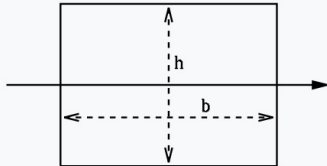
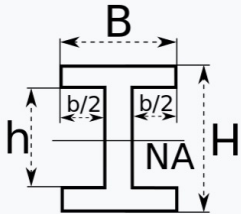
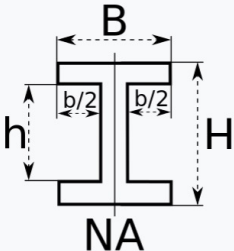
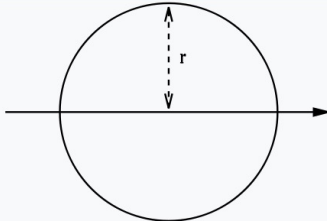
- Contrainte maximum:

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}}(y - y_0) \quad \rightarrow \quad |\sigma_{x,max}(x)| = |M_z(x)| \frac{c}{I_{z,y_0}} = \frac{|M_z(x)|}{S}$$

- $c$  est la distance maximale entre l'axe neutre et bord de la poutre
- $S$  est le *module d'inertie élastique*: donne l'efficacité d'une section transversale pour résister à la flexion
- $S = \text{elastic section modulus (in English)}$
- $S = I / c$
- **grand  $S$  → petite contrainte générée pour un moment de flexion donné**



Section modulus equations<sup>[3]</sup>

Cross-sectional shape	Figure	Equation	Comment
Rectangle		$S = \frac{bh^2}{6}$	Solid arrow represents <b>neutral axis</b>
doubly symmetric <b>I-section</b> (major axis)		$S_x = \frac{BH^2}{6} - \frac{bh^3}{6H}$ $S_x = \frac{I_x}{y},$ with $y = \frac{H}{2}$	NA indicates <b>neutral axis</b>
doubly symmetric <b>I-section</b> (minor axis)		$S_y = \frac{B^2(H-h)}{6} + \frac{(B-b)^3h}{6B}$ <sup>[4]</sup>	NA indicates <b>neutral axis</b>
Circle		$I_z = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$ $c = \frac{d}{2}$ $S = \frac{\pi d^3}{32}$	Solid arrow represents <b>neutral axis</b>

# Comment trouver le centroïde et le moment d'inertie d'une section de poutre?

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}} (y - y_0)$$

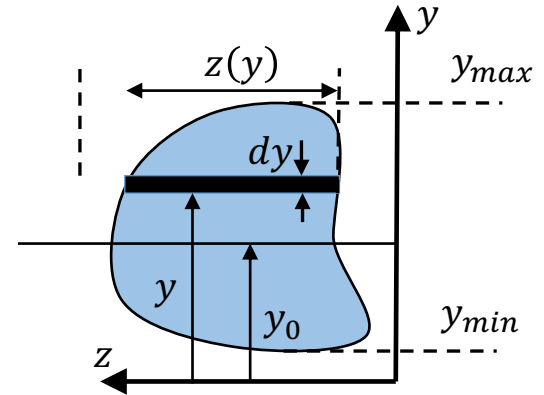
Centroïde

$$y_0 = \frac{\int_A y dA}{A} = \frac{\int_A y dy dz}{\int_A dy dz} = \frac{\int_{y_{min}}^{y_{max}} y z(y) dy}{\int_{y_{min}}^{y_{max}} z(y) dy}$$

Moment d'inertie autour de l'axe z passant par y<sub>0</sub>

$$I_{z,y_0} = \int_A (y - y_0)^2 dA = \int_{y_{min}}^{y_{max}} (y - y_0)^2 z(y) dy$$

*I<sub>z,y<sub>0</sub></sub>* dépend de y<sub>0</sub>



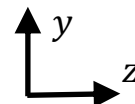
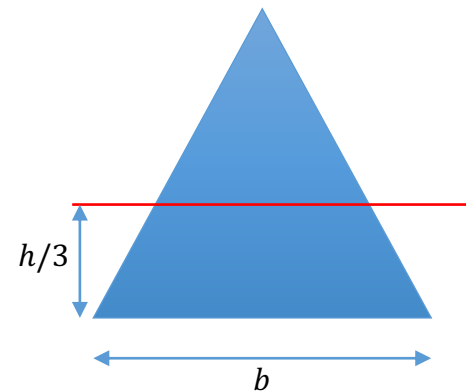
section de la poutre

Les intégrales sont dans le plan yz. **Attention à l'origine que vous choisissez.**

$$y_0 = \frac{\int_A y dA}{A} = \frac{\int_A y dy dz}{\int_A dy dz} = \frac{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} y z(y) dy}{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} z(y) dy}$$

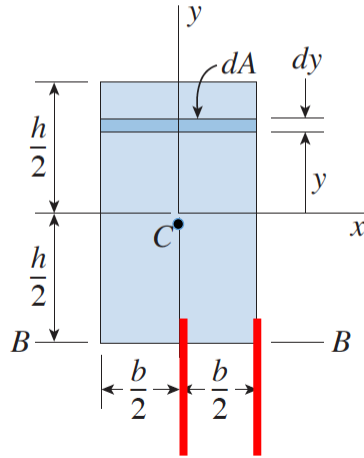
Attention aux bornes pour les intégrales dans le plan yz

