

## Série 9 – solution

### Problème 9.1 – Systèmes Hyperstatiques - Support Elastique – Charge distribuée

Pour la poutre de la figure 9.1 . **sans calculs**

- i) Dessinez le diagramme des forces de la poutre bleu
- ii) Calculez le nombre de redondants
- iii) Indiquez votre choix pour résoudre le problème
- iv) Dessinez les systèmes isostatiques nécessaires pour résoudre le problème.
- v) Donnez les équations de compatibilité en fonction de la flèche ou sa dérivée à un/plusieurs points. **Ne pas résoudre les équations de compatibilité**, nous vous demandons simplement les poser.

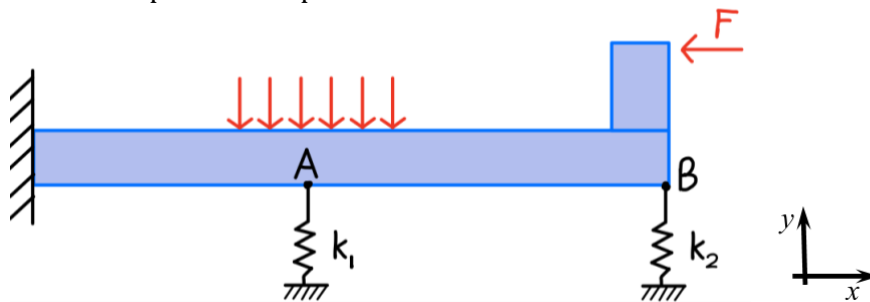
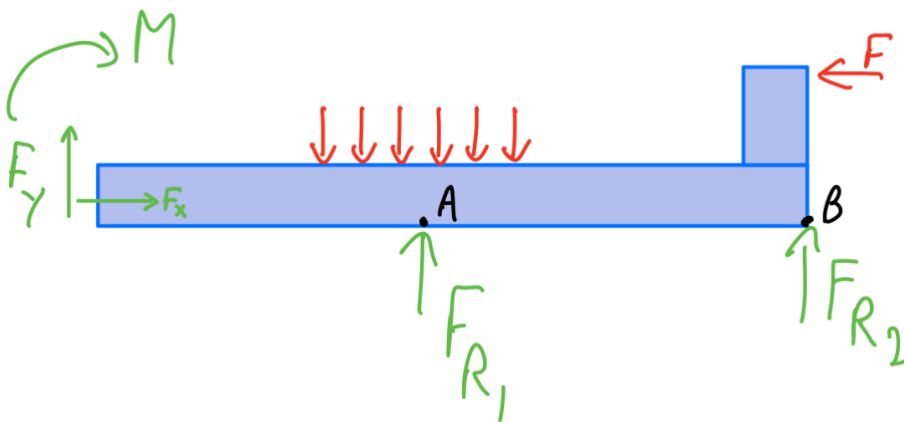


Figure 9.1 : La poutre est encastree à gauche. Il y a des ressorts en A et en B de constante de ressort  $k_1$  et  $k_2$

### 9.1 Solution

- i. Free Body Diagram drawing



- ii. Calcul des redondants

N. redondants = N. unknowns - N. available equations

In this case,

N. unknowns = 5 ( $M, F_x, F_y, F_{R1}, F_{R2}$ ) ;

N. available equations = 3 (forces in x, forces in y, moment in z)

**N. redondants = 2**

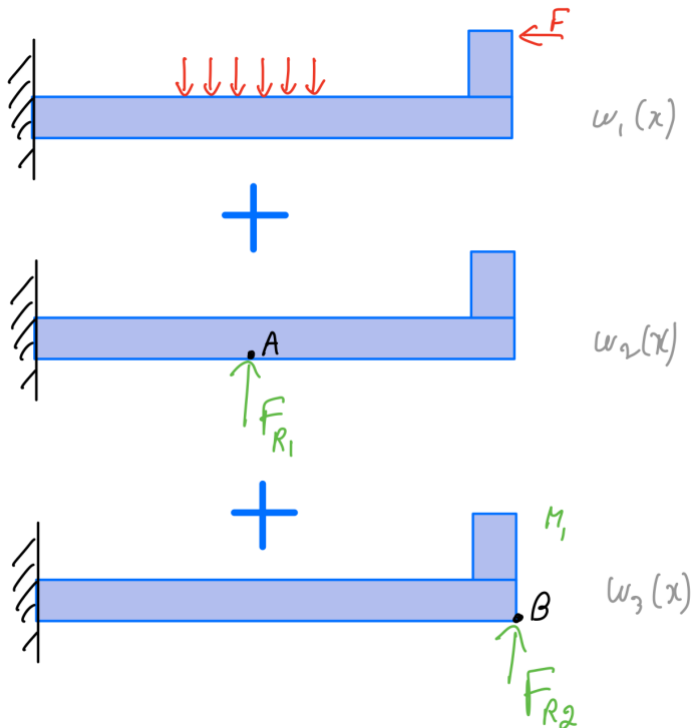
iii. **Choix des redondants redondants**

$F_{R1}$  and  $F_{R2}$  should be chosen as redundant

iv. **Dessin des systèmes isostatiques nécessaires pour résoudre le problème.**

The chosen redundant constraints are removed, thus obtaining an isostatic system.

The redundant reaction forces are treated like external loads.



**Équations de compatibilité**

The effects of the redundant constraints have to be expressed in equation form

$$F_{R1} = -k_1 w(A) \quad F_{R2} = -k_2 w(B)$$

### Problème 9.2 – Support Elastique – Charge ponctuelle

Une poutre AC de longueur  $L$  est encadrée au point A et attaché par une articulation à un ressort BD au point B (voir Figure 9.2). La section de la poutre AC est un carré de côté  $t = 0.1 L$ .

Le ressort a une constante  $k = \frac{2Et^2}{L}$ .

Déterminez, dans l'ordre qui vous arrange, par exemple en commençant par (e) si vous utilisez le formulaire

Les forces et moments de réactions sur la poutre AC

Le diagramme de l'effort tranchant  $V(x)$  dans la poutre AC

Le diagramme du moment de flexion  $M(x)$  dans la poutre AC

$w'(x)$  en fonction de  $x$  de A à C

La déflexion  $w(x)$  de A à C

Indice: utilisez l'approximation  $\left(\frac{L}{t}\right)^2 \gg 1$

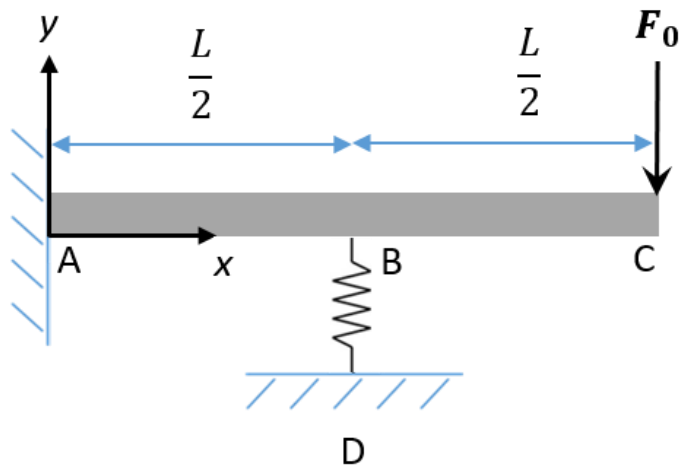


Figure 9.2 | Poutre supportée par un ressort.

## 9.2 Solution

2 Façons (également) valables de résoudre:

- i) Superposition, trouver  $w(x)$  en fonction de  $F_B$ , puis utiliser  $F_B = k w(B)$  pour trouver  $F_B$ .  
On connaît alors  $w(x)$ , qu'on dérive pour obtenir  $M(x)$  et  $V(x)$   
ou
- ii) Méthodes Sections, trouver  $V(x)$  et  $M(x)$ . Puis par intégration  $w(x)$ , tous en fonction de  $F_B$ .  
Enfin utiliser  $F_B = k w(B)$  et puis on a donc une expression pour  $V(x)$  et  $M(x)$  et  $w(x)$ .

What is given? Ces infos sont utiles!

- Length of beam  $L$
- $t = 0.1 \cdot L$
- $k = 2 \frac{Et^2}{L}$   $k$  est donné! Ça nous permettra de simplifier par la suite

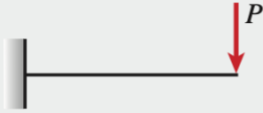
Assumptions

The material is homogeneous and isotropic.

What is asked?

