

## Série 8b – solution

### Problème 8b.1 – microscope à force atomique (AFM)

Le principe du microscope à force atomique (AFM) est de mesurer la topologie d'une surface en enregistrant la déflexion d'une poutre micrométrique qu'on déplace sur la surface. Pour cela, on utilise une poutre micro-usinée avec une pointe pyramidale (le triangle sur le dessin 8a.1.1.) indéformable dont l'extrémité très fine (rayon de de courbure de quelques nanomètres) touche la surface à scanner.

Pour ce problème, on s'intéresse à deux cas de figure :

1. On appuie la pointe sur la surface plate, zone A.
2. On appuie la pointe sur la surface inclinée, zone B.

Le contact avec les surfaces A et B se fait sans aucun frottement. L'extrémité de la pointe peut donc glisser librement. La poutre est de masse négligeable, de dimensions  $a=500\ \mu\text{m}$ ,  $b=80\ \mu\text{m}$ , épaisseur  $=10\ \mu\text{m}$  (selon  $e_y$ ), largeur  $l = 14\ \mu\text{m}$  (selon  $e_z$ ), et de module de Young  $E = 150\ \text{GPa}$ .

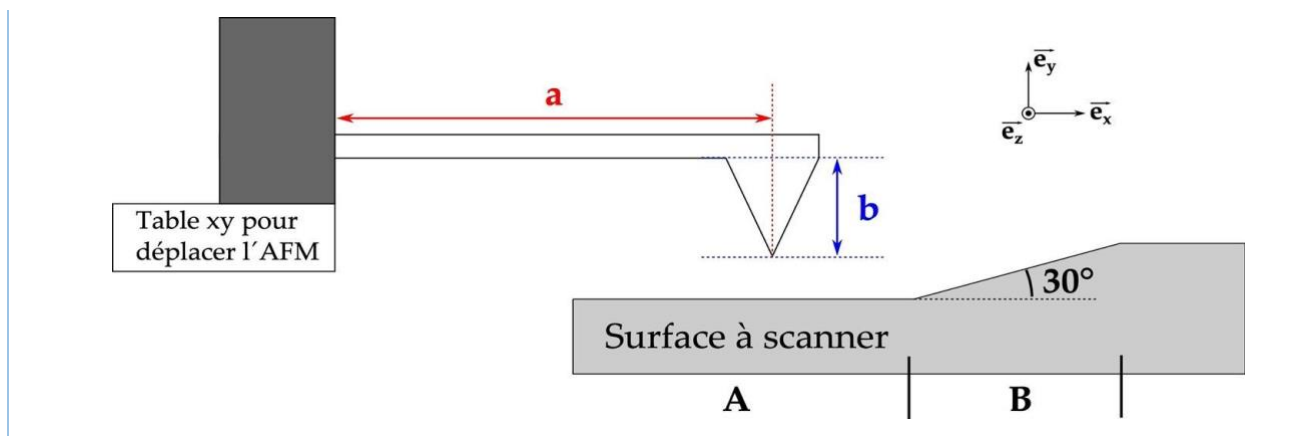
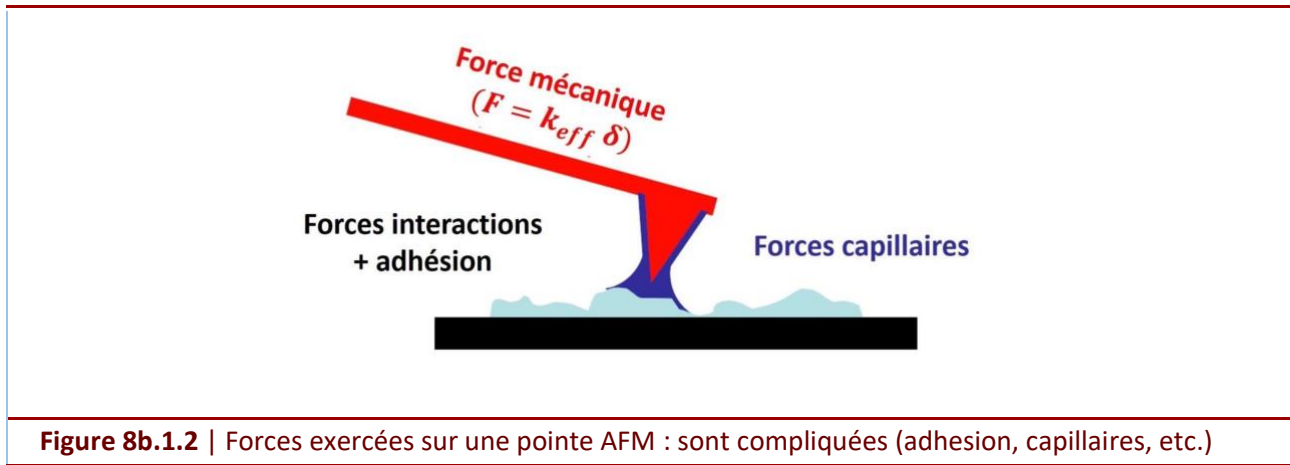


Figure 8b.1.1 | Pointe AFM pour scanner une surface.

Pour le premier cas (zone A), on approche la table en  $-e_y$  jusqu'à ce que la déflexion verticale (selon  $e_y$ ) de la poutre soit de  $\delta = 30\ \mu\text{m}$  à une distance  $a$  de l'encastrement.

- (a) A quelle distance de l'encastrement le moment de flexion interne de la poutre est-il maximal? Calculez ce moment.
- (b) En pratique, la force totale exercée par la surface sur la pointe AFM est inconnue (voir figure 8a.1.2). Elle est donc estimée en utilisant la formule :  $F = k_{eff}\delta$ . Déterminer la constante ressort  $k_{eff}$  de la poutre.



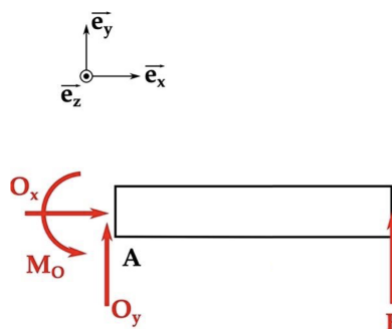
Pour le deuxième cas (zone B), la force de réaction de la surface B sur le bout de la pointe a une norme de 1 mN.

- (c) Calculer les réactions sur la poutre au niveau de l'encastrement.
- (d) Calculer l'angle  $\theta(a)$  que fait la poutre par rapport à l'horizontale ( $e_x$ ) à une distance  $a$  de l'encastrement.

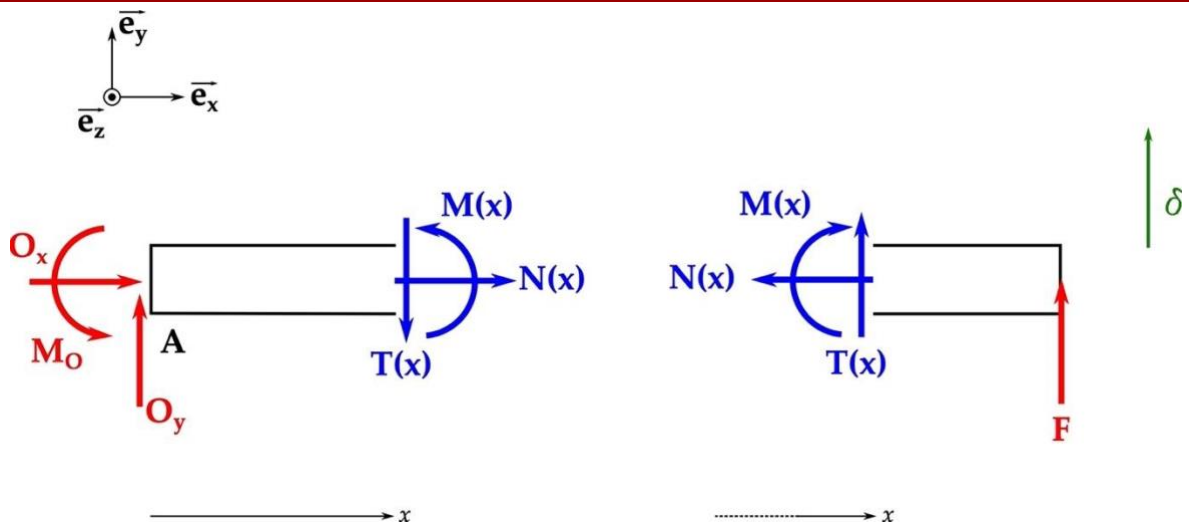
### Solution 8b.1

- (a) Comme toujours, plusieurs façons de résoudre. Ici une approche trouvant  $M(x)$  puis  $w(x)$  en fonction de  $F$ , on trouve  $F$  car on connaît  $w(x = a)$

On dessine le diagramme des forces de la poutre entière. Il y a un force vertical  $F$  sur la pointe.