- Si section rectangulaire: facile
- Si autre, pratique de passer par  $z(y)$



# Moment d'inertie (quadratique)

rappel



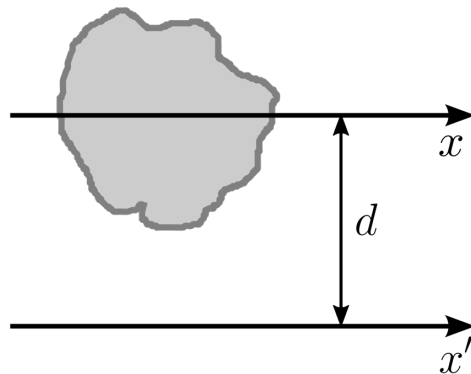
$$I_{y, x=0} = \int x^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 h dx = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{x, y=0} = \int y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}$$

- On « plie » selon un axe donné (exemple ci-dessus selon  $x$  ou  $y$ ). Pour nos poutres avec l'axe long en  $x$  et la charge selon  $y$ , nous chercherons *toujours*  $I_z$
- Le choix de l'axe origine est important! Origine = axe ou on plie/tourne. Ici les axes passent par ce le centre de l'objet.  $I_{y, x=0} \neq I_{y, x=b/2}$
- Si axe pas selon centre, utiliser Steiner = théorème des axes parallèles)

# Steiner, si on déplace l'axe

---



$$I_{x'} = I_x + Ad^2$$

where

$A$  is the area of the shape, and

$d$  is the perpendicular distance between the  $x$  and  $x'$  axes.

# Bending moment of inertia

**TABLE A.1 Properties of sections**

NOTATION:  $A$  = area (length)<sup>2</sup>;  $y$  = distance to extreme fiber (length);  $I$  = moment of inertia (length)<sup>4</sup>;  $r$  = radius of gyration (length);  $Z$  = plastic section modulus (length<sup>3</sup>); SF = shape factor. See Sec. 8.15 for applications of  $Z$  and SF

Form of section	Area and distances from centroid to extremities	Moments and products of inertia and radii of gyration about central axes	Plastic section moduli, shape factors, and locations of plastic neutral axes
1. Square 	$A = a^2$ $y_c = x_c = \frac{a}{2}$ $y'_c = 0.707a \cos\left(\frac{\pi}{4} - z\right)$	$I_x = I_y = I'_x = \frac{1}{12} a^4$ $r_x = r_y = r'_x = 0.2887a$	$Z_x = Z_y = 0.25a^3$ $SF_x = SF_y = 1.5$
2. Rectangle 	$A = bd$ $y_c = \frac{d}{2}$ $x_c = \frac{b}{2}$	$I_x = \frac{1}{12} bd^3$ $I_y = \frac{1}{12} db^3$ $I_x > I_y$ if $d > b$ $r_x = 0.2887d$ $r_y = 0.2887b$	$Z_x = 0.25bd^2$ $Z_y = 0.25db^2$ $SF_x = SF_y = 1.5$
3. Hollow rectangle 	$A = bd - b_i d_i$ $y_c = \frac{d}{2}$ $x_c = \frac{b}{2}$	$I_x = \frac{bd^3 - b_i d_i^3}{12}$ $I_y = \frac{db^3 - d_i b_i^3}{12}$ $r_x = \left(\frac{I_x}{A}\right)^{1/2}$ $r_y = \left(\frac{I_y}{A}\right)^{1/2}$	$Z_x = \frac{bd^2 - b_i d_i^2}{4}$ $SF_x = \frac{Z_x d}{2I_x}$ $Z_y = \frac{db^2 - d_i b_i^2}{4}$ $SF_y = \frac{Z_y b}{2I_y}$

# Centroïde

Pas nécessairement dans l'objet

avec symétrie

Fig. 12-2

Area with one axis of symmetry

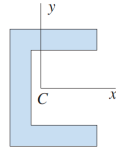


Fig. 12-3

Area with two axes of symmetry

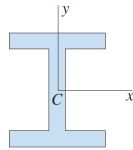
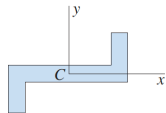
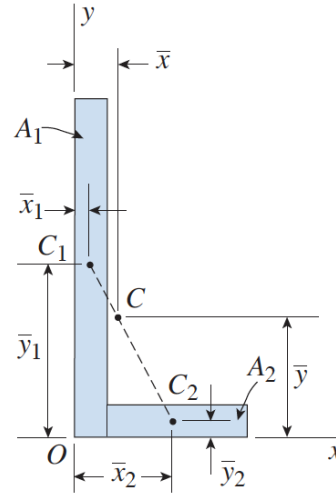