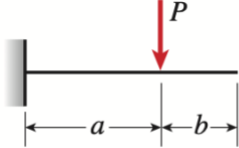
- (a) The reactions forces and moments
- (b) Shear force diagram in the beam  $AC$
- (c) Bending moment diagram in the beam  $AC$
- (d) Derivative of the deflection along  $AC$  as a function of  $x$
- (e) Deflection along the beam  $AC$  as a function of  $x$

Méthode  $i$  (superposition et formules de poutres) - plus facile

4 

$$v = -\frac{Px^2}{6EI}(3L - x) \quad v' = -\frac{Px}{2EI}(2L - x)$$

$$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI} \quad \theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$$

5 

$$v = -\frac{Px^2}{6EI}(3a - x) \quad v' = -\frac{Px}{2EI}(2a - x) \quad (0 \leq x \leq a)$$

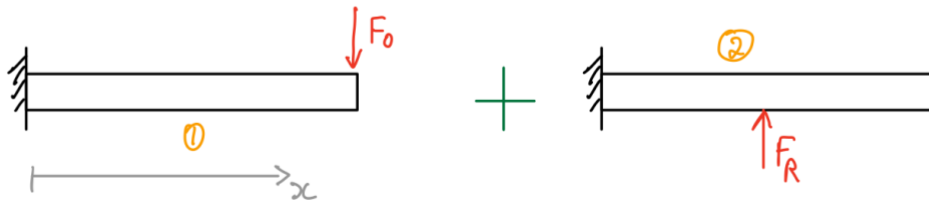
$$v = -\frac{Pa^2}{6EI}(3x - a) \quad v' = -\frac{Pa^2}{2EI} \quad (a \leq x \leq L)$$



1 redondant. on doit choisir  $F_R$   
car l'équation de compatibilité  
est par  $F_R$

$$F_R = -k w(x=L/2)$$

SUPERPOSITION



$$w_1(x) = -\frac{F_0 x^2}{6EI} (3L-x) \quad 0 \leq x \leq L$$

$$w_2(x) = \begin{cases} +F_R \frac{x^2}{6EI} \left(\frac{3L}{2} - x\right) & 0 \leq x \leq L/2 \\ +F_R \frac{L^2}{24EI} \left(3x - \frac{L}{2}\right) & L/2 \leq x \leq L \end{cases}$$

je m'intéresse en premier à  $w(x=L/2) = w_1(x=L/2) + w_2(x=L/2)$

$$w(x=L/2) = -\frac{F_0 L^2}{4 \cdot 6EI} \left(3L - \frac{L}{2}\right) + F_R \frac{L^2}{24EI} \left(\frac{3L}{2} - \frac{L}{2}\right)$$

$$= \frac{L^2}{24EI} \left[ -\frac{5}{2} F_0 L + F_R L \right]$$

$$= -\frac{F_R}{R}$$

je trouve alors  $F_R$

$$F_R = \frac{kL^3}{24EI} \frac{5}{2} F_0 - \frac{F_R L^3 k}{24EI}$$

$$F_R = \frac{5}{2} F_0 \frac{1}{1 + \frac{2Et^4}{kL^3}}$$

nous connaissons  $k$ : voir l'énoncé

$$k = \frac{2Et^2}{L} \quad \text{donc } F_R = \frac{5}{2} F_0 \frac{1}{1 + (t/L)^2}$$

$$\left(\frac{t}{L}\right)^2 = \frac{1}{100}$$

$$F_R = \frac{5}{2} F_0$$

$$w(x) = \begin{cases} \frac{-F_0 x^2 (3L-x)}{6EI} + \frac{5}{2} F_0 \frac{x^2}{6EI} \left(\frac{3L-x}{2}\right) & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{-F_0 x^2 (3L-x)}{6EI} + \frac{5}{2} F_0 \frac{L^2}{24EI} \left(3x - \frac{L}{2}\right) & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

$$w(x) = \begin{cases} \frac{F_0}{6EI} \left(\frac{3}{4} Lx^2 - \frac{3}{2} x^3\right) & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{F_0}{24EI} \left(\frac{x^3}{3} - Lx^2 + \frac{5Lx}{8} - \frac{5L^3}{48}\right) & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

on peut dériver pour trouver  $w'(x)$   $M(x)$   $V(x)$

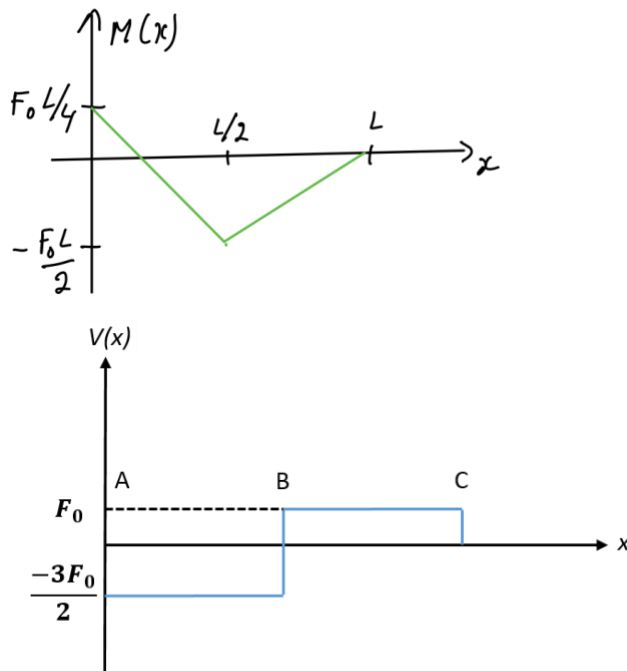
$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq L/2 \\ w'(x) &= \frac{F_0}{EI} \left(\frac{Lx}{4} - \frac{3x^2}{4}\right) \\ M(x) &= \frac{F_0 L}{4} - \frac{3}{2} F_0 x \\ V(x) &= -\frac{3}{2} F_0 \end{aligned}$$

$$\frac{L}{2} \leq x \leq L$$

$$w'(x) = \frac{F_0}{2EI} \left( x^2 - 2Lx + \frac{5L}{2} \right)$$

$$M(x) = \frac{F_0}{2} (2x - 2L) = F_0(x - L)$$

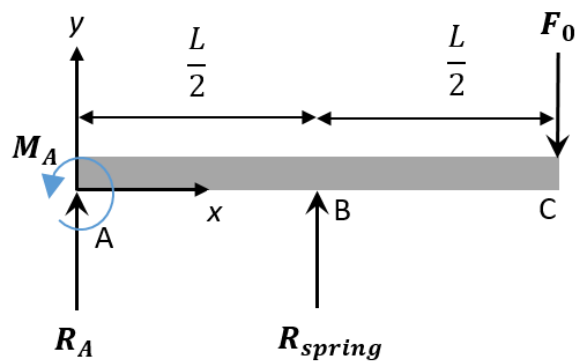
$$V(x) = F_0$$



**Méthode ii (méthode des sections)** – plus long

Principles and formula

(a) We calculate the reaction forces from the free body diagram of the beam, shown in Figure 9.2.2



**Figure 9.2.2| Free body diagram**

The equilibrium of forces in  $y$  yields:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_{spring} - F_0 = 0 \quad (1)$$

$$R_A + R_{spring} = F_0 \quad (2)$$

From the equilibrium of the moment  $M_z$  about A, we get:

$$\Sigma M_z = 0 \Rightarrow M_A + R_{spring} \frac{L}{2} - F_0 L = 0 \quad (3)$$

$$R_{spring} L + 2M_A = 2F_0 L \quad (4)$$

**Note that this is a statically indeterminate problem.  $R_{spring}$  will remain unknown until the deflection is calculated,** when we can then use the following formula:

$$R_{spring} = -k \cdot w \left( x = \frac{L}{2} \right) \quad (5)$$

We will express everything as a function of  $R_{spring}$  to be able to compute it using compatibility.

(b) Shear force  $V(x)$

From A to B the shear force is defined as:

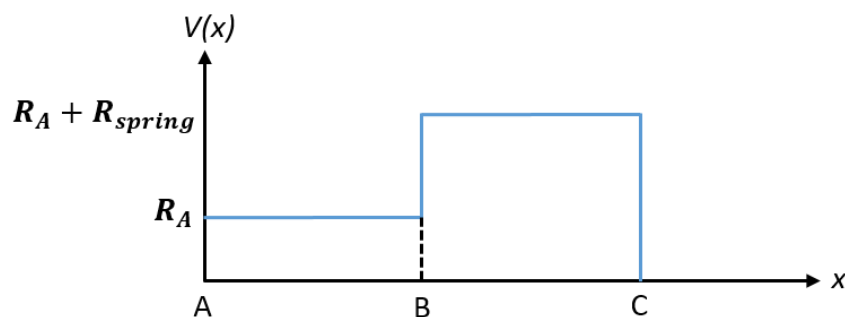
$$V(x) = V(x = 0) = R_A \quad (6)$$

From B to C:

$$V(x) = F_0 = R_{spring} + R_A \quad (7)$$

Therefore, at the middle of the beam:

$$V \left( \frac{L}{2}^+ \right) - V \left( \frac{L}{2}^- \right) = R_{spring} \quad (8)$$



**Figure 9.2.3 | Shear Force Diagram**

(c) Bending Moment  $M(x)$

We know from theory that:

$$\frac{\partial M_z(x)}{\partial x} = V(x) \rightarrow \int_0^x dM_z = \int_0^x V(x') dx' \quad (9)$$

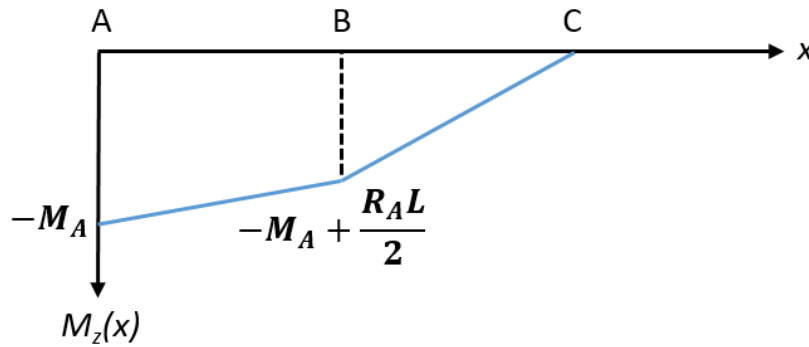
Which in the section from A to B means:

$$M_z(x) = -M_A + \int_0^x (R_A) dx' = -M_A + R_A x \quad (10)$$

$$M_z \left( x = \frac{L}{2} \right) = -M_A + \frac{R_A L}{2} \quad (11)$$

In the section from B to C means:

$$M_z(x) = -M_A + R_A x + R_{spring} \left( x - \frac{L}{2} \right) = F_0(x - L) \quad (12)$$



**Figure 9.2.4 | Bending Moment Diagram**

(d) Derivative of deflection of the beam as a function of  $x$ :  $w'(x)$

The curvature of the beam due to bending moments at any point is given by:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_{z,y_0}} \quad (13)$$

