

Série 6a – Solutions

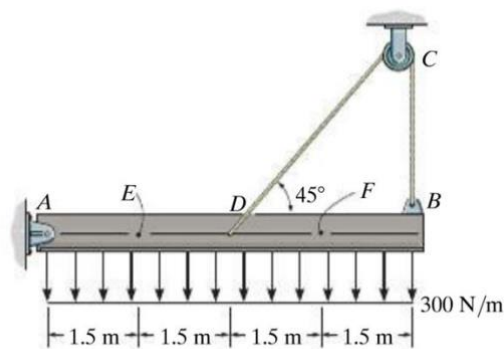
Problème 6a.1 – Diagrammes des forces pour la méthode des sections

Dessiner les diagrammes des forces des systèmes complets et des sous-systèmes requis pour la méthode des sections qui permettraient de résoudre pour déterminer les contraintes $M(x)$ ou $V(x)$ des poutres de la figure 7a.1.1

Ne faites pas de calculs ! Vous n'avez pas à résoudre pour $M(x)$ ou $V(x)$, seulement à dessiner les diagrammes des forces. A titre d'exemple, un exercice résolu est présenté à la figure 7a.1.2.

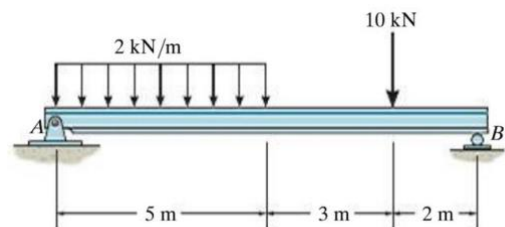
Pour chaque poutre de la figure 7a.1.1, sur vos propres dessins :

- Dessinez la poutre isolée
- Dessinez les réactions possibles aux appuis, y compris celles qui seraient trouvées nulles par calcul.
- Indiquez où couper la poutre pour calculer les contraintes internes.
- Dessinez les sous-systèmes nécessaires pour calculer le moment de flexion interne $M(x)$ le long de la poutre.



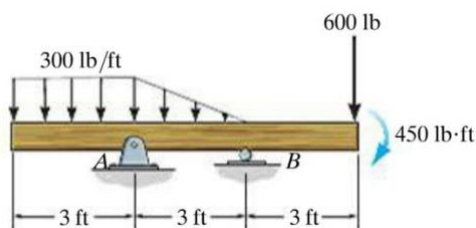
Copyright © 2013 Pearson Education, Inc.

(a) Poutre A.



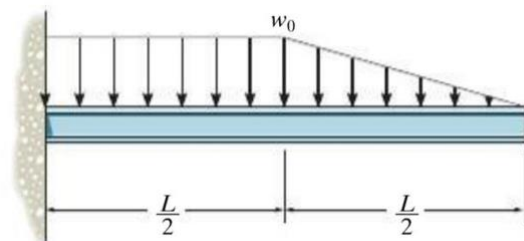
Copyright © 2013 Pearson Education, Inc.

(b) Poutre B.



Copyright © 2013 Pearson Education, Inc.