Fig. 12-4

Area that is symmetric about a point



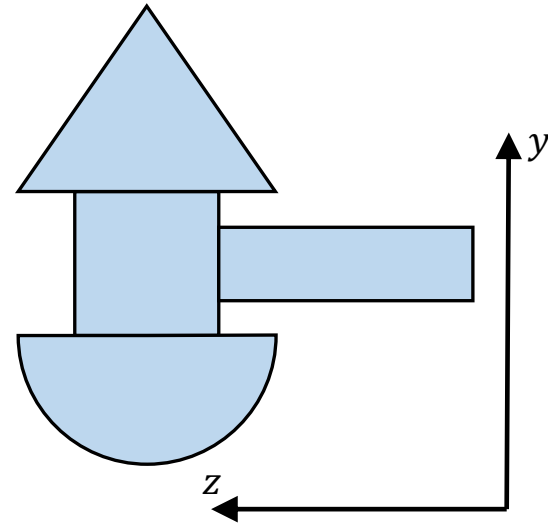
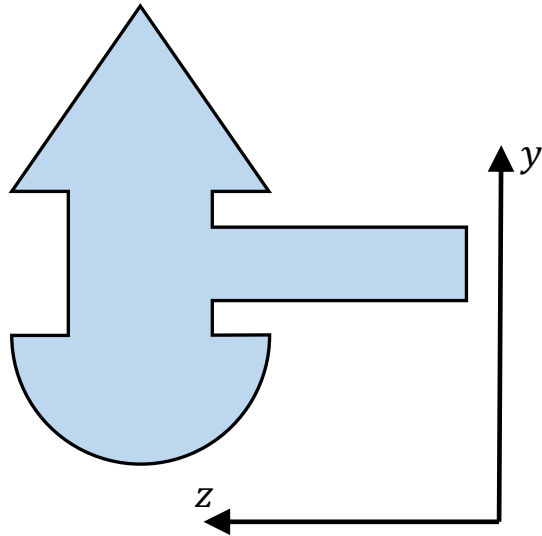
forme complexe



$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

# Comment trouver le centroïde et le moment d'inertie d'une section de poutre plus complexe

section d'une poutre, union de différentes formes



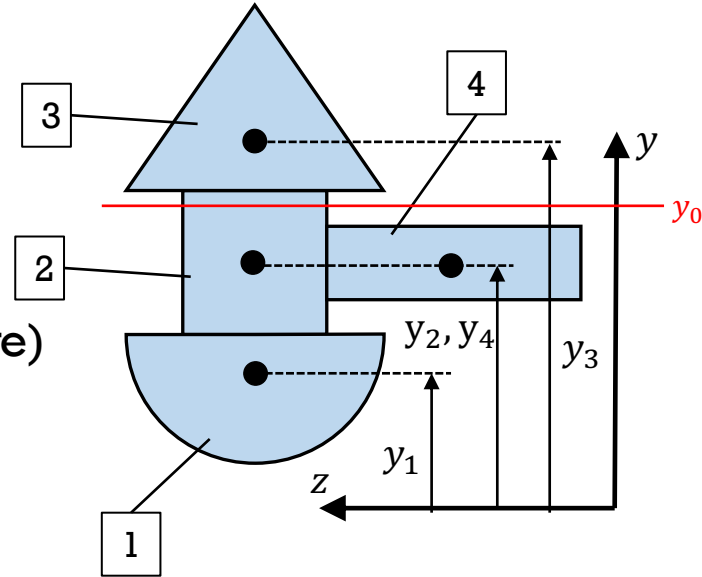
# Assembler les morceaux pour trouver le centroïde et moment d'inertie $I$ d'un objet complexe

- Centroïde d'un assemblage

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i A_i}{\sum_{i=1}^N A_i}$$

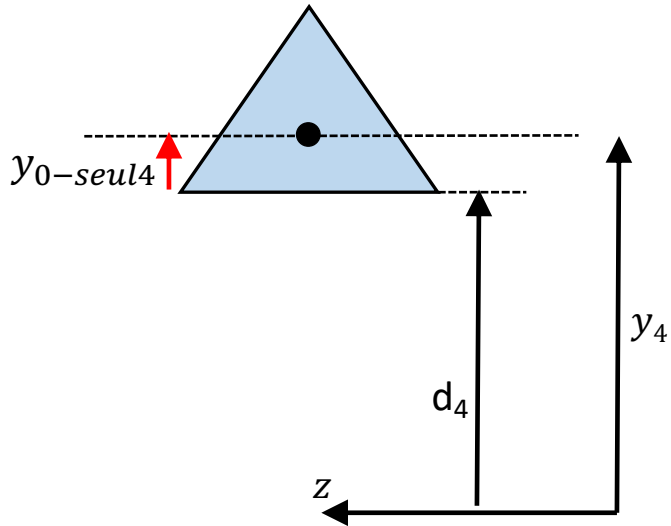
- Moment d'inertie (autour de l'axe neutre)