Hence we can calculate the derivative by integration of Eq. (13):

$$w'(x') = \frac{1}{EI_{z,y_0}} \int_0^{x'} M_z(x'') dx'' \quad (14)$$

Which in the section from A to B takes the form:

$$w'(x') = \frac{1}{EI_{z,y_0}} \int_0^{x'} (-M_A + R_A x'') dx'' = \frac{1}{EI_{z,y_0}} \left( \frac{R_A}{2} x'^2 - M_A x' \right) + w'(x' = 0) \quad (15)$$

Given that the beam is clamped at  $x = 0$ , the slope of the beam at this point will be zero. Solving for  $M_A$  in Eq. (9.2.4) and  $R_A$  in Eq. (9.2.2) and substituting both into Eq. (9.2.15), we find:

$$w'(x') = \frac{1}{EI_{z,y_0}} \left( x'^2 \frac{(F_0 - R_{spring})}{2} + x' \frac{L}{2} (R_{spring} - 2F_0) \right) \quad (16)$$

From section B to C we get:

$$w'(x') = \frac{1}{EI_{z,y_0}} \int_{\frac{L}{2}}^{x'} (F_0(x'' - L)) dx'' \quad (17)$$

$$= \frac{1}{EI_{z,y_0}} \left[ \frac{F_0}{2} \left( x'^2 - \frac{L^2}{4} \right) - F_0 L \left( x' - \frac{L}{2} \right) \right] + w' \left( x' = \frac{L}{2} \right) \quad (18)$$

Solving for  $w' \left( x' = \frac{L}{2} \right)$  from the derivative of the deflection for the AB section:

$$w' \left( x' = \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{EI_{z,y_0}} (-3F_0 + R_{spring}) \frac{L^2}{8} \quad (19)$$

Substituting  $w' \left( x' = \frac{L}{2} \right)$  into Eq. (17), we find that:

$$w'(x') = \frac{1}{EI_{z,y_0}} \left( \frac{F_0}{2} x'^2 - F_0 L x' + \frac{R_{spring} L^2}{8} \right) \quad (20)$$

Note that we are leaving the derivative as a function of  $F_0$  and  $R_{spring}$  which we will calculate once we have calculated the overall deflection.

(e) Deflection of the Beam  $w(x)$

Deflection of the beam from A to B:

$$w(x) - w(x = 0) = \int_0^x w'(x') dx' \quad (21)$$

$$w(x) = \frac{1}{EI_{z,y_0}} \left( x^3 \left( \frac{F_0 - R_{spring}}{6} \right) + x^2 \frac{L}{4} (R_{spring} - 2F_0) \right) \quad (22)$$

Now we can write the deflection for  $x = \frac{L}{2}$ :

$$w \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{L^3}{EI_{z,y_0}} \left( \frac{R_{spring}}{24} - \frac{5F_0}{48} \right) \quad (23)$$

Deflection of the beam from B to C:

$$w(x) - w \left( x = \frac{L}{2} \right) = \int_{L/2}^x w'(x') dx'$$

$$w(x) - w \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{1}{EI_{z,y_0}} \left( F_0 \left( \frac{5L^3}{48} - \frac{Lx^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) + R_{spring} \left( \frac{xL^2}{8} - \frac{L^3}{16} \right) \right)$$

$$w(x) = \frac{1}{EI_{z,y_0}} \left( \frac{F_0}{6} x^3 - \frac{F_0}{2} Lx^2 + \frac{R_{spring}}{8} L^2 x - \frac{R_{spring}}{48} L^3 \right)$$

Now we combine Eqs. (9.2.5) and (9.2.22) to estimate the reaction of the spring, taking into account that the cross section is squared and the value for  $k = \frac{2Et^2}{l}$ :

$$R_{spring} = -k w\left(\frac{L}{2}\right) = -k \cdot \frac{L^3}{EI_{z,y_0}} \left( \frac{R_{spring}}{24} - \frac{5F_0}{48} \right) = - \left( \frac{2Et^2}{L} \right) \frac{L^3}{E \left( \frac{t^4}{12} \right)} \left( \frac{R_{spring}}{24} - \frac{5F_0}{48} \right)$$

$$R_{spring} = - \left( \frac{L}{t} \right)^2 \left( R_{spring} - \frac{5}{2} F_0 \right) \rightarrow R_{spring} = \frac{\left( \frac{L}{t} \right)^2 \frac{5}{2} F_0}{1 + \left( \frac{L}{t} \right)^2} \approx \frac{5}{2} F_0$$

It is important to note that in Eq. (9.2.27) we have used the fact that  $\left(\frac{L}{t}\right)^2 = 100 \gg 1$ , which allows us to perform the approximation with only around 1% error.

Now we can calculate all three reactions:

$$R_{spring} \approx \frac{5}{2} F_0 \quad R_A \approx -\frac{3}{2} F_0 \quad M_A \approx -\frac{F_0 L}{4}$$

We then use Eq. (9.2.7) to properly plot the shear force diagram and the bending moment considering that  $F_0$  is positive:

### Shear force diagram

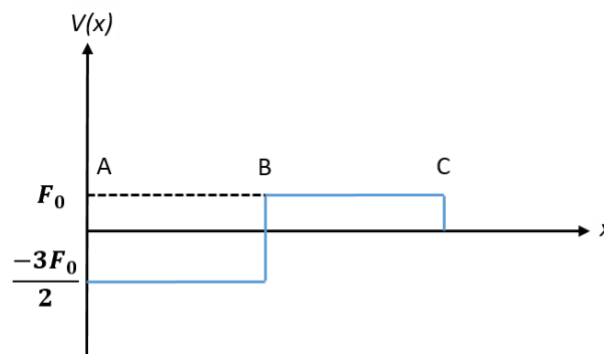


Figure 9.2.5 | Shear Force Diagram

### Bending Moment Diagram

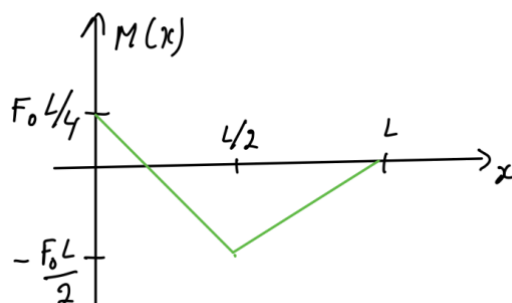


Figure 9.2.6 | Bending Moment Diagram

**Derivative of the Deflection  $w'(x)$** 

$$w'(x) \approx \begin{cases} \frac{F_0}{4EI_{z,y_0}}(-3x^2 + xL) & x < \frac{L}{2} \\ \frac{F_0}{2EI_{z,y_0}}\left(x^2 - 2xL + \frac{5L^2}{8}\right) & x > \frac{L}{2} \end{cases}$$

**Deflection  $w(x)$** 

$$w(x) \approx \begin{cases} \frac{F_0}{4EI_{z,y_0}}x^2\left(\frac{L}{2} - x\right) & x < \frac{L}{2} \\ \frac{F_0}{2EI_{z,y_0}}\left(-\frac{5L^3}{48} + \frac{5}{8}xL^2 - Lx^2 + \frac{x^3}{3}\right) & x > \frac{L}{2} \end{cases}$$

### Problème 9.3 - Question très courte - Question conceptuelle sur le problème 9.2

Dans le problème précédent (9b.1), vous avez résolu un système qui incluait un ressort.

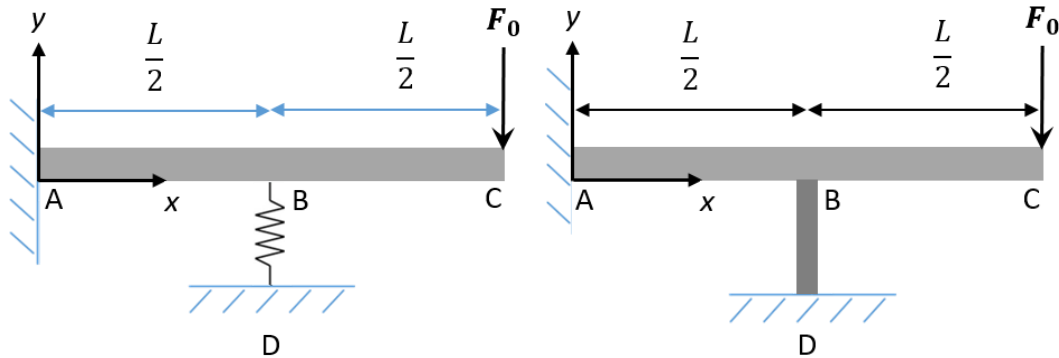


Figure 9.3 | Première poutre avec le ressort (gauche); Poutre avec une barre (droite)

Comment modifieriez-vous vos calculs si le ressort était remplacé par une poutre déformable ?

### 9.3 Solution

In many ways, the calculations in Problem 9.2 would not be changed by replacing the spring with a beam. The system would still be indeterminate and one would still need to solve for the reaction force, this time for the beam. The force felt by the beam would be:

$$R_{bar} = k \cdot w \left( x = \frac{L}{2} \right) = \frac{AE}{l} \cdot w \left( x = \frac{L}{2} \right)$$

Where  $l$ ,  $A$  and  $E$  are the length, cross section area and Young's Modulus of the support beam, respectively.

However, the vertical beam would also add a bending moment to the horizontal beam. And so the problem becomes more complex, as one then has a restoring spring force  $R_{bar}$ , and a restoring spring moment  $M_{bar}$ . We then have two indeterminates.

### Problème 9.4 – Support Élastique – Charge uniforme

Une poutre AC est soumise à une charge uniformément répartie (voir Figure 9.4). Sa longueur est  $2L = 2\text{m}$ .

Quel est la constante du ressort  $k$  nécessaire pour avoir un moment de flexion en B :  $M_B = -\frac{qL^2}{10}$  ?