Puis on "coupe" la poutre en deux sous-systèmes pour trouver le moment interne de flexion par la méthode des sections. Pour question a), la partie pointue de la poutre ne change rien aux calculs, et nous ne l'avons donc pas représenté. (Figure 8b.1.3):



**Figure 8b.1.3** | Sous-système pour quand la pointe touche la zone A

On a directement, sur la partie de droite :

$$\Sigma M_x = -M(x) + (a - x)F = 0 \quad (1)$$

$$M(x) = F(a - x) \quad (2)$$

Le moment est maximal en  $x = 0$ , c'est-à-dire à l'encastrement :

$$M(x = 0) = Fa \quad (3)$$

On utilise maintenant les équations de flexion des poutres :

$$w''(x) = \frac{M(x)}{EI} = \frac{F(a-x)}{EI} \quad (4)$$

$$w'(x) = x \frac{aF}{EI} - \frac{1}{2}x^2 \frac{F}{EI} + C_1 \quad (5)$$

$$w(x) = \frac{1}{2}x^2 \frac{aF}{EI} - \frac{1}{6}x^3 \frac{F}{EI} + C_1x + C_2 \quad (6)$$

$C_1$  et  $C_2$  sont des constantes d'intégration

Les conditions aux bords nous aident:

$$w'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0 \quad (7)$$

$$w(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0 \quad (8)$$

$$w(x) = \frac{1}{2}x^2 \frac{aF}{EI} - \frac{1}{6}x^3 \frac{F}{EI} \quad (9)$$

Insérons la flèche  $\delta$  dans l'équation pour trouver le moment maximal :

$$\delta = w(a) = \frac{1}{3}a^3 \frac{F}{EI} \quad (10)$$

$$F = \frac{3EI\delta}{a^3} \quad (11)$$

$$M(0) = \frac{3EI\delta}{a^2} \quad (12)$$

Application numérique :

Pour le calcul de  $I$ , nous pouvons ignorer l'effet de la pyramide

$$I = \frac{le^3}{12} = 1166.7 \mu m^4 = 1166.7 \times 10^{-24} m^4 \quad (13)$$

$$M(0) = 63 \text{ nNm} = 6.3 \times 10^{-8} Nm \quad (14)$$

(b) On peut calculer la constante ressort de la poutre grâce à l'équation (11) :

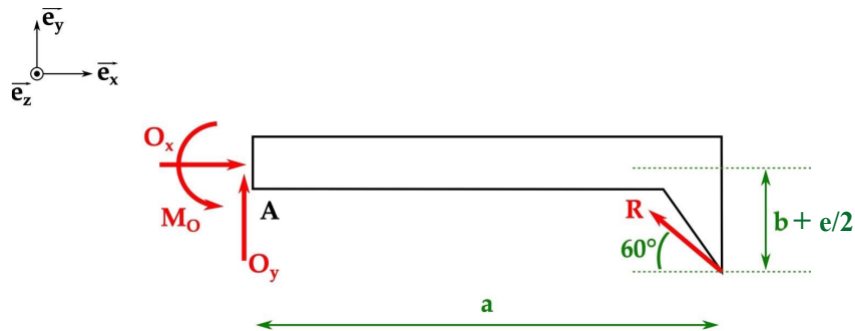
$$F = k_{eff} \delta \quad (15)$$

$$F = \frac{3EI}{a^3} \delta \quad (16)$$

$$k_{eff} = \frac{3EI}{a^3} \quad (17)$$

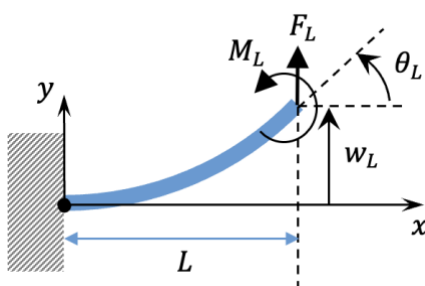
Application numérique :

$$k_{eff} = 4.2 \text{ N/m} \quad (18)$$



**Figure 8b.1.4** | Diagramme des forces pour pointe dans la zone B : la force de réaction de la surface est perpendiculaire à la surface, et donc fait un angle de  $30^\circ$  avec la verticale.

Alternative par le slide 49+51



$$\theta_L = \theta(L) = \frac{M_L L}{EI} + \frac{F_L L^2}{2EI}$$

$$w_L = w(L) = \frac{M_L L^2}{2EI} + \frac{F_L L^3}{3EI}$$

Sachant que  $M(x=a)=0$ , on a tout de suite  $w(L) = \frac{M_L L^2}{2EI} + \frac{F_L L^3}{3EI} = \delta = \frac{F_L L^3}{3EI}$  ici  $L = a$  et  $F_L = F$

Donc  $F = \frac{3EI\delta}{a^3}$ , comme ci-dessus

Et donc  $k = F/\delta = \frac{3EI}{a^3}$

(c) La figure 8b.1.4 illustre la situation lorsque la pointe AFM est dans la région B.

Comme il n'y a pas de frottement sur la surface B (la pointe peut glisser), la force de réaction R est perpendiculaire à cette surface.

$$\Sigma F = \begin{pmatrix} O_x \\ O_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R \cos(60) \\ R \sin(60) \end{pmatrix} = 0 \quad (19)$$

$$\Sigma M_z = M_0 + \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R \cos(60) \\ R \sin(60) \end{pmatrix} = 0 \quad (20)$$

Dans eq (20), nous avons négligé l'épaisseur de la poutre  $e/2$  dans le calcul du moment. Il serait plus juste d'écrire :

$$\Sigma M_z = M_0 + \begin{pmatrix} a \\ -b - \frac{e}{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R \cos(60) \\ R \sin(60) \end{pmatrix} = 0 \quad (20)$$

D'où l'on obtient :

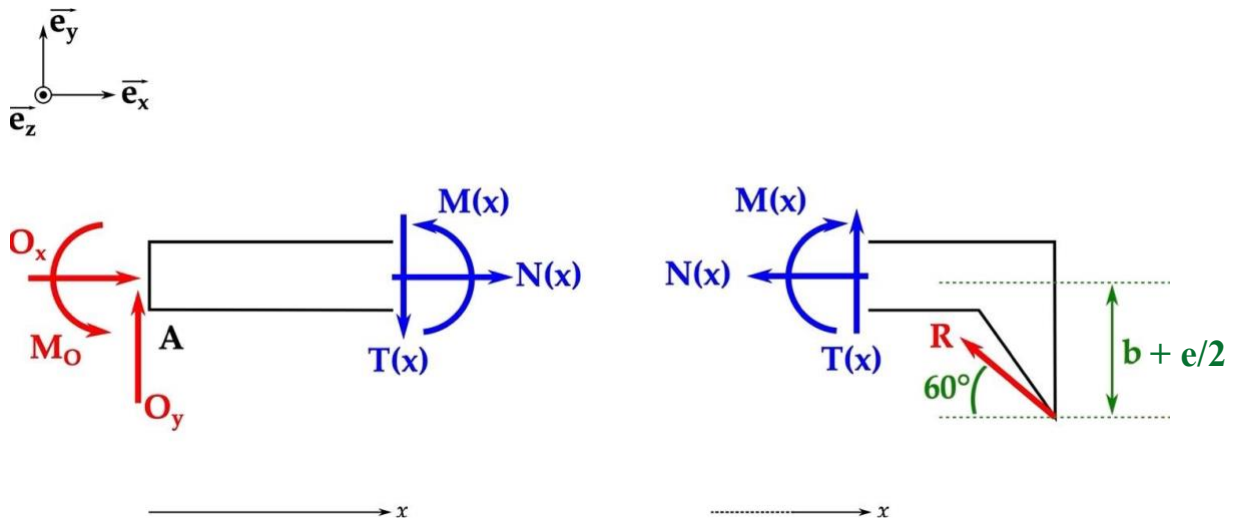
$$O_x = R \cos(60) = 0.5mN \quad (21)$$

$$O_y = -R \sin(60) = -0.866mN \quad (22)$$

$$M_0 = -a R \sin(60) + \left(b + \frac{e}{2}\right) R \cos(60) = -0.39 \mu Nm \quad (23)$$

Le moment  $M_0$  agit donc dans le sens opposé à celui dessiné sur la figure 8b.1.4.