$$I_{z,y_0} = \sum_{i=1}^N I_{z,y_i} + \sum_{i=1}^N A_i (y_i - y_0)^2$$

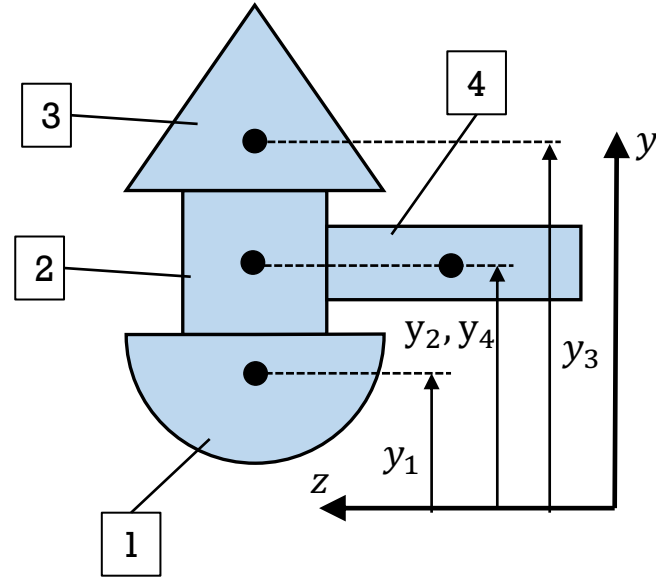


- on commence par analyser chaque sous-élément.  $A_i$  = aire de l'élément  $i$
- $y_i$  est le centroïde de l'élément  $i$ , par rapport à l'origine (pas par rapport à l'élément)
- $I_{z,y_i}$  est le moment d'inertie de l'élément  $i$ , pour « plier » par l'axe qui passe par le centroïde de l'objet  $i$ . (c'est le  $I$  « intuitif » pour chaque élément)
- On peut soustraire les « trous »

- Centroïde d'un assemblage



$$y_4 = d_4 + y_{0-seul4}$$



$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i A_i}{\sum_{i=1}^N A_i}$$

## Exemple 0: Trouver $S$ pour une poutre avec cette section

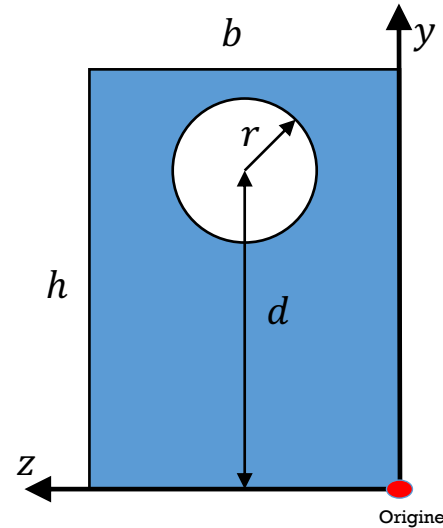
---

Rappel

$$S = I / c$$

$c$  est la distance maximale à l'axe neutre

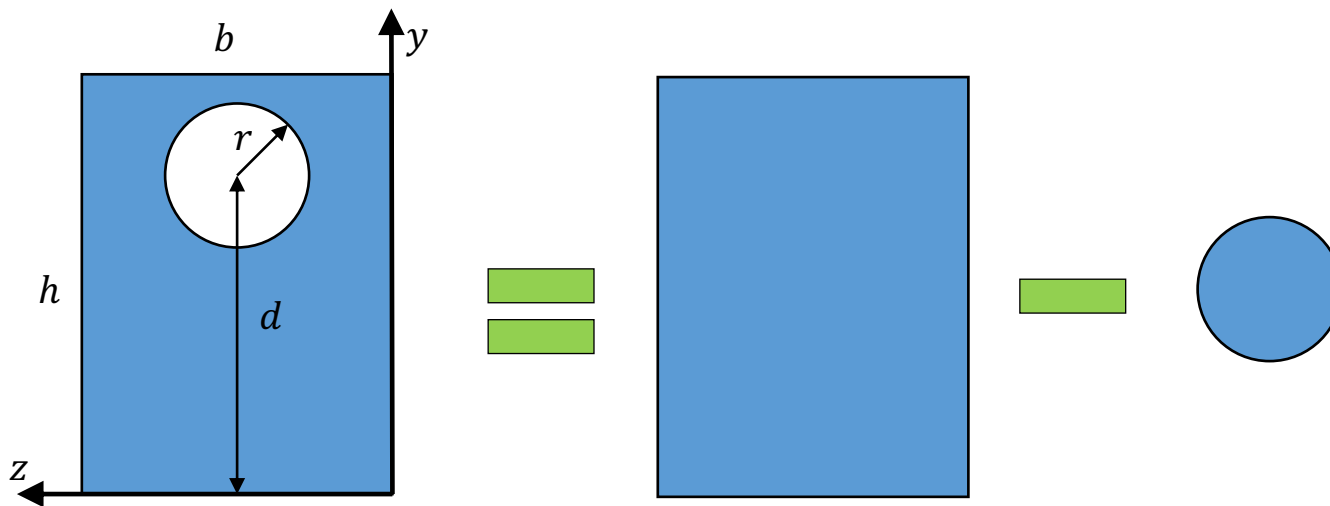
Il nous faut donc trouver:  $I$  et  $c$  (et donc  $y_0$ )