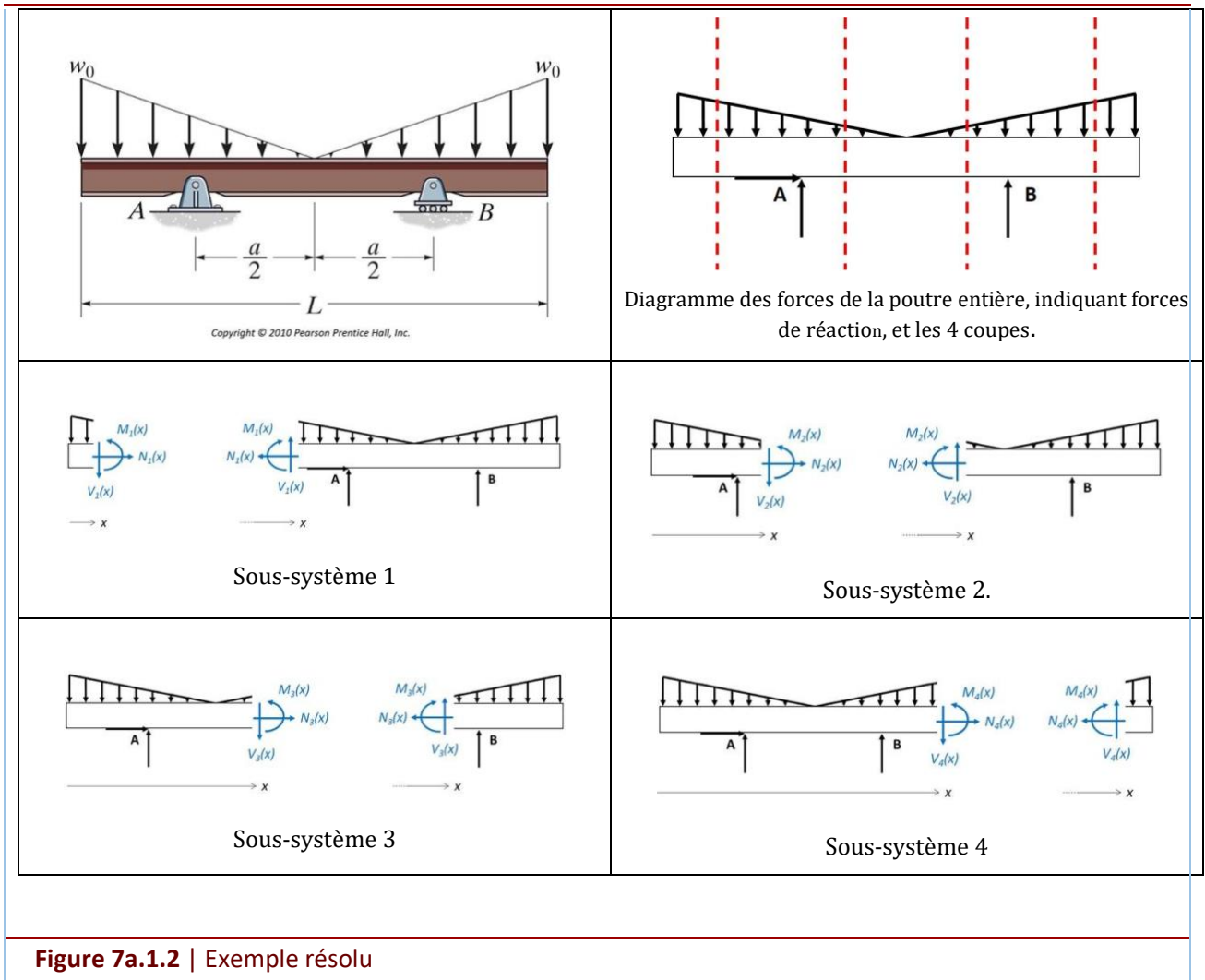
(c) Poutre C.



Copyright © 2013 Pearson Education, Inc.

(d) Poutre D.

Figure 6a.1.1 | Poutres A, B, C et D.



Solution - 6a1

Commentaires généraux sur la résolution de ce problème :

1. La convention choisie pour les forces de cisaillement et les moments de flexion est la même que vous avez vu au cours. De manière générale, vous pouvez cependant choisir le sens dans lequel vous dessinez vos forces ou vos moments. La seule contrainte physique étant que les efforts de liaison entre deux sous-systèmes doivent être de sens opposés.
2. Pour des dessins de poutres, comme les efforts internes sont décrits par une seule fonction le long de toute la poutre, on les posera toujours dans le même sens pour les parties de gauche de la poutre et dans le sens opposé pour les parties de droite. Un signe négatif dans la réponse indique que la direction réelle de l'effort est dans le sens opposé à celui dans lequel vous l'avez dessiné.
3. Lorsque vous coupez des poutres pour calculer les efforts internes, définissez toujours une coordonnée unique liant tous les sous-systèmes (nous avons défini la coordonnée x dans les solutions suivantes).

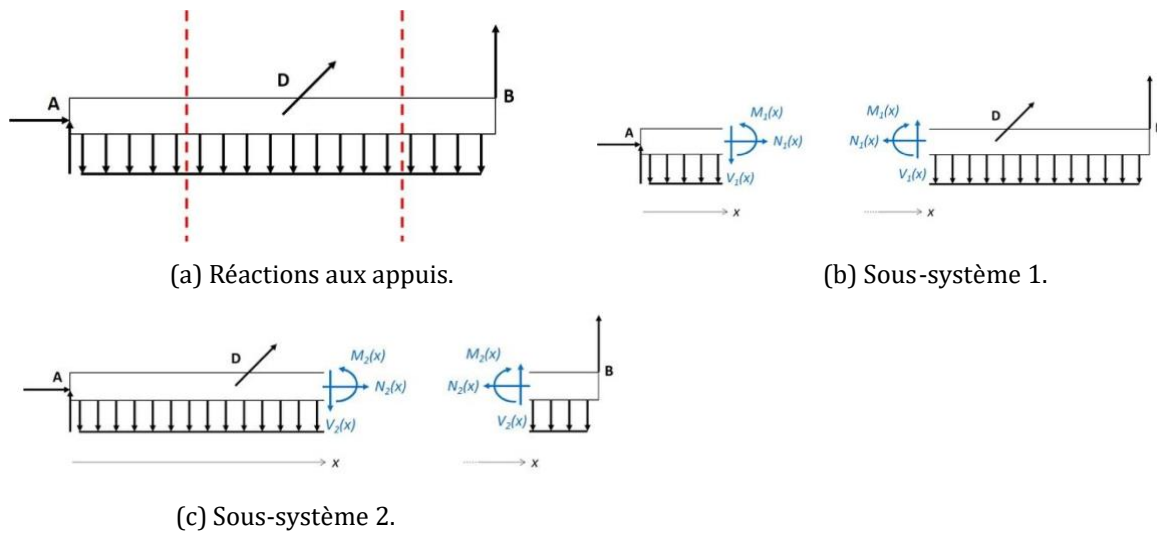


Figure 6a.1.3 | Poutre A.