(d) On coupe la poutre pour faire apparaître les forces internes, comme illustré sur la figure 8b.1.5 :



**Figure 8b.1.5** | Sous-systèmes pour pointe dans la zone B.

Pour la partie de droite :

$$\Sigma M_x = -M_x + (a - x - b) \wedge (-R \cos(60) R \sin(60)) = 0 \quad (24)$$

$$M(x) = -bR \cos(60) + aR \sin(60) - xR \sin(60) \quad (25)$$

Cherchons l'angle :

$$w'(x) = \int \frac{M(x)}{EI} \quad (26)$$

$$w'(x) = \frac{1}{EI} (x aR \sin(60) - \frac{1}{2} x^2 R \sin(60) - x bR \cos(60) + C_3) \quad (27)$$

$$w'(0) = 0 \rightarrow C_3 = 0 \quad (28)$$

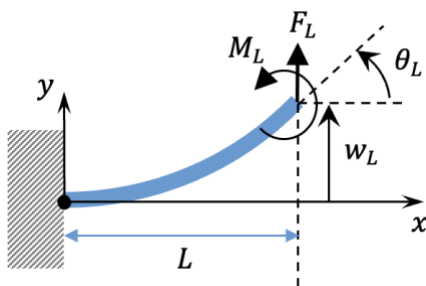
$$w'(a) = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} a^2 R \sin(60) - abR \cos(60) \right) = \tan(\theta(a)) \quad (29)$$

Application numérique :

$$\theta(a) = 0.504 \quad (30)$$

$$\theta(a) = 29^\circ \quad (31)$$

Alternative par le slide 49+51



$$\theta_L = \theta(L) = \frac{M_L L}{EI} + \frac{F_L L^2}{2EI}$$

$$w_L = w(L) = \frac{M_L L^2}{2EI} + \frac{F_L L^3}{3EI}$$

Attention, ce calcul n'est valable que pour force et moment appliqués à l'extrémité de la poutre. Masi notre force est au bout de la pyramide. Si on la décale au bout de la poutre, on doit ajouter un moment  $M_L$

Pour notre cas sur la pente à  $30^\circ$ , nous avons  $F_L = R \sin(60)$  et  $M_L = R b \cos(60)$  et donc

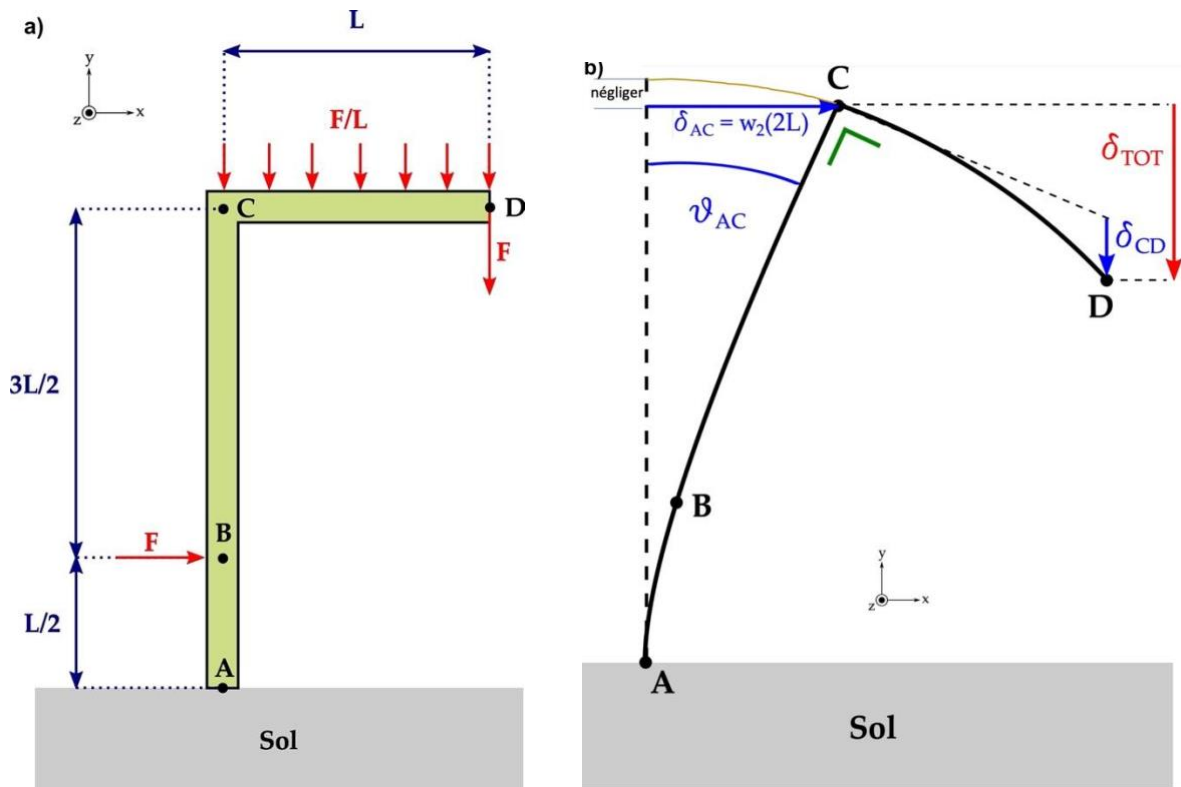
$$\theta(L) = \frac{M_L L}{EI} + \frac{F_L L^2}{2EI} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} a^2 R \sin(60) - abR \cos(60) \right)$$

Comme ci-dessus

## Problème 8b.2 – Calcul de la déflexion d'une structure

Considérez le système présenté à la figure 8b.2.1. La structure de masse négligeable est composée de deux poutres (qui ont le même  $E$  et  $I$ ) formant un angle droit en C à tout instant.

La poutre de segment AC est encastree en A et on considère qu'elle ne peut fléchir que selon  $x$  (horizontalement). Pour la poutre CD, on considère qu'elle ne peut fléchir que selon  $y$  (verticalement). Deux forces  $F$  sont appliquées aux points B et D. Une force distribuée de densité  $F/L$  est appliquée sur le segment CD.



**Figure 8b.2.1** | (a) Structure composée de deux poutres formant un angle droit entre elles. (b) Schéma de la déflexion du point D.

A l'aide de la figure 8b.2.1, donnez l'expression de la déflexion totale  $\delta_{TOT}$  du point D. Référez-vous à la figure pour bien comprendre la déflexion demandée (nous allons négliger le mouvement parasite du point C selon l'axe  $y$ ).  $\delta_{TOT}$  du point D est due à a) l'angle  $\theta_{AC}$  de la poutre AC en C, et le fléchissement  $\delta_{CD}$  de la poutre CD.

Indices :

i) petits angles :  $\sin(\theta) = \theta$

ii) 2 poutres : AC et CD

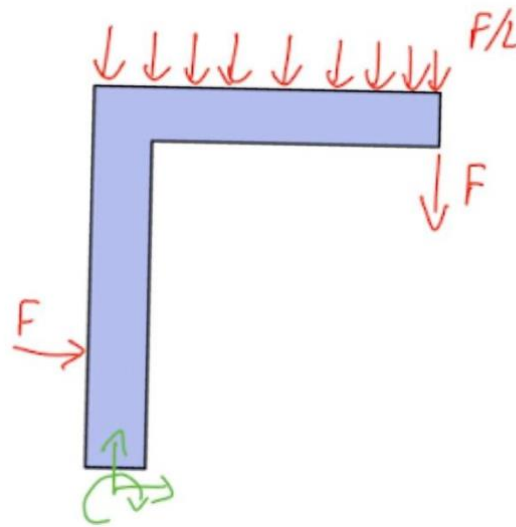
iii) Calculez l'angle  $\theta_{AC}$  de la poutre AC en C, ce qui vous permet de trouver le mouvement de D selon  $y$  dû au fléchissement de la poutre AC.

iv) puis déflexion  $\delta_{CD}$  selon  $y$  de poutre CD

Exprimez votre résultat  $\delta_{TOT}$  en fonction de  $F$ ,  $L$  (et de  $E$  et de  $I$ ).

## Solution – 8b.2

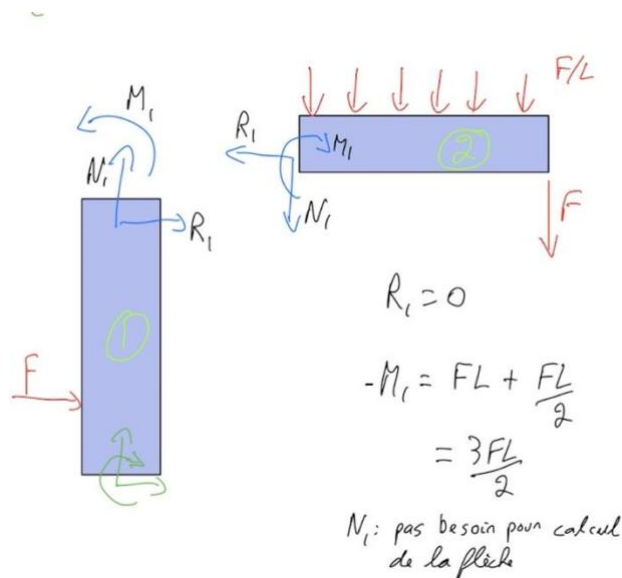
Tout d'abord, un diagramme des forces du système entier, voir la figure 8b.2.3.