# Exemple 0

Solution. On décompose la forme complexe en 2 formes simples

---



$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i A_i}{\sum_{i=1}^N A_i}$$

# Exemple 0

Solution: calcul des centroïdes de chaque élément et de  $y_0$

• Surfaces  $A_{Rec} = bh$  Surface du rectangle

$A_{Cir} = \pi r^2$  Surface du cercle

$$A_{tot} = A_{Rec} - A_{Cir} = bh - \pi r^2$$

$$y_{\text{élément}} = \frac{\int y dA}{\int dA} \rightarrow \text{centroïde}$$

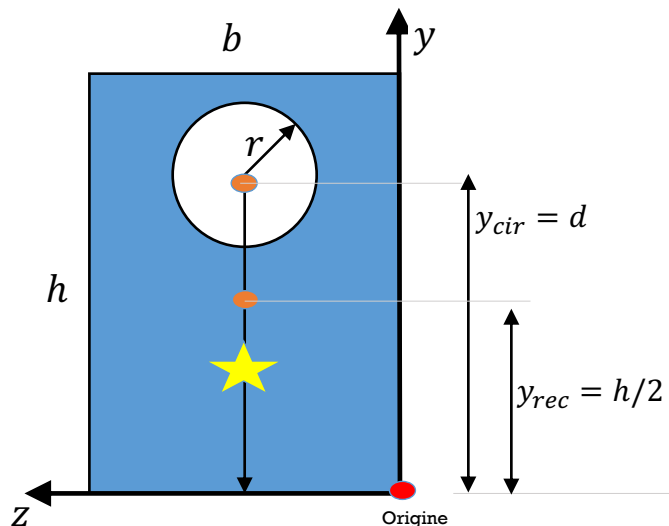
• Centroïdes  
(à partir de  $y = 0$ )  $y_{Rec} = \frac{h}{2}$  Centroïde du rectangle

$y_{Cir} = d$  Centroïde du cercle (pas  $r/2$  !)

$$y_0 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i A_i}{\sum_{i=1}^N A_i}$$

$$y_0 = \frac{y_{Rec} A_{Rec} - y_{Cir} A_{Cir}}{A_{tot}} = \frac{\left(\frac{h}{2}\right) bh - d\pi r^2}{bh - \pi r^2}$$

$$y_0 = \frac{\frac{bh^2}{2} - \pi dr^2}{bh - \pi r^2}$$



# Exemple 0

Solution: calcul du moment d'inertie complet

## Moments d'inertie

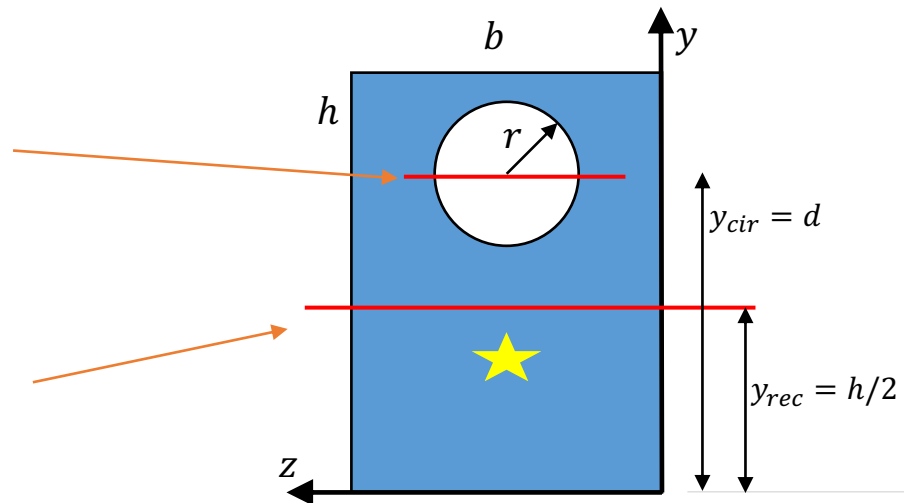
$$I_{Cir} = \frac{1}{4} \pi r^4 \quad \text{Moment d'inertie du cercle par l'axe passant par son centroïde } y_{cir}$$

$$I_{Rec} = \frac{1}{12} b h^3 \quad \text{Moment d'inertie du rectangle par l'axe passant par son centroïde } y_{rec}$$

$$I_{z,y_0} = \sum_{i=1}^N I_{z,y_i} + \sum_{i=1}^N A_i (y_i - y_0)^2$$

$$I_{y_0} = I_{Rec} - I_{Cir} + A_{Rec} (y_{Rec} - y_0)^2 - A_{Cir} (y_{Cir} - y_0)^2$$

(puis algèbre)