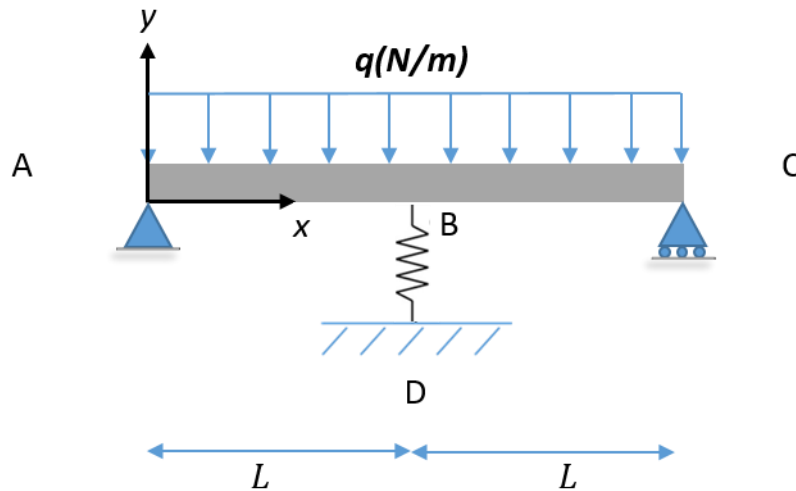


Figure 9.4 | Poutre avec une charge uniforme répartie

### 9.4 Solution

What is given?

$$L = 1 \text{ m}$$

$$M_B = -\frac{qL^2}{10} \quad \text{c'est une donnée du problème!}$$

What is asked?

Spring constant  $k$  for given bending moment at point B

Principles and formula

The basic procedure for this problem is to first calculate the value of the reaction force from the spring on the beam, then calculate the deflection of the beam at the point where the spring is. The ratio between them would give us  $k$  through Equation  $R_{spring} = -k \cdot w(x = L)$ .

**Il nous faut donc trouver: i)  $R_{spring}$  et ii)  $w(x = L)$  afin de connaître  $k$**

**Reaction Forces:**

We calculate the reaction forces based on the free body diagram shown in Figure 9.4.2.

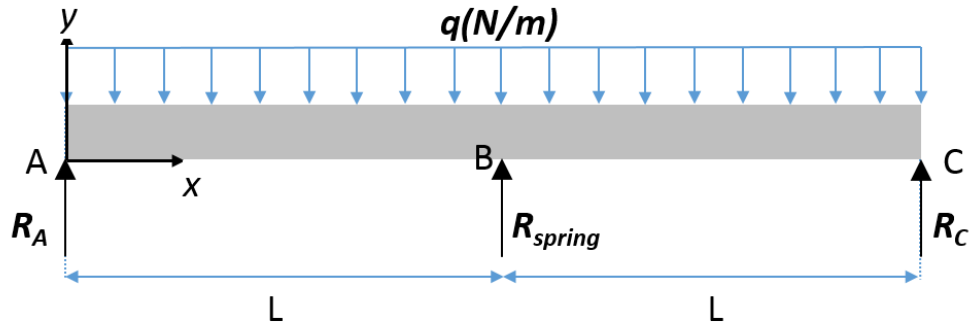


Figure 9.4.2 | Free body diagram

The equilibrium of forces in  $y$  axis yields:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_C + R_{spring} - \int_0^{2L} q \, dx = R_A + R_C + R_{spring} - 2qL = 0$$

$$R_A + R_C + R_{spring} = 2qL \quad (9.4.3)$$

From the equilibrium of the moment  $M_Z$  about point A, we get:

$$\Sigma M_Z = 0 \Rightarrow R_{spring}L + R_C(2L) - \int_0^{2L} q \cdot x \, dx = R_{spring}L + R_C(2L) - q \frac{(2L)^2}{2} = 0$$

$$R_{spring} + 2R_C = 2qL \quad (9.4.5)$$

Comparing Eq. (9.4.3) and (9.4.5) gives us:

$$R_A = R_C$$

(we could also have found this by the symmetry of the problem)

We can use two different methods to find the shear force and the bending moment: differential, and by sections

**Differential method for  $M(x)$  in order to find  $R_{spring}$ :**

**Shear Force  $V(x)$ :**

From A to B the shear force is defined as:

$$V_1(x) - V_1(x=0) = \int_0^x -q \, dx' = -qx$$

$$V_1(x) = V_1(x=0) - qx = R_A - qx$$

From B to C we have the same integral as in Eq. (9.4.7) but we need to account for the discontinuity at  $x = L$ :

$$V_2(L^+) - V_1(L^-) = R_{spring}$$

Then, from B to C:

$$V_2(x) = R_{spring} + R_A - qx$$

**Bending Moment  $M(x)$ :**

$$M_z(x) = \int_0^x V(x') dx'$$

In the section from A to B:

$$M_1(x) = \int_0^x (R_A - qx') dx' = R_A x - q \frac{x^2}{2}$$

$$M_1(x = L) = R_A L - \frac{qL^2}{2}$$

In the section from B to C:

$$M_2(x) - M_z(x = L) = \int_L^x (R_{spring} + R_A - qx') dx'$$

$$M_2(x) = M_z(x = L) + (R_A + R_{spring})(x - L) - q \frac{x^2 - L^2}{2} \quad (9.4.13):$$

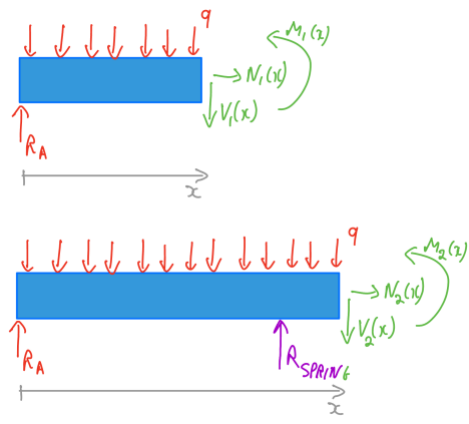
It is given that  $M_z(x = L) = -\frac{qL^2}{10}$ , therefore inserting that into using Eq. (9b.3.13), we get:

$$M_z(x = L) = R_A L - \frac{qL^2}{2} = -\frac{qL^2}{10} \quad \rightarrow \quad R_A = \frac{qL}{2} - \frac{qL}{10} = \frac{2}{5} qL$$

Knowing  $R_C = R_A$ , we can substitute the value of  $R_C$  into Eq. (9b.3.5) to find  $R_{spring}$

$$R_{spring} = 2qL - 2R_C = \frac{6}{5} qL$$

**Méthode des sections pour  $M(x)$ :**



### Shear Force $V(x)$ :

Pour la section AB:

$$V_1(x) - R_A + \int_0^x q \, dx = 0 \Leftrightarrow V_1(x) = R_A - qx$$

Pour la section BC:

$$V_2(x) - R_A - R_{spring} + \int_0^x q \, dx = 0 \Leftrightarrow V_2(x) = R_A + R_{spring} - qx$$

### Bending Moment:

Pour la section AB:

$$M_1(x) - R_A x + \int_0^x qx \, dx = 0 \Leftrightarrow M_1(x) = R_A x - q \frac{x^2}{2}$$

Pour la section BC:

$$M_2(x) - R_A x - R_{spring}(x - L) + \int_0^x qx \, dx = 0 \Leftrightarrow M_2(x) = R_A x + R_{spring}(x - L) - q \frac{x^2}{2}$$

On peut ainsi calculer  $R_A$  en utilisant que  $M_2(x = L) = -\frac{qL^2}{10}$ :

$$M_2(x = L) = R_A L - \frac{qL^2}{2} = -\frac{qL^2}{10} \rightarrow R_A = \frac{qL}{2} - \frac{qL}{10} = \frac{2}{5}qL$$

Knowing  $R_C = R_A$ , we can substitute the value of  $R_C$  into Eq. (9.4.5) to find  $R_{spring}$

$$R_{spring} = 2qL - 2R_C = \frac{6}{5}qL$$

On peut vérifier que les résultats sont les mêmes avec les deux méthodes, notamment pour  $M_2$ . En reprenant la formule trouvée par la méthode différentielle:

$$M_2(x) = M_2(x = L) + (R_A + R_{spring})(x - L) - q \frac{x^2 - L^2}{2}$$

$$M_2(x) = -\frac{qL^2}{10} + R_A x - R_A L + R_{spring}(x - L) - q \frac{x^2}{2} + q \frac{L^2}{2}$$

$$M_2(x) = -\frac{qL^2}{10} + R_A x - \frac{2}{5}qL^2 + R_{spring}(x-L) - q\frac{x^2}{2} + q\frac{L^2}{2}$$

$$M_2(x) = R_A x + R_{spring}(x-L) - q\frac{x^2}{2}$$

On retrouve le même résultat avec les deux méthodes.