**Figure 8b.2.3** | Diagramme des forces de la grue.

Puis on peut décomposer la grue en deux poutres. Attention, il y a forces et moment où on coupe entre barre verticale et barre horizontale !

La figure 8b.2.4 présente les 2 sous-systèmes (poutres AC et CD) nécessaires à la résolution du problème.



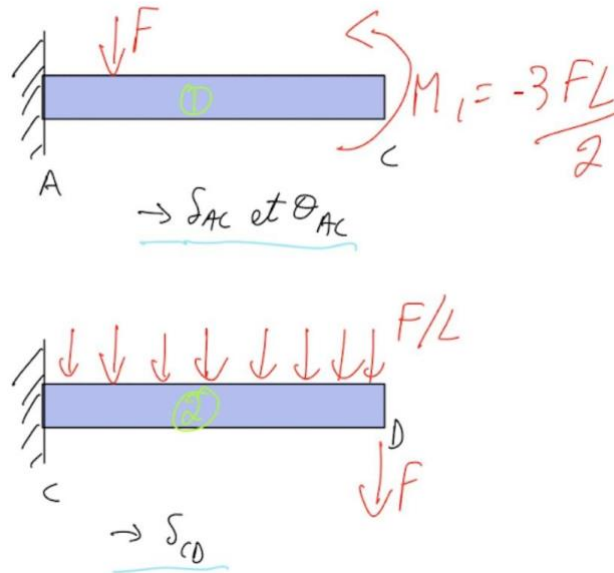
**Figure 8b.2.4** | Diagramme des forces des deux barres AC et CD.

### Méthode 1 : superpositions et tabelles

Considérons la poutre AC. Elle subit une force  $F$  à  $L/3$  et en C un moment de  $M_1 = 3FL/2$  dû à la charge sur la poutre CD. Pour utiliser la méthode de superpositions et les tabelles, il faudra sommer les déflexions et les angles dû à i) la force et ii) au moment.

La poutre CD subit une force ponctuelle à son extrémité, et une force uniforme distribuée. Il faudra donc sommer 2 solutions pour trouver la déflexion

En utilisant le formulaire de "beam deflection" sur Moodle ou Geere+Goodno on peut trouver rapidement l'expression exacte de  $\delta_{TOT}$  par superposition. La figure 8b.2.5 présente les 2 poutres encastrées que nous utiliserons avec le formulaire.



**Figure 8b.2.5 |** Sous-systèmes pour les formulaires.

$$\theta_{AC} = u'_2(2L) = -\frac{25}{8} \frac{FL^2}{EI} \quad (32)$$

$$\delta_{AC} = u_2(2L) = -\frac{155}{48} \frac{FL^3}{EI} \quad (\text{mais pas besoin}) \quad (33)$$

La poutre CD subit une force ponctuelle et une force distribuée. Il faut donc sommer deux contributions à la déflexion et l'angle de CD.

Pour trouver la déflexion propre de la poutre CD, avec  $P = F$ ,  $l = L$  et  $w = F/L$ :

$$\delta_{CD} = u_2(L) = -\frac{11}{24} \frac{FL^3}{EI} \quad (34)$$

Finalement, pour la déflexion du point D (somme de la flèche de CD et de l'effet de l'inclinaison de la poutre AC) :

$$\delta_{TOT} = v(L) = \theta_{AC}L + \delta_{CD} = -\frac{43}{12} \frac{FL^3}{EI} \quad (35)$$

## Méthode 2 : flèche par intégration

On peut retrouver le même résultat par intégration de la charge. Nous devons analyser chaque poutre indépendamment.

### Poutre 1 :

Par l'équilibre des forces et des moments, on a :  $A_y = F$  et  $M_A = -\frac{FL}{2} + M_1 = -2FL$

Puisque aucune charge n'est appliquée, on :

$$q(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq 2L \quad (36)$$

On sait que  $V(x) = \int -q(x')dx'$  :

$$\begin{aligned} V_1(x) &= C_1 \\ V_2(x) &= C_2 \end{aligned} \quad (37)$$

Avec les conditions aux bords :  $V_1(0) = F$  et  $V_2(2L) = 0$  :

$$\begin{aligned} V_1(x) &= F & x \leq L/2 \\ V_2(x) &= 0 & x > L/2 \end{aligned} \quad (38)$$

On sait que  $M(x) = \int V(x')dx'$  :

$$\begin{aligned} M_1(x) &= Fx + C_3 & x \leq L/2 \\ M_2(x) &= C_4 & x > L/2 \end{aligned} \quad (39)$$

Avec les conditions aux bords :  $M_1(0) = M_A$  et  $M_2(2L) = M_1$  :

$$\begin{aligned} M_1(x) &= Fx + M_A & x \leq L/2 \\ M_2(x) &= M_1 & x > L/2 \end{aligned} \quad (40)$$

On peut maintenant calculer la déflexion en utilisant la relation  $w(x) = \frac{1}{EI} \iint M(x) dx^2$  :

$$\begin{aligned} w'(x) - w'(x=0) &= \frac{1}{EI} \frac{Fx^2}{2} + \frac{1}{EI} M_A x & x \leq L/2 \\ w'(x) - w'(x = \frac{L}{2}) &= \frac{1}{EI} M_1 x - \frac{1}{EI} M_1 \frac{L}{2} & x > L/2 \end{aligned} \quad (41)$$

Avec l'encastrement à gauche, on a :  $w'(x=0) = 0$ .

On utilise la continuité de l'angle pour trouver  $w'(x = \frac{L}{2})$ :

$$\frac{1}{EI} \frac{FL^2}{2} + \frac{1}{EI} \left(-\frac{FL}{2} + M_1\right) \frac{L}{2} = \frac{1}{EI} M_1 \frac{L}{2} - \frac{1}{EI} M_1 \frac{L}{2} + w'(x = \frac{L}{2}) \quad (42)$$

$$w'_{AC}(x = \frac{L}{2}) = -\frac{7FL^2}{8EI} \quad (43)$$

On peut donc calculer l'angle pour  $x=2L$  :

$$w'_{AC}(2L) = \frac{-3FL}{2EI} 2L - \frac{-3FL}{2EI} \frac{L}{2} - \frac{7FL^2}{8EI} = -\frac{25}{8} \frac{FL^2}{EI} = \theta_{AC} \quad (44)$$

### Poutre 2 :

Par l'équilibre des forces et des moments, on a :  $A_y = 2F$  et  $M_A = -FL - \int_0^L \frac{F}{L} x dx = \frac{-3FL}{2}$

Aucune force ni moment ponctuel n'est appliqué. Une charge est appliquée le long de la poutre.

$$q(x) = \frac{F}{L} \quad 0 \leq x \leq L \quad (45)$$

On sait que  $V(x) = \int -q(x')dx'$  :

$$V(x) = -\frac{F}{L} x + C_1 \quad (46)$$

Avec la condition aux bords :  $V(x=0) = 2F$ :

$$V(x) = -\frac{F}{L}x + 2F \quad x \leq L \quad (47)$$

On sait ensuite que  $M(x) = \int V(x')dx'$  :

$$M(x) = -\frac{F}{L}\frac{x^2}{2} + 2Fx + C_2 \quad x \leq L \quad (48)$$

Avec la condition aux bords :  $M(x = 0) = M_A$  :

$$M_1(x) = -\frac{F}{L}\frac{x^2}{2} + 2Fx + M_A \quad x \leq L \quad (49)$$

On peut maintenant calculer la déflexion en utilisant la relation  $w(x) = \frac{1}{EI} \iint M(x) dx \cdot dx$  :

$$w'(x) - w'(x = 0) = -\frac{F}{L} \frac{x^3}{6EI} + \frac{1}{EI} \frac{2Fx^2}{2} + \frac{1}{EI} M_A x \quad x \leq L \quad (50)$$

Avec l'encastrement à gauche, on a :  $w'(x = 0) = 0$  et  $w(x = 0) = 0$

En utilisant les conditions limites trouvées ci-dessus, on trouve que la déflexion le long du système CD est :

$$w_{CD}(x) = -\frac{F}{L} \frac{x^4}{24EI} + \frac{1}{EI} \frac{2Fx^3}{6} + \frac{1}{EI} M_A \frac{x^2}{2} \quad (51)$$