$$y_0 = \frac{\left(\frac{h}{2}\right) b h - d \pi r^2}{b h - \pi r^2}$$

# Exemple 0

Finalemment: calcul de  $c$  et de  $S$

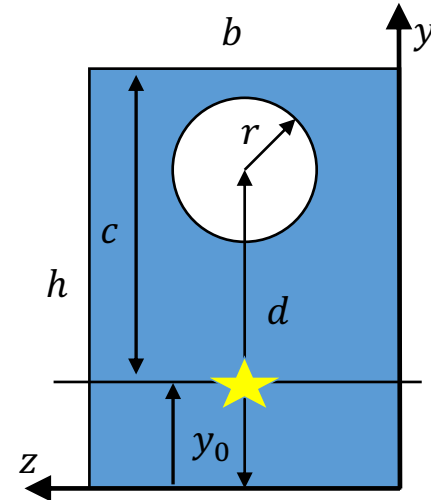
---

- Distance maximale de l'axe neutre

$$c = h - y_0$$

- et enfin, le module de section élastique

$$S = \frac{I_{y_0}}{c} = \frac{I_{y_0}}{h - y_0}$$

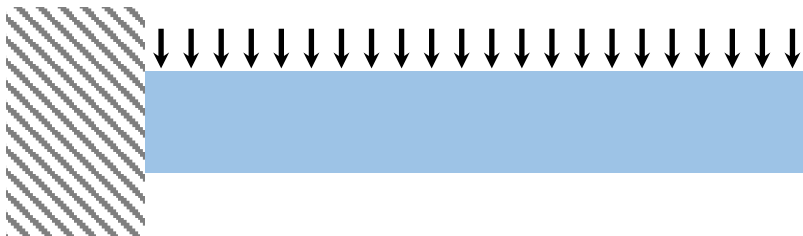


# Exemple 1

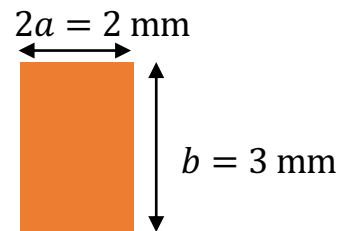
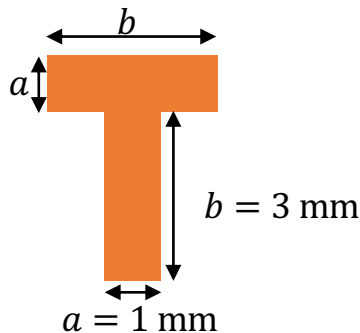
Deux poutres de section différentes sous une charge uniforme (propre poids)

Poutre encastrée. 2 poutres qui ont la même masse par longueur, mais pas la même section

**Trouvez celle qui à le « S » le plus grand (c-à-d les contraintes les plus faibles)**



$$|\sigma_{x,max}(x)| = \frac{|M_z(x)|}{S}$$



# Exemple 1

Poutre avec force distribuée uniforme.

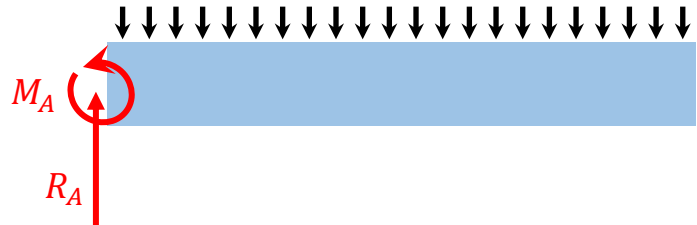
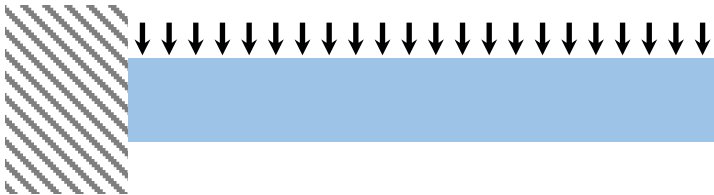
- Etape 1 - Nous calculons le moment de flexion  $M_z(x)$ , puis sa valeur maximale.  
Poutre de section  $A$ , densité  $\rho$

$$q(x) = \rho Ag$$

$$V(x) = \rho Ag(L - x)$$

$$M(x) = -\rho Ag \frac{(L - x)^2}{2}$$

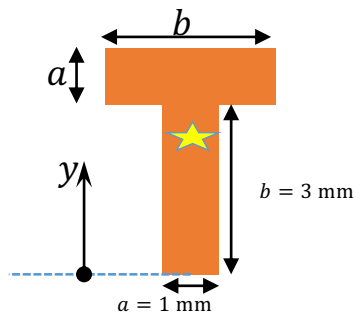
$$|M|_{Max} = |M(x = 0)| = \rho Ag \frac{L^2}{2}$$



# Exemple 1

Poutre avec force distribuée uniforme.

- Etape 2 – trouver a) la position  $y_0$  de l'axe neutre, et b) la distance max  $c$  entre l'axe neutre et le bord de la poutre.

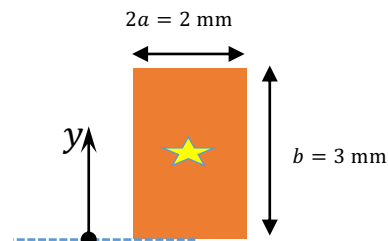


$$A = 2ab$$

$$y_0 = \frac{a \int_0^b y dy + b \int_b^{b+a} y dy}{2ab} = \frac{3b + a}{4}$$

$$c = y_0 = \frac{3b + a}{4} = 2.5 \text{ mm}$$

$$y_0 = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

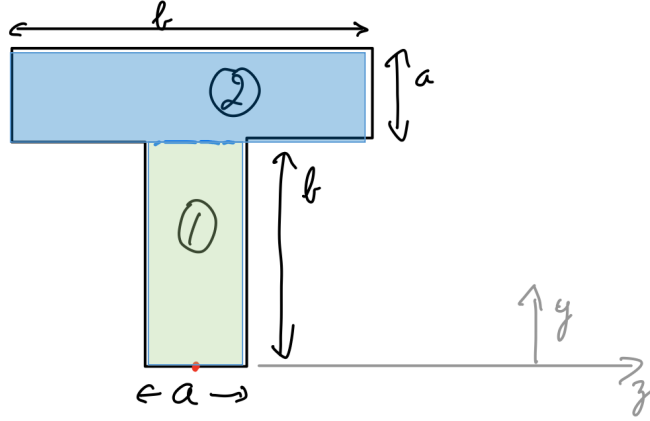


$$A = 2ab$$

$$y_0 = \frac{b}{2}$$

$$c = y_0 = \frac{b}{2} = 1.5 \text{ mm}$$

(voir prochain slide pour l'intégrale)