### **Deflection $w(x)$ : par integration de $M(x)$ ou par superposition avec tabelles**

Encore une fois, nous avons deux méthodes possible pour trouver  $w(x)$

#### **Integration:**

The curvature of the beam due to bending moments at any point is given by:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_{z,y_0}}$$

Hence we can calculate the deflection of the beam by double integration of Eq. (9.4.18).

$$w = \frac{1}{EI_{z,y_0}} \int_0^x \left( \int_0^{x'} M_z(x'') dx'' \right) dx'$$

In the section from A to B:

$$w(x) = \frac{1}{EI} \int_0^x \left( \int_0^{x'} \left( R_A x'' - q \frac{x''^2}{2} \right) dx'' \right) dx'$$

$$w(x) = \int_0^x \left[ \frac{1}{EI_{z,y_0}} \left( \frac{qLx'^2}{5} - \frac{qx'^3}{6} \right) + w'(x=0) \right] dx'$$

$$w(x) = \frac{1}{EI_{z,y_0}} \left( \frac{qLx^3}{15} - \frac{qx^4}{24} \right) + x \cdot w'(x=0)$$

To calculate the value of the slope at the origin ( $w'(x=0)$ ), we need to use another kinematic boundary condition. This can be for example the fact that the deflection at the end is zero. Another possibility is to consider that the system is symmetric with respect to  $x=L$ , which means that the slope at that point must be zero. Therefore:

$$w'(x=L) = 0 = \frac{1}{EI_{z,y_0}} \left( \frac{qL^3}{5} - \frac{qL^3}{6} \right) + w'(x=0)$$

$$w'(x=0) = -\frac{1}{EI_{z,y_0}} \frac{q}{30} L^3$$

Now we can write the deflection for  $x=L$ :

$$w(x=L) = \frac{1}{EI_{z,y_0}} \left( \frac{qL^4}{15} - \frac{qL^4}{24} - \frac{q}{30} L^4 \right)$$

$$w(x = L) = -\frac{qL^4}{120EI_{z,y_0}}$$

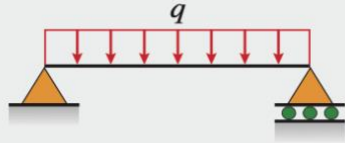
The deflection calculated for length L is equal to the deflection of the spring  $\delta$ . Therefore:

$$-k = \frac{w(x = L)}{R_{spring}}$$

$$k = \frac{6}{5}qL \cdot \frac{120EI_{z,y_0}}{qL^4} = 144 \frac{EI_{z,y_0}}{L^3}$$

Par Superposition:

**1**

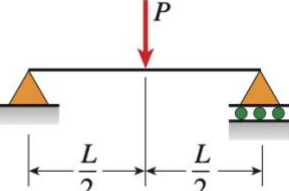


$$v = -\frac{qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

$$v' = -\frac{q}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$$

---

**4**



$$v = -\frac{Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2) \quad v' = -\frac{P}{16EI}(L^2 - 4x^2) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right)$$

$$\delta_C = \delta_{\max} = \frac{PL^3}{48EI} \quad \theta_A = \theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$$

Nous avons dans ce cas seulement besoin calculer la déflexion pour la section AB, puisqu'on cherche  $R_{spring} = -k \cdot w(x = L)$

On obtient directement:

$$w(x) = \frac{-qx}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3) + \frac{R_{spring}x}{48EI}(3L^2 - 4x^2) \quad 0 \leq x \leq L$$

Attention: ici la longueur totale de la poutre est 2L:

$$w(x) = \frac{-qx}{24EI}(8L^3 - 4Lx^2 + x^3) + \frac{R_{spring}x}{48EI}(12L^2 - 4x^2)$$

On peut maintenant écrire la déflexion pour  $x = L$ :

$$w(x = L) = \frac{-q}{24EI}(8L^4 - 4L^4 + L^4) + \frac{R_{spring}}{48EI}(12L^3 - 4L^3) = \frac{-q}{24EI}(5L^4) + \frac{6}{5} \frac{qL}{48EI}(8L^3)$$

$$w(x = L) = \frac{-qL^4}{EI} \left( \frac{-5}{24} + \frac{48}{240} \right) = \frac{-qL^4}{EI} \left( \frac{-2}{240} \right) = -\frac{qL^4}{120EI_{z,y_0}}$$

$$-k = \frac{R_{spring}}{w(x = L)}$$

$$k = \frac{6}{5} qL \cdot \frac{120EI_{z,y_0}}{qL^4} = 144 \frac{EI_{z,y_0}}{L^3}$$

On retrouve bien sur le même résultat par les deux méthodes.

### Problème 9.5 – Support élastique – poutres croisées

Deux poutres AB et CD, disposées dans le plan horizontal se croisent à angle droit et supportent ensemble une charge  $P$  en leur milieu (voir Figure 9.5). Avant que la charge  $P$  soit appliquée, les poutres ne font que se toucher (sans appliquer de charge l'une sur l'autre). Les matériaux des deux poutres ainsi que leurs largeurs sont les mêmes. Les deux poutres sont en appui simple à leurs extrémités.

La longueur de AB et CD sont  $L_{AB}$  et  $L_{CD}$  respectivement.

Quel doit être le ratio  $t_{AB}/t_{CD}$  des épaisseurs des poutres pour que les quatre réactions (en A, B, C, et D) soient les mêmes ?

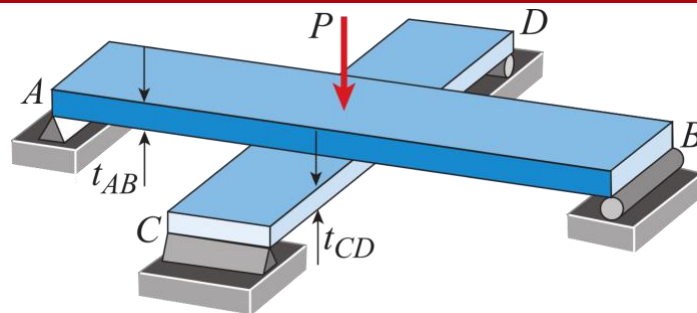


Figure 9.5 | Poutres croisées, en appui simples à leurs extrémités.

### 9.5 Solution

#### What is given?

- Beams are simply-supported
- Beams have the same width
- $P$  is applied in the middle of the two beams
- The two beams are in contact before applying the load
- Materials are the same

#### Assumptions

The material is homogeneous and isotropic.

#### What is asked?

Ratio  $t_{AB}/t_{CD}$  in order to get the same reactions.

#### Principles and formula

If we want the four reactions to be the same, each beam must carry exactly one-half of the load  $P$ . see free body diagram

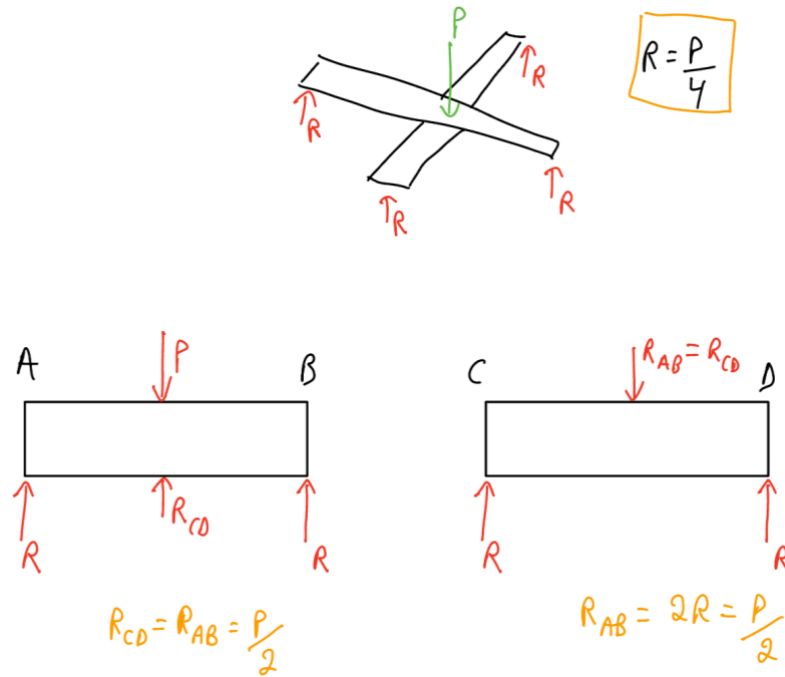
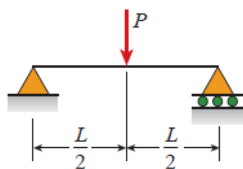


Diagramme des Forces pour système entier, et pour poutres AB et CD

Given that the beams are in contact at the start, their deflection at their central point is going to be the same.  $\delta_{AB} \left( \frac{L_{AB}}{2} \right) = \delta_{CD} \left( \frac{L_{AB}}{2} \right)$

We can use the formula for a simply-supported beam (see Figure 9.5.2).



$$v = -\frac{Px}{48EI} (3L^2 - 4x^2) \quad v' = -\frac{P}{16EI} (L^2 - 4x^2) \quad \left( 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right)$$

$$\delta_c = \delta_{\max} = \frac{PL^3}{48EI} \quad \theta_A = \theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$$

Figure 9.5.2 | Formulas for the deflection of simply-supported beams with a load in their center.

$$\delta_{AB} \left( \frac{L_{AB}}{2} \right) = \frac{\left( \frac{P}{2} \right) L_{AB}^3}{48EI_{AB}} \quad \delta_{CD} \left( \frac{L_{CD}}{2} \right) = \frac{\left( \frac{P}{2} \right) L_{CD}^3}{48EI_{CD}}$$

Given that the deflections are equal at the center:

$$\frac{L_{AB}^3}{I_{AB}} = \frac{L_{CD}^3}{I_{CD}}$$

note that  $I_{AB}$  scales at  $t^3$  so  $\frac{t_{AB}}{t_{CD}} = \frac{L_{AB}}{L_{CD}}$

### Problème 9.6 – Poutres avec support élastique

Deux poutres CE et FD sont assemblées en un point D (voir Figure 9.6). La poutre CE est encastrée à une extrémité et libre à son autre extrémité, elle est soumise à une charge uniforme  $q$ . La poutre FD joue le rôle d'un support élastique au point D. On suppose qu'elle n'exerce que des efforts verticaux (dans la direction  $y$ ).

Le moment d'inertie, la surface de la section et le module de Young de la poutre CE sont notés  $I_P$ ,  $A_P$  et  $E_P$ . Ceux de la poutre FD sont notés  $I_R$ ,  $A_R$  et  $E_R$ . Les distances CD, DE et FD sont respectivement  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$ .