On peut donc calculer la déflexion pour  $x = L$  :

$$w(L) = -\frac{F}{L} \frac{(2L)^4}{24EI} + \frac{1}{EI} \frac{2F(2L)^3}{6} + \frac{1}{EI} M_A \frac{(2L)^2}{2} \quad (52)$$

$$w_{CD}(L) = -\frac{11}{24} \frac{FL^3}{EI} = \delta_{CD} \quad (53)$$

On retrouve bien le même résultat qu'avec la méthode de superposition.

$$\delta_{TOT} = v(L) = \theta_{AC}L + \delta_{CD} = -\frac{43}{12} \frac{FL^3}{EI}$$

### Problème 8b.3 – Guidage flexible

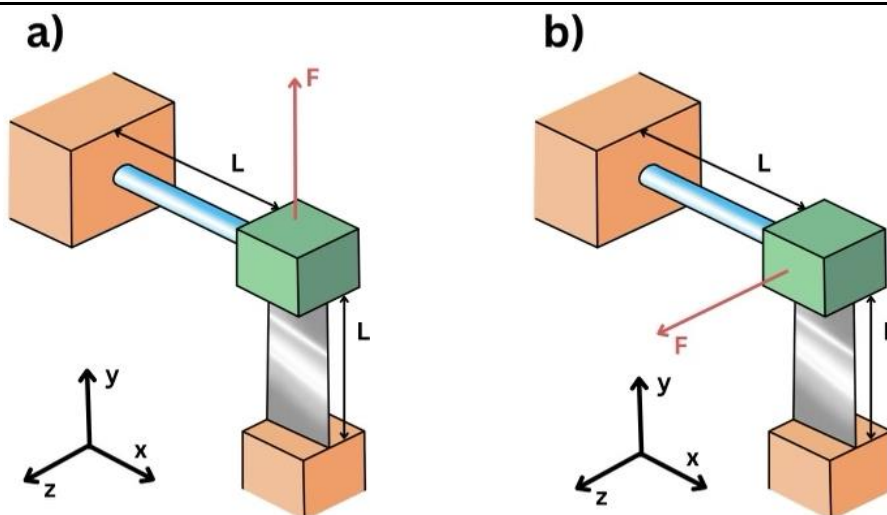
La figure 8b.3.1 montre un guidage flexible. La lame et la tige ont une longueur  $L$ . Une force  $F$  est appliquée. **Dans chaque cas (soit force selon  $y$  soit force selon  $z$ ), déterminez la constante de rigidité du système complet.**

On considère la tige bleue et la lame grise comme des poutres faites d'un même matériau de module de Young  $E$ . La tige a comme moment d'inertie  $I_z = I_y$ . La lame a une section de surface  $A$ , et un moment d'inertie  $I_{x,lame}$ .

Le bloc vert est indéformable. lame et poutre sont encastrés dans le bloc vert. Le bloc ne tourne pas (pas de rotation)

Indices :

- Comme le bloc ne se déforme pas, nous devons avoir la même déflexion à l'extrémité de la tige et de la lame.
- Comme il n'y a pas de rotation du bloc, on connaît l'angle de l'extrémité de de la poutre ( $0^\circ$ ).



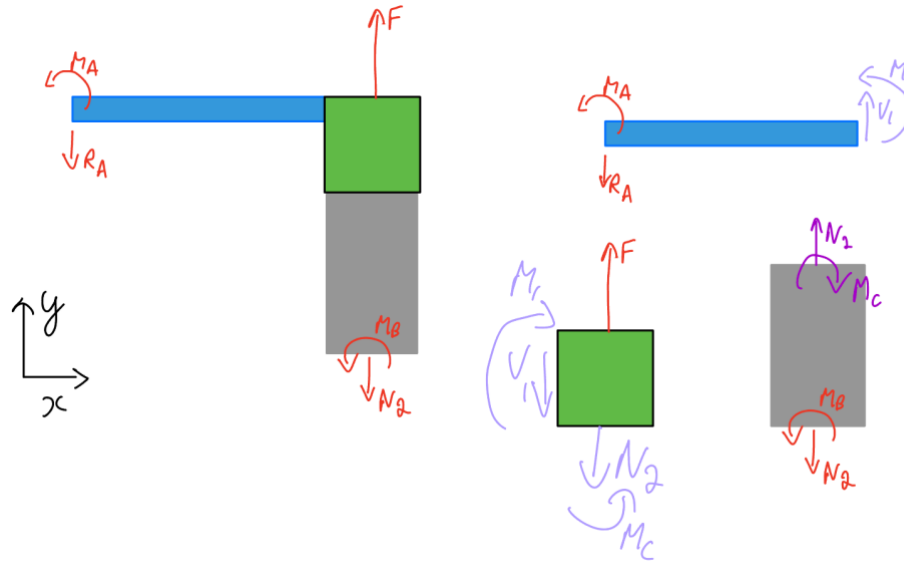
**Figure 8b.3.1** | Guidage flexible. La force est appliquée a) selon  $e_y$ , b) selon  $e_z$

### Solution

Rappel de la méthode pour trouver  $K$  des guidages flexibles :

1. Définir la force d'entrée  $F$  et le déplacement de sortie  $X$
2. Diagramme des forces
3. Isoler les éléments flexibles et identifier les déformations  $x_i$  des éléments flexibles
4. calculer  $X = X(x_i)$
5. Identifier toutes les forces et moments externes agissant sur les éléments flexibles
6. Déterminer ces forces et moments externes en fonction de  $F$  (*attention, il faudra souvent des hypothèses supplémentaires*)

7. Calculer les déformations  $x_i$  des divers éléments flexibles
8. Déterminer X
9. Calculer  $K = F/X$



**Figure 8b.3.2 | cas (a)** Diagramme des forces du système entier et des 3 sous-systèmes du guidage flexible

La force  $F$  est « divisée » entre tige et lame :  $F = V_1 + N_2$

Pour le guidage (a), la figure 8b.3.2 illustre le diagramme des forces.

Nous allons calculer la déflexion  $w_1$  de la tige et l'élongation  $w_2$  de la lame, tous les deux selon  $y$ .

Comme le bloc ne se déforme pas, nous devons avoir  $w_1 = w_2$

Sur le bloc mobile (vert), on a:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= F - V_1 - N_2 \rightarrow F = V_1 + N_2\end{aligned}$$

Nous ne connaissons pas encore  $V_1$  et  $N_2$ . Nous les trouverons avec  $w_1 = w_2$

On peut maintenant calculer la déflexion de chaque articulation  $x_i$  en fonction de  $V_1$  et  $N_2$

### Tige:

Pour la déflexion de la tige, on se réfère à la figure 8b.4.3, tirée du cours.

La tige est encastree, et subit une force  $F_1$  et moment  $M_1$  à son extrémité. On sait que  $\theta = 0$ .

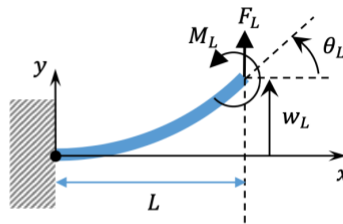
## Présentation matricielle

Variables adimensionnelles

$$\widetilde{w}_L = \frac{w_L}{L}$$

$$\widetilde{F}_L = \frac{F_L L^2}{EI}$$

$$\widetilde{M}_L = \frac{M_L L}{EI}$$



$$\begin{bmatrix} \widetilde{w}_L \\ \theta_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{F}_L \\ \widetilde{M}_L \end{bmatrix}$$

matrice de souplesse

$$\begin{bmatrix} \widetilde{F}_L \\ \widetilde{M}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{w}_L \\ \theta_L \end{bmatrix}$$

matrice de rigidité

Figure 8b.3.3 | Résumé de la forme générale matricielle

$$\theta_L = \frac{L^2}{2EI} V_1 + \frac{L}{EI} M_1 = 0$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2} V_1 L = -M_1$$

On peut donc calculer la déflexion à l'extrémité de la tige en fonction de  $V_1$ :

$$\frac{w_L}{L} = \frac{1}{3} \frac{F_L L^2}{EI} + \frac{1}{2} \frac{M_L L}{EI}$$

$$w_L = \frac{1}{3} \frac{V_1 L^3}{EI} - \frac{1}{2} \frac{V_1 L^3}{2EI}$$

$$w_1 = \frac{V_1 L^3}{12 EI}$$

**Lame:**

La déflexion de la lame est normale à la longueur de la lame. On peut donc utiliser les formules basiques d'élongation d'une lame comme ressort:

$$N_2 = k w_2$$

$$\text{Avec } k = \frac{AE}{L}$$

On obtient ainsi:

$$w_2 = \frac{N_2}{k} = \frac{N_2 L}{AE}$$

On peut maintenant obtenir la déformation totale X:

$$X = w_1 = w_2$$

$$\frac{N_2 L}{AE} = \frac{V_1 L^3}{12 EI}$$

$$\text{Avec } F = V_1 + N_2 \text{ on trouve } V_1 = \frac{F}{1 + \frac{AL^2}{12I}}$$

$$X = \frac{V_1 L^3}{12 EI} = \frac{F}{1 + \frac{AL^2}{12I}} \frac{L^3}{12 EI}$$

Et donc la rigidité du système:

$$k = F/X = \frac{12EI}{L^3} \left(1 + \frac{AL^2}{12I}\right)$$

Si  $A$  tend vers zéro, on retrouve la solution sans lame. Si  $I$  tend vers zéro, on retrouve bien la réponse pure lame.