$$A = ab + ab = 2ab$$

$$\int y dA = \int_{\textcircled{1}} y dA + \int_{\textcircled{2}} y dA$$

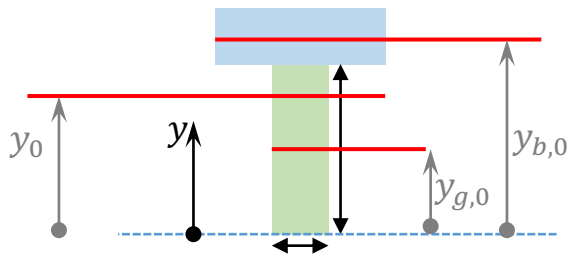
$$= \int_{z=-a/2}^{z=a/2} \int_{y=0}^{y=b} y dz dy + \int_{z=-b/2}^{z=b/2} \int_{y=b}^{y=b+a} y dz dy$$

$$= a \int_0^b y dy + b \int_b^{b+a} y dy$$

# Exemple 1

## Poutre sous charge uniforme

- Etape 3v1 - Nous calculons le moment d'inertie, selon  $z$ , de l'assemblage, utilisant Steiner



$$y_0 = \frac{3b + a}{4}$$

$$y_{g,0} = \frac{b}{2}$$

$$y_{b,0} = b + \frac{a}{2}$$

$$I_{z,y_0} = \sum_{i=1}^N I_{z,y_i} + \sum_{i=1}^N A_i (y_i - y_0)^2$$

$$I_{z,y_0} = I_{green,y_0} + I_{blue,y_0}$$

$$= I_{green,y_{g,0}} + A_{green} \cdot (y_0 - y_{g,0})^2 + I_{blue,y_{b,0}} + A_{blue} \cdot (y_0 - y_{b,0})^2$$

$$I_{z,y_0} = \frac{ab^3}{12} + \frac{ba^3}{12} + ab \left( \frac{b+a}{4} \right)^2 + ab \left( \frac{b+a}{4} \right)^2$$

$$I_{z,y_0} = \frac{ab^3}{12} + \frac{ba^3}{12} + \frac{ab(b^2 + 2ab + a^2)}{8} =$$

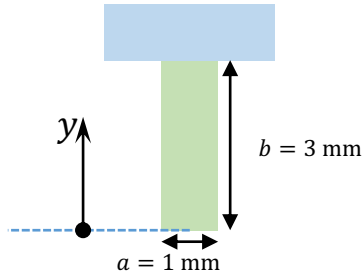
$$I_{z,y_0} = \frac{5ab^3 + 5ba^3 + 6a^2b^2}{24} = 8.5 \text{ mm}^4$$

# Exemple 1

## Poutre sous charge uniforme

- Etape 3v2 - Nous calculons le moment d'inertie (MÉTHODE alternative, par intégrale directement plutôt que par Steiner)

$$I_{z,y_0} = \int (y - y_0)^2 dA = \int (y - y_0)^2 dz dy$$



$$\begin{aligned} I_{z,y_0} &= I_{green,y_0} + I_{blue,y_0} = a \int_0^b (y - y_0)^2 dy + b \int_b^{b+a} (y - y_0)^2 dy \\ &= a \left. \frac{(y - y_0)^3}{3} \right|_0^b + b \left. \frac{(y - y_0)^3}{3} \right|_b^{b+a} \end{aligned}$$

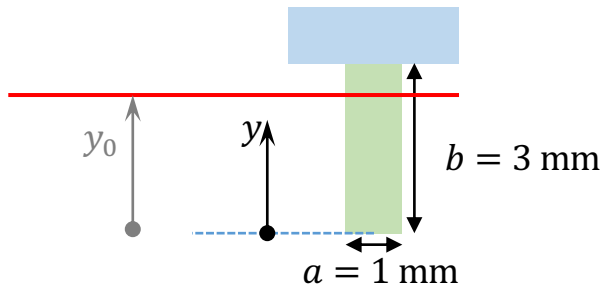
$$\begin{aligned} I_{z,y_0} &= \frac{a}{3} \left[ \left( b - \frac{3b+a}{4} \right)^3 + \left( \frac{3b+a}{4} \right)^3 \right] + \frac{b}{3} \left[ \left( b+a - \frac{3b+a}{4} \right)^3 - \left( b - \frac{3b+a}{4} \right)^3 \right] \\ &= \frac{1}{3} [0.5^3 + 2.5^3 + 1.5^3 \cdot 3 - 3 \cdot 0.5^3] \text{ mm}^4 = 8.5 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