**Donnez l'expression de la flèche au point D.**

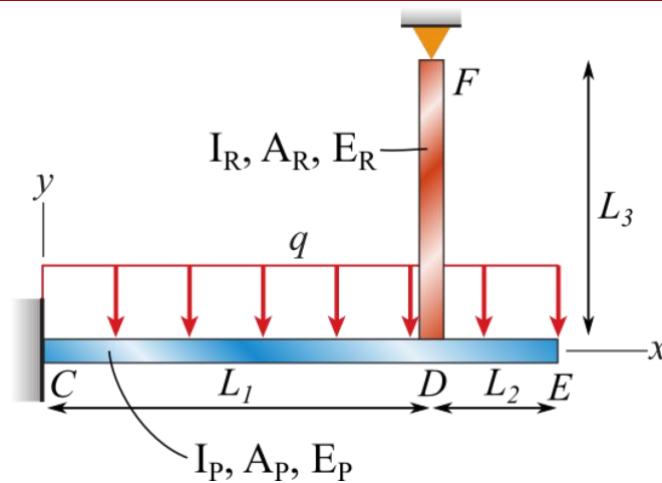


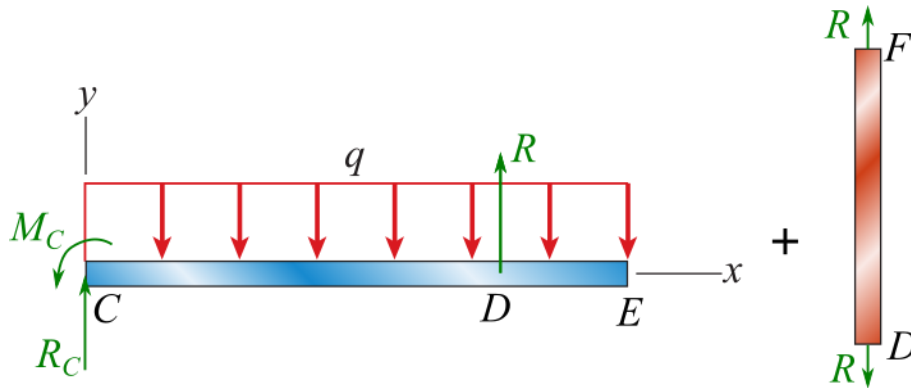
Figure 9.6 | Assemblage de poutres. CE est soumise à une charge uniforme  $q$ . FD joue le rôle de support élastique.

**9.6 Solution**

The easiest method to solve this problem is to use superposition. However, it is also possible to solve it using the integration method (we will show both methods).

Superposition:

First, we can separate the system into two subsystems and draw their free body diagram as shown in Figure 9.6.2.



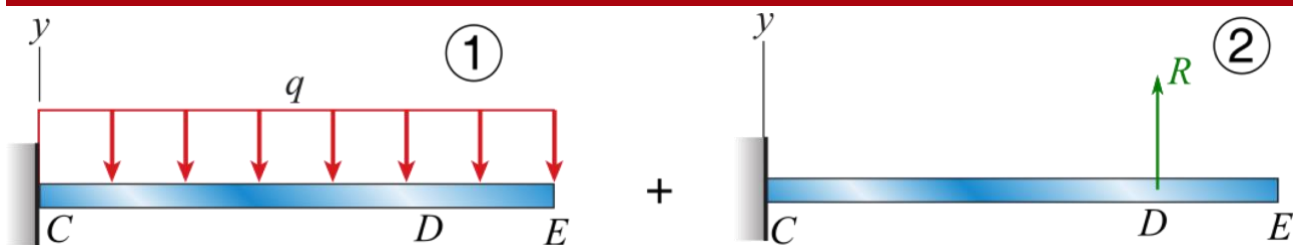
**Figure 9.6.2 | Free body diagrams of the two subsystems.**

The subsystem FD is in tension (i.e. the bar is stretched down and so exerts a force upward on beam CE). so we can write the deflection of point D as :

$$w_D = -\frac{R}{k}$$

Where  $k = A_R E_R / L_3$  is the equivalent stiffness of the bar FD in elongation

The deflection at point D can also be written by applying flexion theory on beam CE. For this, we can separate the load into two different loading conditions (see Figure 9.6.3) and sum up the corresponding beam deflection equations.



**Figure 9.6.3 | Loading is divided into two different simple configurations that can be added.**

Using the formulas for simple loading case of clamped beams, we can write :

$$w_1(x) = -\frac{qx^2}{24E_p I_p} [6(L_1 + L_2)^2 - 4(L_1 + L_2)x + x^2]$$

$$w_2(x) = \frac{Rx^2}{6E_p I_p} [3L_1 - x] \quad x \leq L_1$$

We can then sum these two equations to get the deflection at point D.

$$w_D = w_1(L_1) + w_2(L_1)$$

$$w_D = -\frac{qL_1^2}{24E_p I_p} [6(L_1 + L_2)^2 - 4(L_1 + L_2)L_1 + L_1^2] + \frac{RL_1^2}{6E_p I_p} [3L_1 - L_1]$$

$$w_D = -\frac{qL_1^2}{24E_p I_p} [3L_1^2 + 8L_1L_2 + 6L_2^2] + \frac{RL_1^3}{3E_p I_p}$$

Using compatibility of (9b.5.1) and (9b.5.4), we can write:

$$-\frac{R}{k} = -\frac{q(L_1)^2}{24E_p I_p} [3L_1^2 + 8L_1L_2 + 6L_2^2] + \frac{RL_1^3}{3E_p I_p}$$

$$R \left[ -\frac{1}{k} - \frac{L_1^3}{3E_p I_p} \right] = -\frac{q(L_1)^2}{24E_p I_p} [3L_1^2 + 8L_1L_2 + 6L_2^2]$$

Given that the stiffness  $k$  can be computed as:

$$k = \frac{E_R A_R}{L_3}$$

It is possible to write the reaction force  $R$  at point D as:

$$R = \frac{q(L_1)^2 [3L_1^2 + 8L_1L_2 + 6L_2^2]}{24E_p I_p \left[ \frac{L_3}{E_R A_R} + \frac{L_1^3}{3E_p I_p} \right]}$$

And the deflection as:

$$w_D = -\frac{R}{k} = -\frac{q(L_1)^2 [3L_1^2 + 8L_1L_2 + 6L_2^2]}{24E_p I_p \left[ \frac{L_3}{E_R A_R} + \frac{L_1^3}{3E_p I_p} \right]} \frac{L_3}{E_R A_R}$$

$$w_D = -\frac{qL_3(L_1)^2 [3L_1^2 + 8L_1L_2 + 6L_2^2]}{8 [3L_3E_p I_p + E_R A_R L_1^3]}$$

Par intégration:

Pour pouvoir calculer la déflexion, il nous faut d'abord les moments de flexion.

On commence par calculer les forces de réaction du système.

(a) Forces de réaction au point A

On calcule les forces de réaction à partir du diagramme des forces de la poutre entière (Figure 9.6.2):

En sommant les forces, on a:

$$\Sigma F_y = R_c + R - \int_0^{L_1+L_2} q \, dx = 0 \rightarrow R_c = q(L_1 + L_2) - R$$

En utilisant l'équilibre des moments  $M_y$ , on déduit le moment  $M_c$ :

$$\Sigma M_y = 0 \rightarrow M_c + RL_1 - \int_0^{L_1+L_2} qx \, dx = 0 \rightarrow M_c = \frac{q(L_1 + L_2)^2}{2} - RL_1$$

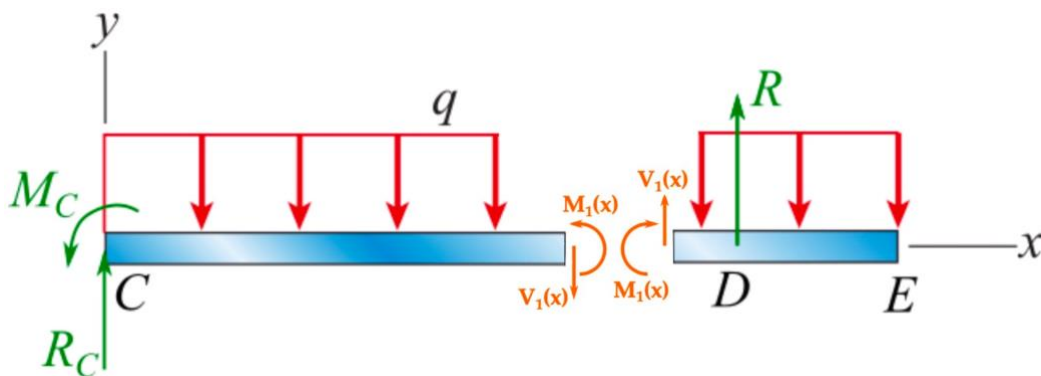
(b) Forces de cisaillement

Sur cette poutre, deux forces externes sont appliquées: la première est distribuée uniformément sur toute la longueur de la poutre, et la seconde est une charge appliquée à  $x = L_1$ .

On peut ainsi trouver ce diagramme par deux méthodes: méthode des sections et méthode différentielle.