### Solution alternative

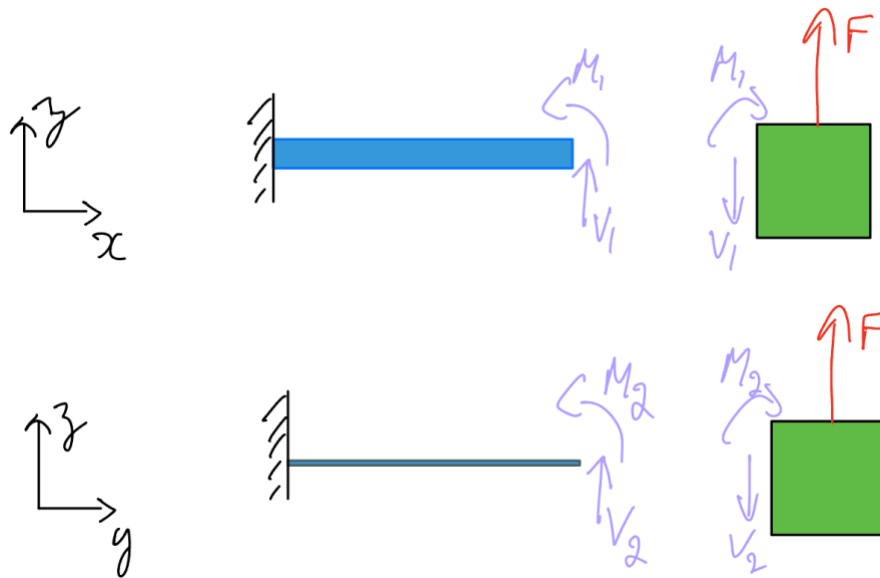
Nous avons un système avec 2 ressorts en parallèle : une lame et un poutre.

$$k_{\text{lame}} = \frac{AE}{L}$$

$$k_{\text{double-encastree}} = 12 \frac{EI}{L^3} \text{ (voir slide 23 du cours guidage flexible, semaine 9a)}$$

$$\text{Et donc } k = \frac{F}{X} = \frac{12EI}{L^3} + \frac{AE}{L}$$

**Pour le guidage (b)**, la figure 8b.3.4 illustre le diagramme des forces. Elle est composée de deux parties pour simplifier la compréhension, cependant cela reste le même diagramme.



**Figure 8b.3.4** | Diagramme des forces des sous-systèmes du guidage flexible cas (b).

Nous allons calculer la déflexion  $w_1$  de la tige et déflexion  $w_2$  de la lame. Tous les deux selon  $z$ . Comme le bloc ne se déforme pas, nous devons avoir  $w_1 = w_2$

Sur le bloc mobile (vert), on a:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= F - V_1 - V_2 \rightarrow F = V_1 + V_2 \end{aligned}$$

Nous ne connaissons pas encore  $V_1$  et  $V_2$ . Nous les trouverons avec  $w_1 = w_2$

Pour la déflexion de la tige, on se réfère à la slide 49 du cours 8b, montré sur la figure 9a.4.3

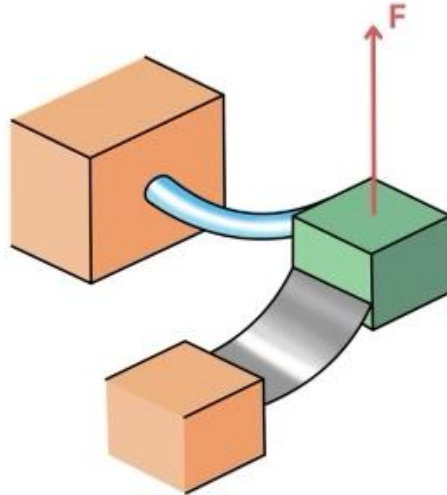
La tige est encastree, et a une force  $V_1$  et moment  $M_1$  à son extrémité. On sait que  $\theta = 0$ .

Comme au cas a),  $\theta_L = \frac{L^2}{2EI} V_1 + \frac{L}{EI} M_1 = 0$  et donc  $\frac{1}{2} V_1 L = -M_1$

De même, sur la lame (gris): la lame est encastée, et a une force  $V_2$  et moment  $M_2$  à son extrémité. On sait que  $\theta = 0$ .

Comme au cas a),  $\theta_L = \frac{L^2}{2EI} V_2 + \frac{L}{EI} M_2 = 0$  et donc  $\frac{1}{2} V_2 L = -M_2$

On peut maintenant calculer la déflexion de chaque articulation  $x_i$ . Une vue de l'effet de la déflexion est présentée en figure 8b.3.5.



**Figure 8b.3.5** | Effet de la déflexion sur les articulations

On peut se référer à la figure 8b.3.3 pour déduire que :

$$\frac{w_i}{L} = \frac{1}{3} \frac{F_L L^2}{EI_i} + \frac{1}{2} \frac{M_L L}{EI_i}$$

$$w_1 = \frac{1}{3} \frac{V_1 L^3}{EI_y} - \frac{1}{2} \frac{V_1 L^3}{2EI_y} = \frac{1}{12} \frac{V_1 L^3}{EI_y}$$

$$\text{De même, } w_2 = \frac{1}{12} \frac{V_2 L^3}{EI_{x,lame}}$$

En utilisant  $w_1 = w_2$  on a

$$\frac{1}{12} \frac{V_2 L^3}{EI_{x,lame}} = \frac{1}{12} \frac{V_1 L^3}{EI_y}$$

$$\frac{V_2}{I_{x,lame}} = \frac{V_1}{I_y}$$

$$\text{Avec } F = V_1 + V_2 \text{ on trouve } V_2 = \frac{F}{1 + \frac{I_y}{I_x}}$$

$$X = w_1 = w_2 = \frac{1}{12} \frac{L^3}{EI_{x,lame}} \frac{F}{1 + \frac{I_y}{I_x}}$$

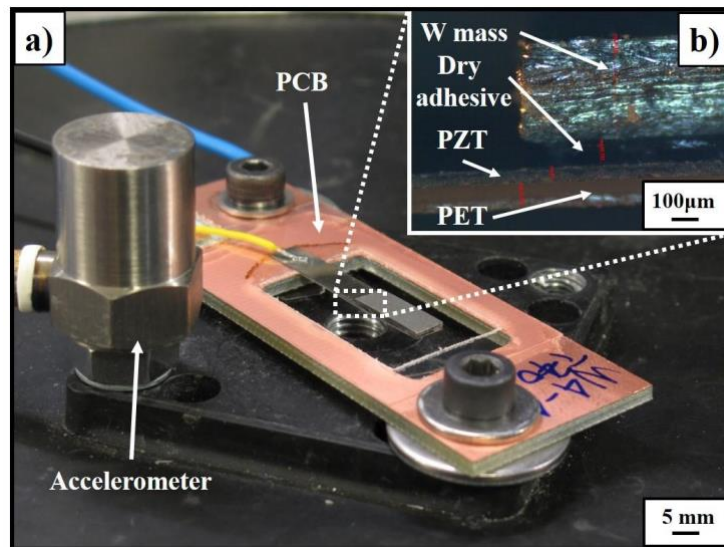
On obtient finalement:

---

$$k = \frac{F}{X} = \frac{F}{w_1} = \frac{F}{w_2} = \frac{12 EI_{x,lame}}{L^3} \left(1 + \frac{I_y}{I_{x,lame}}\right)$$