# Exemple 1

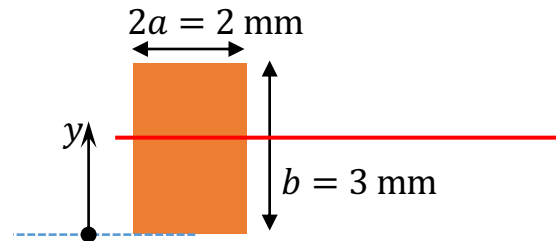
## Poutre sous charge uniforme

$$I_{z,y_0} = \int (y - y_0)^2 dA$$

- Etape 3 - Nous comparons les moments d'inertie, selon z



$$I_{z,y_0} = 8.5 \text{ mm}^4$$



$$\begin{aligned} I_{z,y_0} &= \int \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 dA = \\ &= 2a \int_0^b \left(y^2 - by + \frac{b^2}{4}\right) dy = \\ &= \frac{ab^3}{6} = 4.5 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

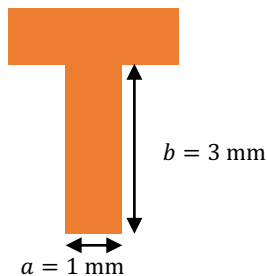
remarquez que  $I_{\text{barre\_en\_t}}$  est presque 2x  $I_{\text{barre\_rectangulaire}}$

# Exemple 1

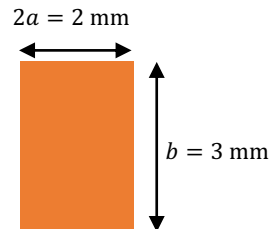
## Poutre sous charge uniforme

$$S = \frac{I_{y_0}}{c} \quad |\sigma_{x,max}(x)| = \frac{|M_z(x)|}{S}$$

- Etape 4 - Nous calculons le module de section élastique S



$$S = \frac{8.5}{2.5} = 3.4 \text{ mm}^3$$

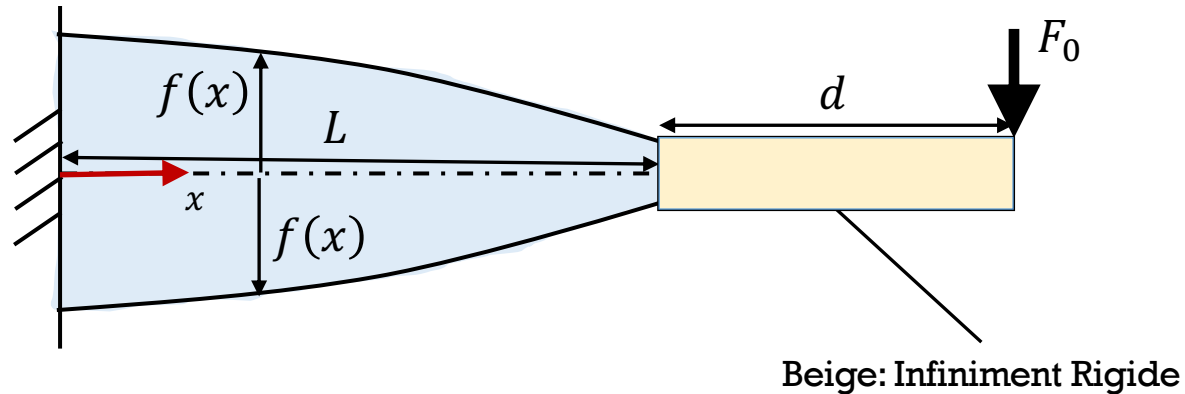


$$S = \frac{4.5}{1.5} = 3 \text{ mm}^3$$

- Il y aura donc des contraintes maximum très semblables pour les deux cas pour un même moment imposé, malgré le fait que la barre “en T” soit 2x plus rigide.
- Mais la barre en T aura une déflexion environ 2x plus faible

## Exemple 2

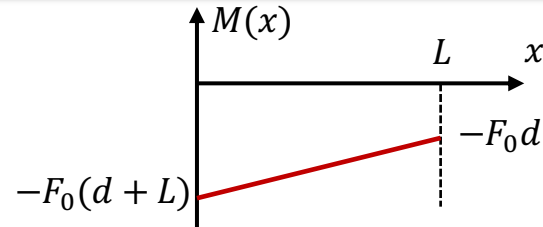
- Une poutre de section rectangulaire, de longueur  $L$ , largeur  $b$  et épaisseur  $2f(x)$  est chargée comme indiqué par une Force  $F_0$ .
- Trouvez  $f(x)$  pour avoir la même contrainte maximum tout le long de la poutre bleue.



# Solution 2

- Moment de flexion:  $M(x) = -F_0(d + L - x)$

- Contrainte Maximum :  $|\sigma_{x,max}(x)| = \frac{|M_z(x)|}{I_{z,y_0}} c$



- Moment d'inertie:  $I_{z,y_0}(x) = \frac{1}{12} [2f(x)]^3 b$

- Distance maximale de l'axe neutre:  $c = f(x)$

- Contrainte Maximum :  $|\sigma_{x,max}(x)| = \frac{|M_z(x)|}{I_{z,y_0}} c = \frac{3F_0(d+L-x)}{2bf^2(x)} = \sigma_0$

- $f(x) = \sqrt{\frac{3F_0(d+L-x)}{2b\sigma_0}}$