Méthode des sections: Nous allons considérer puis analyser deux parties distinctes de la poutre:

- De A à C ( $x < L_1$ ):

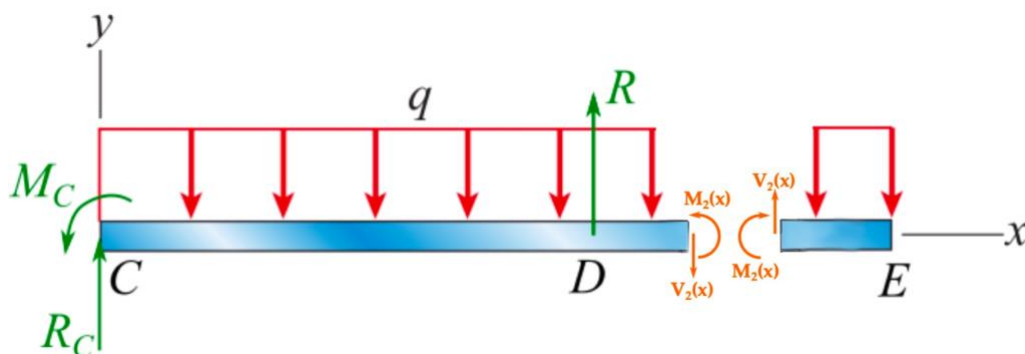


**Figure 9.6.4** | Diagramme des forces et forces internes pour  $x < L_1$

On peut écrire la formule de l'équilibre des forces pour la partie de gauche comme illustré sur la Figure 8.1.3:

$$V_1(x) - R_c + \int_0^x q \, dx = 0 \Leftrightarrow V_1(x) = R_c - qx$$

- De C à D ( $x \geq L_1$ ):



**Figure 9.6.5** | Diagramme des forces et forces internes pour  $x \geq L_1$

Comme nous l'avons fait précédemment, nous écrivons la formule de l'équilibre des forces pour la partie de gauche comme illustré sur la Figure 9.6.5:

$$V_2(x) - R - R_c + \int_0^x q \, dx = 0 \Leftrightarrow V_2(x) = R_c + R - qx$$

Méthode différentielle: On considère tout d'abord la charge distribuée appliquée sur la poutre:

$q(x) = q \quad x \in [0; L_1 + L_2]$   
 Pour la force de cisaillement, on utilise la relation  $V(x) = -\int q(x)dx$

$$V_1(x) = -qx + C_1 \quad x \in [0; L_1]$$

$$V_2(x) = -qx + C_2 \quad x \in [L_1; L_1 + L_2]$$

Avec la condition aux bords:  $V_1(x = 0) = R_c$

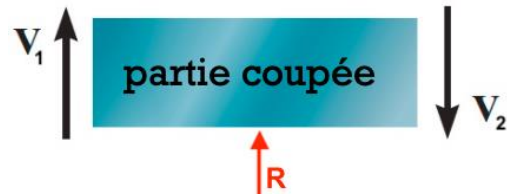
et en utilisant l'équilibre des forces en  $x = L_1$ :

$$V_1(x = L) + R = V_2(x = L)$$

On obtient:

$$V_1(x) = -qx + R_c \quad x \in [0; L_1]$$

$$V_2(x) = -qx + R + R_c \quad x \in [L_1; L_1 + L_2]$$



### (c) Moments en flexion.

Encore une fois, il est possible de trouver ce diagramme par les deux méthodes.

#### Méthode des sections:

De A à C ( $x < L_1$ ) en regardant la partie de gauche:

$$M_1(x) - R_c x + \int_0^x qx \, dx + M_c = 0 \Leftrightarrow M_1(x) = R_c x - q \frac{x^2}{2} - M_c$$

De C à B ( $x \geq L_1$ ) en regardant la partie de gauche:

$$M_2(x) - R(x - L_1) - R_c x + \int_0^x qx \, dx + M_c = 0 \Leftrightarrow M_2(x) = (R_c + R)x - RL_1 - q \frac{x^2}{2} - M_c$$

#### Méthode différentielle:

On sait que  $M(x) = \int V(x)dx$

$$M_1(x) = -q \frac{x^2}{2} + R_c x + C_3 \quad x \in [0; L_1]$$

$$M_2(x) = -q \frac{x^2}{2} + (R_c + R)x + C_4 \quad x \in [L_1; L_1 + L_2]$$

Avec la condition aux bords:  $M_1(x = 0) = -M_c$

et la continuité du moment:

$$M_1(x = L_1) = M_2(x = L_1) \Leftrightarrow -q \frac{L_1^2}{2} + R_c L_1 - M_c = -q \frac{L_1^2}{2} + (R_c + R)L_1 + C_4$$

On obtient ainsi:

$$M_1(x) = -q \frac{x^2}{2} + R_c x - M_c \quad x \in [0; L_1]$$

$$M_2(x) = -q \frac{x^2}{2} + (R_c + R)x - RL_1 - M_c \quad x \in [L_1; L_1 + L_2]$$

On a le même résultat dans les deux cas.

(d) Déflexion de la poutre

On peut calculer l'équation de la déflexion de la poutre par double intégration de  $M(x)$ :

$$w = \frac{1}{EI} \int_0^x \left( \int_0^{x'} M(x'') dx'' \right) dx'$$

Pour pouvoir appliquer cette formule, il faut faire attention à calculer d'abord la dérivée de la déflexion, qui doit être continue en  $x = L_1$ . Il ne faut pas non plus oublier que le moment est en deux parties. Cependant, puisqu'on cherche  $w(x = L_1)$ , on se contentera d'intégrer la première formule du moment.

On obtient ainsi:

Pour  $x \leq L_1$ :

$$w'(x) - w'(0) = \frac{1}{EI} \int_0^x M_1(x') dx' \Leftrightarrow w'(x) = \frac{1}{EI} \left( -q \frac{x^3}{6} + R_c \frac{x^2}{2} - M_c x \right)$$

Poutre encastree à  $x=0 \rightarrow w'(0) = 0$

On peut maintenant intégrer une nouvelle fois pour obtenir la déflexion.

Pour  $x \leq L_1$ :

$$w(x) - w(x=0) = \int_0^x w'(x') dx' \Leftrightarrow w(x) = \frac{1}{EI} \left( -q \frac{x^4}{24} + R_c \frac{x^3}{6} - M_c \frac{x^2}{2} \right)$$

Poutre encastree à  $x=0 \rightarrow w(0) = 0$

On remplace les forces de réactions par les valeurs trouvées en (a):

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left( -q \frac{x^4}{24} + (q(L_1 + L_2) - R) \frac{x^3}{6} - \left( \frac{q(L_1 + L_2)^2}{2} - RL_1 \right) \frac{x^2}{2} \right)$$

On peut maintenant calculer la déflexion au point D ( $x = L_1$ ):

$$w(x = L_1) = w_D = \frac{1}{EI} \left( -q \frac{L_1^4}{24} + (q(L_1 + L_2) - R) \frac{L_1^3}{6} - \left( \frac{q(L_1 + L_2)^2}{2} - RL_1 \right) \frac{L_1^2}{2} \right)$$

$$w_D = -\frac{qL_1^2}{24E_p I_p} \left[ L_1^2 - 4(L_1 + L_2)L_1 + 6(L_1 + L_2)^2 \right] + \frac{R \left( \frac{-L_1^3}{2} + \frac{3L_1^3}{2} \right)}{3E_p I_p}$$

$$w_D = -\frac{qL_1^2}{24E_p I_p} [3L_1^2 + 8L_1L_2 + 6L_2^2] + \frac{RL_1^3}{3E_p I_p}$$

On retrouve bien la même valeur qu'avec la méthode de superposition, seulement avec un peu plus d'effort!

### Problème 9.7 – Poutres avec redondants

Une poutre est encastrée à une extrémité et soutenue par deux supports placés respectivement en  $L/2$  et en  $L$ . Elle est soumise à une charge constante  $q$

**Déterminer les valeurs de l'ensemble des forces de réaction agissant sur la poutre.**

*Indice:* le choix de(s) redondant(s) est primordial pour réussir facilement cet exercice.

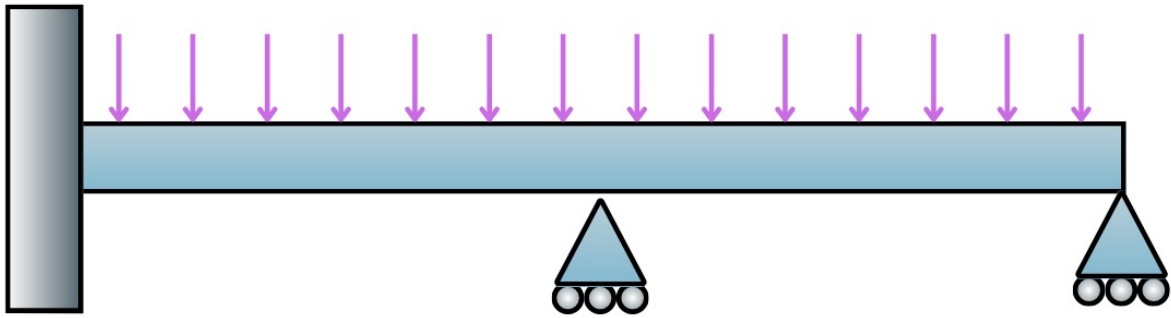


Figure 9.7 | Poutre encastrée et maintenue par deux supports simples

### 9.7 Solution

Nous sommes dans le cas d'une poutre avec des forces redondantes. Nous avons quatre inconnues ( $M_A, R_A, R_B, R_C$ ) pour seulement deux équations ( $\Sigma F_y, \Sigma M_z$ ) comme illustré par le diagramme des forces de la Figure 9.7.2.

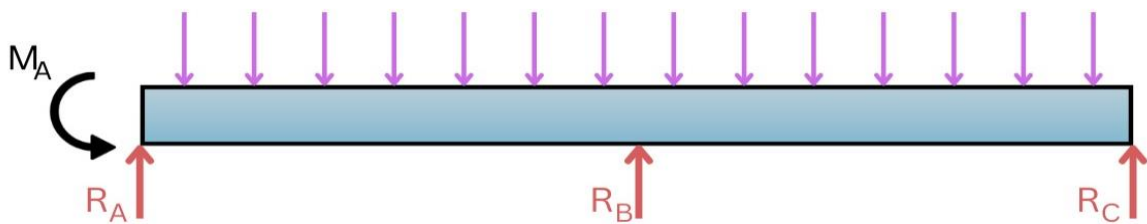


Figure 9.7.2 | Diagramme des forces

Nous allons donc utiliser la méthode de superposition. Pour cela, il est important de bien choisir les redondants. Le critère que nous allons utiliser est le suivant: nous souhaitons (pour aller plus vite) utiliser la Table de Gere-Goodno. Pour cela, nous avons donc besoin de pouvoir retrouver chaque poutre que nous allons utiliser dans le dit formulaire.