### - Problème 8b.4 – Energy Harvester

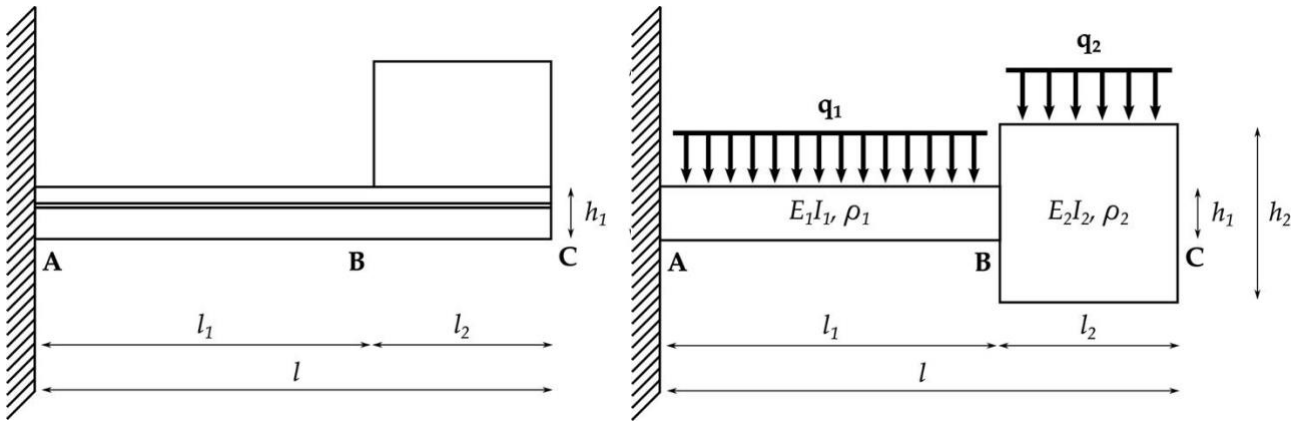
Le dispositif illustré à la figure 8b.4.1 a été fabriqué dans le labo EPFL-LMTS en 2012. C'est un récupérateur d'énergie piézoélectrique sur lequel on a ajouté une masse pour augmenter l'amplitude de déflexion, diminuer la fréquence de résonance et ainsi améliorer ses performances. Lors d'un processus d'optimisation, il a été constaté qu'un maximum d'énergie est récupéré quand la masse recouvre la moitié de la poutre. En ajoutant cette masse, la puissance récupérée a été augmentée par un facteur 20, et ce sans avoir à changer les propriétés et dimensions du matériau piézoélectrique.



**Figure 8b.4.1** | Récupérateur d'énergie

Dans cet exercice, on va chercher à évaluer l'influence de la masse ajoutée sur la déflexion statique de la poutre dû à son propre poids. Le récupérateur d'énergie est composé de plusieurs couches de matériaux différents et n'est pas symétrique par rapport au plan neutre (voir figure 8b.4.2a).

Mais pour simplifier les calculs, on considère un dispositif parfaitement symétrique par rapport au plan neutre (voir figure 8b.4.2b) composé de deux blocs uniformes juxtaposés. Le bloc 1 a une longueur  $l_1$ , une épaisseur  $h_1$ , une largeur  $b$ , une densité  $\rho_1$  et un module de Young  $E_1$ . Le bloc 2 a une longueur  $l_2$ , une épaisseur  $h_2$ , une largeur  $b$ , une densité  $\rho_2$  et un module de Young  $E_2$ .



**Figure 8b.4.2** | Schémas du récupérateur d'énergie : a) Dispositif réel (b) Dispositif équivalent, plus simple à évaluer

Pour la partie de gauche, on vous donne :

$$M_1(x) = -\frac{q_1}{2}(l_1^2 - 2l_1x + x^2) - \frac{q_2}{2}(l^2 - l_1^2 - 2lx + 2l_1x) \quad 0 < x < l_1 \quad (54)$$

Pour la partie de droite, on vous donne :

$$M_2(x) = -\frac{q_2}{2}(l^2 - 2lx + x^2) \quad l_1 < x < l \quad (55)$$

1. Donnez les 4 conditions limites nécessaires afin de déterminer la déflexion du système et notamment les équations de continuité en B.
2. Trouvez la fonction de déflexion du système. Les constantes d'intégrations sont pénibles. Vous pouvez utiliser votre outil préféré pour trouver des solutions analytiques.
3. Tracez la déflexion du système en fonction du ratio  $\lambda = l_2/l = 1 - l_1/l$ .

(Indice : Commencez par calculer le moment d'inertie pour une section rectangulaire  $I_{1,2}$  et la force de pesanteur uniformément distribuée  $q_{1,2}$  de chaque bloc en fonction de  $b$ ,  $h_{1,2}$  et  $\rho_{1,2}$ ).

Pour l'application numérique, utilisez  $E_1 = 10GPa$ ,  $E_2 = 156.25GPa$ ,  $h_1 = 200\mu m$ ,  $h_2 = 800\mu m$ ,  $\rho_1 = 3000kg\ m^{-3}$ ,  $\rho_2 = 15000kg\ m^{-3}$ ,  $l = l_1 + l_2 = 20mm$ ,  $b = 2mm$ .

### Solution 8b.4

1. Les conditions limites nécessaires à la résolution du problème sont :

$$w_1(0) = 0 \quad (58)$$

$$w_1'(0) = 0 \quad (59)$$

$$w_2(l_1) = w_1(l_1) \quad (60)$$

$$w_2'(l_1) = w_1'(l_1) \quad (61)$$

2. Pour le bloc 1 ( $0 < x < l_1$ ), l'équation de la flèche est obtenue en intégrant l'équation suivante :

$$\frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} = \frac{M_1(x)}{E_1 I_1} = \frac{-q_1(l_1^2 - 2l_1 x + x^2) - q_2(l^2 - l_1^2 - 2lx + 2l_1 x)}{2E_1 I_1} \quad (62)$$

Pour le bloc 2 ( $l_1 < x < l$ ), l'équation de la flèche est obtenue en intégrant l'équation suivante :

$$\frac{d^2 w_2(x)}{dx^2} = \frac{M_2(x)}{E_2 I_2} = \frac{-q_2(l^2 - 2lx + x^2)}{2E_2 I_2} \quad (63)$$

En utilisant les conditions limites trouvées ci-dessus, on trouve que la déflexion le long du système est :

$$w_1(x) = \frac{-q_1}{24E_1 I_1} (6l_1^2 x^2 - 4l_1 x^3 + x^4) - \frac{q_2}{24E_1 I_1} (6l^2 x^2 - 6l_1^2 x^2 - 4lx^3 + 4l_1 x^3)$$

$$w_2(x) = \frac{-q_2}{24E_2 I_2} (6l^2 x^2 - 4lx^3 + x^4 + Ax + B) \quad (64)$$

Avec :

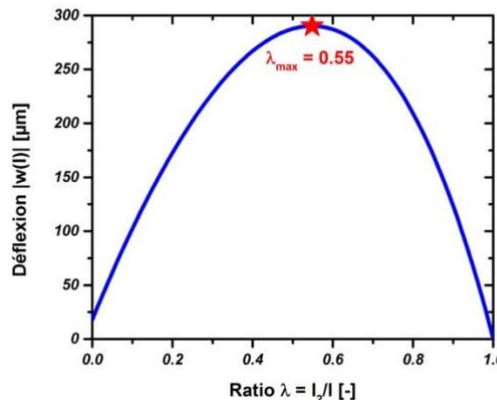
$$A = 4\left(\frac{q_1 E_2 I_2}{q_2 E_1 I_1} - 1\right)l_1^3 + 12\left(\frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} - 1\right)ll_1^2 + 12\left(\frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} - 1\right)l^2 l_1 \quad (65)$$

$$B = -\left(\frac{q_1 E_2 I_2}{q_2 E_1 I_1} + 2\frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} - 3\right)l_1^4 + 8\left(\frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} - 1\right)ll_1^3 - 6\left(\frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} - 1\right)l^2 l_1^2 \quad (66)$$