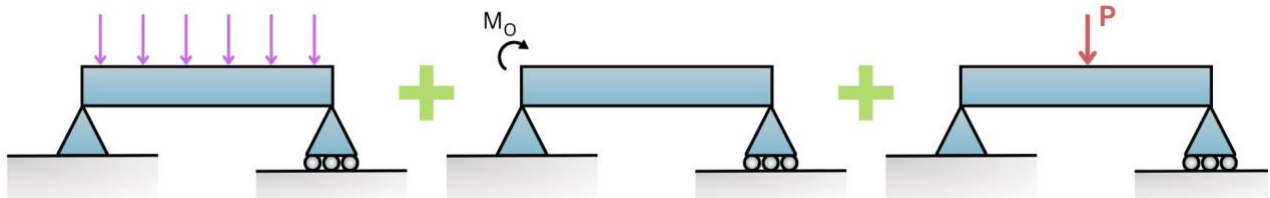
Basé sur ce critère, on peut établir que si on choisit comme redondant:

- $M_A$  et  $R_A$  : pas dans le formulaire, il faudrait procéder par intégration
- $M_A$  et  $R_B$  : on retrouve une poutre avec un pivot à gauche et un support à droite, soit la table G-2.
- $M_A$  et  $R_C$  : pas dans le formulaire, il faudrait procéder par intégration

- $R_A$  et  $R_B$  : pas dans le formulaire, il faudrait procéder par intégration
- $R_A$  et  $R_C$  : pas dans le formulaire, il faudrait procéder par intégration
- $R_B$  et  $R_C$  : on retrouve une poutre avec un encastrement à gauche et une extrémité libre à droite, soit la table G-1.

Nous allons donc traiter les deux cas où la superposition peut être utilisée:

**cas 1:  $M_A$  et  $R_B$  sont les redondants** : On peut séparer la poutre en 3 parties: la première avec les charges mais sans les redondants, puis les autres avec chacune respectivement un redondant. Attention, on remarque que dans le formulaire,  $M_0$  et  $P$  sont dans la direction opposée de  $M_A$  et  $R_B$  il faudra donc bien penser à changer le signe.



**Figure 9b.7.2** | Superposition à effectuer dans le cas 1:  $M_A$  et  $R_B$  comme redondants

$$\text{Poutre a): } w(x) = \frac{-qx}{24EI} (L^3 - 2Lx^2 + x^3) \quad w'(x) = \frac{-q}{24EI} (L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$$

$$\text{Poutre b): } w(x) = \frac{M_A x}{6LEI} (2L^2 - 3Lx + x^2) \quad w'(x) = \frac{M_A}{6LEI} (2L^2 - 6Lx + 3x^2)$$

$$\text{Poutre c): } w(x) = \frac{R_B x}{48EI} (3L^2 - 4x^2) \quad w'(x) = \frac{R_B}{16EI} (L^2 - 4x^2) \quad x \leq L/2$$

On utilise maintenant les équations de compatibilité au point où le redondant est appliqué.

On a dans ce cas: i) Angle bloqué par  $M_A$ :  $w'(0) = 0$  et ii) déflexion bloquée par  $R_B$ :  $w(L/2) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} w'(0) = 0 = \frac{-qL^3}{24EI} + \frac{M_A \cdot 2L^2}{6LEI} + \frac{R_B L^2}{16EI} \\ w\left(\frac{L}{2}\right) = 0 = \frac{-qL}{48EI} \left( L^3 - \frac{2L^3}{4} + \frac{L^3}{8} \right) + \frac{M_A}{12EI} \left( 2L^2 - \frac{3L^2}{2} + \frac{L^2}{4} \right) + \frac{R_B L}{96EI} \left( 3L^2 - 4 \frac{L^2}{4} \right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w'(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{-qL^2}{24} + \frac{M_A}{3} + \frac{R_B L}{16} = 0 \\ w\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{-5qL^2}{384} + \frac{M_A}{16} + \frac{R_B L}{48} = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{De la partie } w(L/2) = 0. \text{ donc } \frac{-5qL^2}{384} + \frac{M_A}{16} + \frac{R_B L}{48} = 0 \Leftrightarrow M_A = \frac{5qL^2}{24} - \frac{R_B L}{3}$$

En injectant ce résultat dans la partie  $w'$ :

$$\frac{-qL^2}{24} + \frac{5qL^2}{24} - \frac{R_B L}{3} + \frac{R_B L}{16} = 0 \Leftrightarrow R_B = \frac{4qL}{7} \text{ et de l'éq (2): } M_A = \frac{qL^2}{56}$$

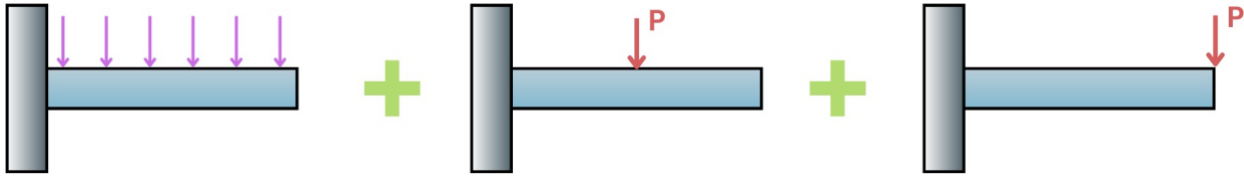
En reprenant les équations d'équilibre des forces et des moments:

$$\Sigma M_z = 0 = M_A + R_B \frac{L}{2} + R_C L - \frac{-qL^2}{2} \Leftrightarrow \frac{qL^2}{56} + \frac{4qL}{7} \frac{L}{2} + R_C L - \frac{-qL^2}{2} = 0 \Leftrightarrow R_C = \frac{11qL}{56}$$

$$\Sigma F_y = 0 = R_A + R_B + R_C - qL \Leftrightarrow R_A = qL - \frac{4qL}{7} - \frac{11qL}{56} = \frac{13qL}{56}$$

On trouve donc finalement :  $R_A = \frac{13qL}{56}$     $R_B = \frac{4qL}{7}$     $R_C = \frac{11qL}{56}$     $M_A = \frac{qL^2}{56}$

**Cas 2:  $R_B$  et  $R_C$  sont les redondants.** On peut séparer la poutre en 3 parties: la première avec les charges mais sans les redondants, puis les autres avec chacune respectivement un redondant. Attention, on remarque que dans le formulaire, P est dans les deux cas dans la direction opposée de  $R_B$  et  $R_C$  il faudra donc bien penser à changer le signe.



**Figure 9.7.3** | Superposition à effectuer pour le cas 2.  $R_B$  et  $R_C$  sont les redondants

Poutre a):  $w(x) = \frac{-qx^2}{24EI} (6L^2 - 4Lx + x^2) \quad 0 < x < L$

Poutre b):  $w(x) = \frac{R_B x^2}{6EI} \left( \frac{3L}{2} - x \right) \quad x \leq L/2$  et  $w(x) = \frac{R_B L^2}{24EI} \left( 3x - \frac{L}{2} \right) \quad x > L/2$

Poutre c):  $w(x) = \frac{R_C x^2}{6EI} (3L - x) \quad 0 < x < L$

On utilise les équations de compatibilité au point où le redondant est appliqué.

On a dans ce cas: Déflexion bloquée par  $R_B$ :  $w(L/2) = 0$  et déflexion bloquée par  $R_C$ :  $w(L) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} w\left(\frac{L}{2}\right) = 0 = \frac{-qL^2}{96EI} \left( 6L^2 - \frac{4L^2}{2} + \frac{L^2}{2} \right) + \frac{R_B L^2}{24EI} \left( \frac{3L}{2} - \frac{L}{2} \right) + \frac{R_C L^2}{24EI} \left( 3L - \frac{L}{2} \right) \quad (1) \\ w(L) = 0 = \frac{-qL^2}{24EI} (6L^2 - 4L^2 + L^2) + \frac{R_B L^2}{24EI} \left( 3L - \frac{L}{2} \right) + \frac{R_C L^2}{6EI} (3L - L) \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{-q}{4} \frac{17L}{4} + R_B + \frac{5R_C}{2} = 0 \quad (1) \\ w(L) = 0 \Leftrightarrow \frac{-3qL}{4} + \frac{5R_B}{8} + 2R_C = 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

De la partie (1):  $\frac{-q}{4} \frac{17L}{4} + R_B + \frac{5R_C}{2} = 0 \Leftrightarrow R_B = \frac{17qL}{16} - \frac{5R_C}{2}$

En injectant ce résultat dans la partie (2):

$$\frac{-3qL}{4} + \frac{5\left(\frac{17qL}{16} - \frac{5R_C}{2}\right)}{8} + 2R_C = 0 \Leftrightarrow R_C = \frac{11qL}{56} \text{ et de l'éq (1): } R_B = \frac{4qL}{7}$$

En reprenant les équations d'équilibre des forces et des moments:

$$\Sigma M_z = 0 = M_A + R_B \frac{L}{2} + R_C L - \frac{-qL^2}{2} \Leftrightarrow M_A + \frac{4qL}{7} \frac{L}{2} + \frac{11qL}{56} L - \frac{-qL^2}{2} = 0 \Leftrightarrow M_A = \frac{qL^2}{56}$$

$$\Sigma F_y = 0 = R_A + R_B + R_C - qL \Leftrightarrow R_A = qL - \frac{4qL}{7} - \frac{11qL}{56} = \frac{13qL}{56}$$

On trouve donc finalement :  $R_A = \frac{13qL}{56}$     $R_B = \frac{4qL}{7}$     $R_C = \frac{11qL}{56}$     $M_A = \frac{qL^2}{56}$