3. Le moment d'inertie et la force de pesanteur distribuée de chaque bloc sont donnés par :

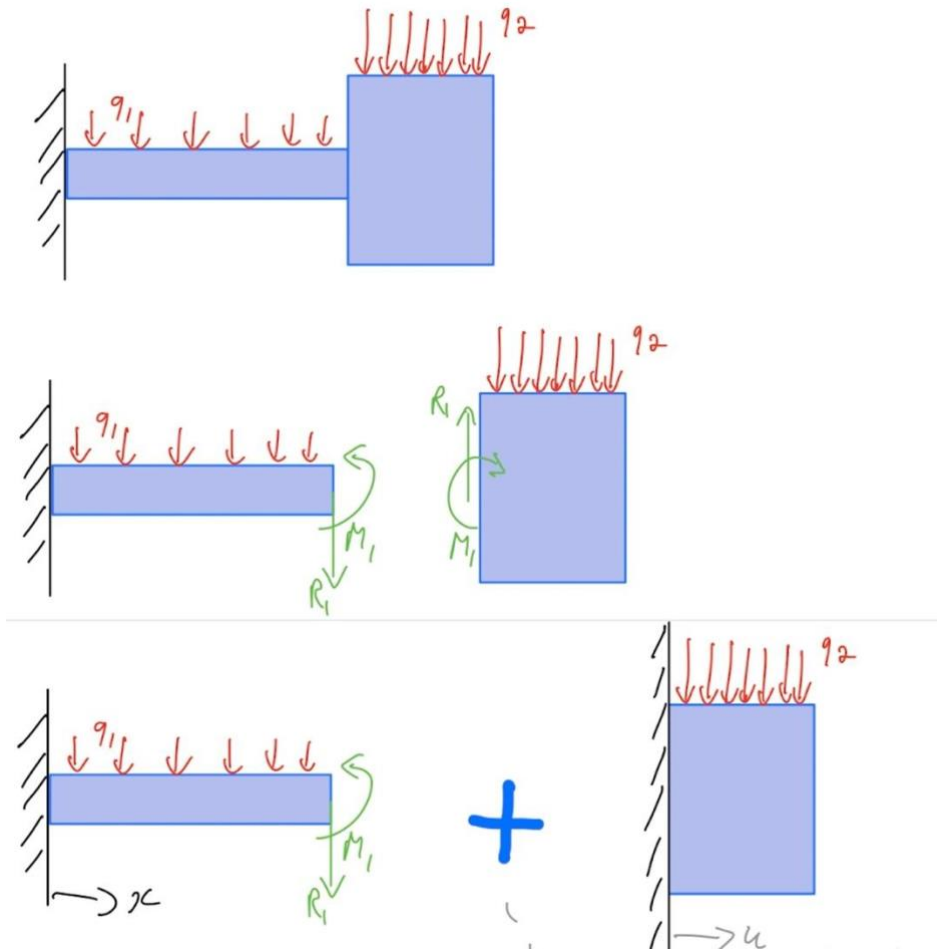
$$I_{1,2} = \frac{bh_{1,2}^3}{12}, \quad q_{1,2} = (\rho_{1,2}bh_{1,2})g \quad (67)$$

Le résultat numérique pour  $0 < l_2 < l$ , donne le graphe suivant (voir figure 9a.4.3). On a représenté l'amplitude (la norme) de la déflexion. On remarque que la déflexion maximale est obtenue pour un ratio  $\lambda = l_2/l$  de 0.55, un résultat cohérent avec la pratique. En pratique, comme on travaille en résonance, il y a un facteur d'amplification additionnel et la déflexion est plutôt de l'ordre du millimètre.



**Figure 8b.4.3** | Déflexion de l'extrémité de la poutre  $w(l)$  en fonction du ratio  $\lambda = l_2/l$ .

Il existe une autre option pour trouver  $w(x)$  si on souhaite utiliser les formulaires plutôt que d'intégrer les moments de flexions. On doit dans ce cas-là calculer indépendamment la déflexion pour  $q_1$  et  $q_2$  (voir figure 8b.4.4).



**Figure 8b.4.4** | Décomposition pour le calcul de la déflexion

Mais attention ! La flèche de la poutre de gauche dépend des forces sur la poutre de droite !  
 La solution pour la poutre de gauche n'est valide que si on tient compte des forces et moments de la poutre de droite sur la poutre de gauche. On ne peut pas simplement utiliser la charge distribuée  $q_1$  et  $q_2$ , mais il faut aussi trouver  $M_1$  et  $R_1$ .

Grace à l'énoncé, on a :

$$M_1(x) = -\frac{q_1}{2}(l_1^2 - 2l_1x + x^2) - \frac{q_2}{2}(l^2 - l_1^2 - 2lx + 2l_1x) \quad (68)$$

$$M_1(l_1) = -\frac{q_1}{2}(l_1^2 - 2l_1^2 + l_1^2) - \frac{q_2}{2}(l^2 - l_1^2 - 2ll_1 + 2l_1^2) \quad (69)$$

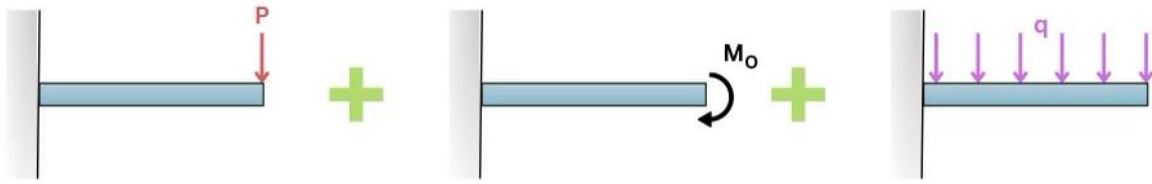
$$M_1(l_1) = -\frac{q_2}{2}(l_2^2) = M_1 \quad (70)$$

$$V_1(x) = -\frac{q_1}{2}(-2l_1 + 2x) - \frac{q_2}{2}(-2l + 2l_1) \quad (71)$$

$$V_1(l_1) = -\frac{q_1}{2}(-2l_1 + 2l_1) - \frac{q_2}{2}(-2l + 2l_1) \quad (72)$$

$$V_1(l_1) = q_2l_2 = R_1 \quad (73)$$

On décompose la première poutre en trois poutres, comme illustré sur la figure 8b.4.5, puis on utilise la méthode de superposition :



**Figure 8b.4.5** | Décomposition de la première poutre en poutres a,b, etc. P est  $R_1$ ,  $M_0$  est  $M_1$ , et q est  $q_1$

$$\text{Poutre a) : } w(x) = \frac{-Px^2}{6E_1I_1}(3l_1 - x) = \frac{R_1x^2}{6E_1I_1}(3l_1 - x) = \frac{q_2l_2x^2}{6E_1I_1}(3l_1 - x) \quad (74)$$

$$\text{Poutre b) : } w(x) = \frac{-M_0x^2}{2E_1I_1} = \frac{M_1x^2}{2E_1I_1} = \frac{-q_2l_2^2x^2}{4E_1I_1} \quad (75)$$

$$\text{Poutre c) : } w(x) = -\frac{q_1x^2}{24E_1I_1}(6l_1^2 - 4l_1x + x^2) \quad (76)$$

$$\text{On obtient : } w_1(x) = \frac{q_2l_2x^2}{6E_1I_1}(3l_1 - x) - \frac{q_2l_2^2x^2}{4E_1I_1} - \frac{q_1x^2}{24E_1I_1}(6l_1^2 - 4l_1x + x^2) \quad (77)$$

$$w_1(x) = \frac{q_2x^2}{24E_1I_1}(4(l - l_1)(3l_1 - x) - 6(l - l_1)^2) - \frac{q_1}{24E_1I_1}(6l_1^2x^2 - 4l_1x^3 + x^4)$$

$$w_1(x) = \frac{-q_2x^2}{24E_1I_1}(-4(3ll_1 - lx - 3l_1^2 + l_1x) + 6(l^2 - 2ll_1 + l_1^2)) - \frac{q_1}{24E_1I_1}(6l_1^2x^2 - 4l_1x^3 + x^4)$$

$$w_1(x) = \frac{-q_1}{24E_1I_1}(6l_1^2x^2 - 4l_1x^3 + x^4) - \frac{q_2}{24E_1I_1}(6l^2x^2 - 6l_1^2x^2 - 4lx^3 + 4l_1x^3) \quad 0 < x < l_1 \quad (78)$$

Pour la poutre de droite  $l_1 < x < l$ , on trouve par les tableaux :  $w(u) = -\frac{q_2x^2}{24E_2I_2}(6l^2 - 4lu + u^2)$ .

Mais attention. Dans ce cas, on doit penser à faire un changement de variable  $u = x - l_1$ . Il faut aussi penser que pour que la déflexion soit correcte, il faut ajouter la déflexion déjà présente par la contribution de la poutre 1 :  $w_1(x = l_1)$ , ainsi que l'angle de rotation déjà présent :  $(x - l_1) \cdot w_1'(x = l_1)$

On a donc :

$$w_2(x) = -\frac{q_2x^2}{24E_2I_2}(6l^2 - 4lx + x^2) + w(x = l_1) + (x - l_1) \cdot w'(x = l_1) \quad (79)$$

$$\text{Avec } w_1(x = l_1) = \frac{-q_1}{24E_1I_1}(6l_1^4 - 4l_1^4 + l_1^4) - \frac{q_2}{24E_1I_1}(6l^2l_1^2 - 6l_1^4 - 4ll_1^3 + 4l_1^4) \quad (80)$$

Et par dérivée :

$$w_1'(x) = \frac{dw_1(x)}{dx} = \frac{-q_1}{24E_1I_1}(12l_1^2x - 12l_1x^2 + 4x^3) - \frac{q_2}{24E_1I_1}(12l^2x - 12l_1^2x - 12lx^2 + 12l_1x^2) \quad (81)$$

$$w_1'(x = l_1) = \frac{-q_1}{24E_1I_1}(12l_1^3 - 12l_1^3 + 4l_1^3) - \frac{q_2}{24E_1I_1}(12l^2l_1 - 12l_1^3 - 12ll_1^2 + 12l_1^3) \quad (82)$$

En substituant l'ensemble des valeurs trouvées dans l'équation (79), on retrouve bien le même résultat.