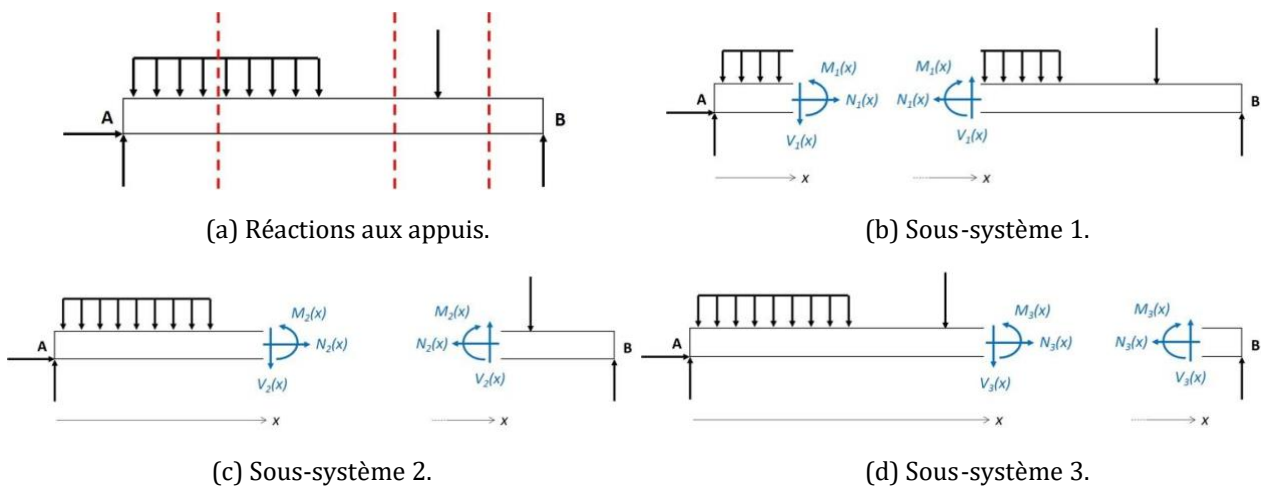


Figure 6a.1.4 | Poutre B.

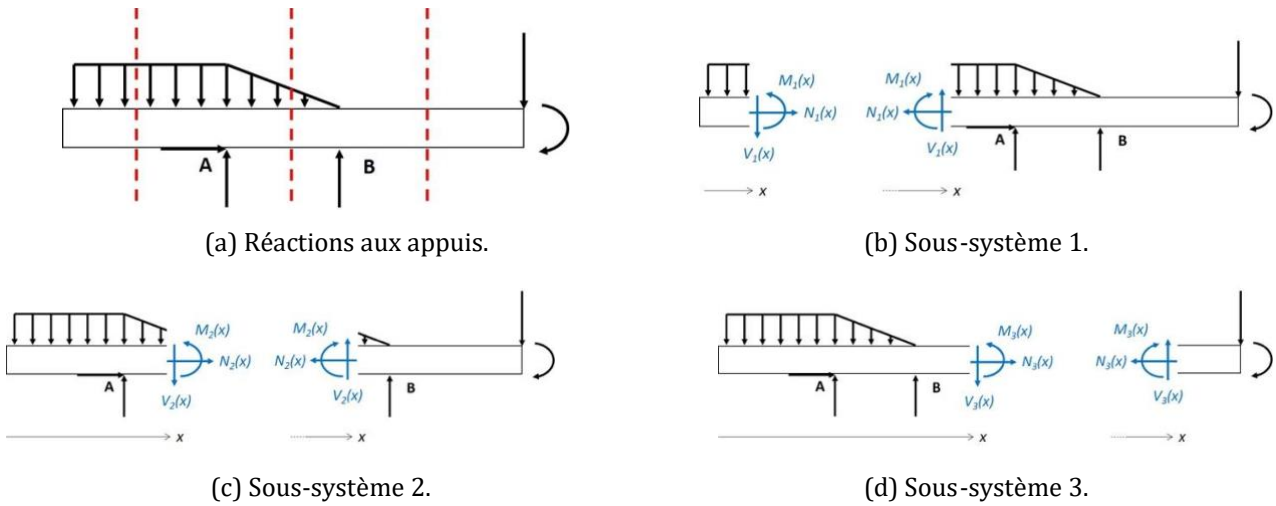


Figure 7a.1.5 | Poutre C.

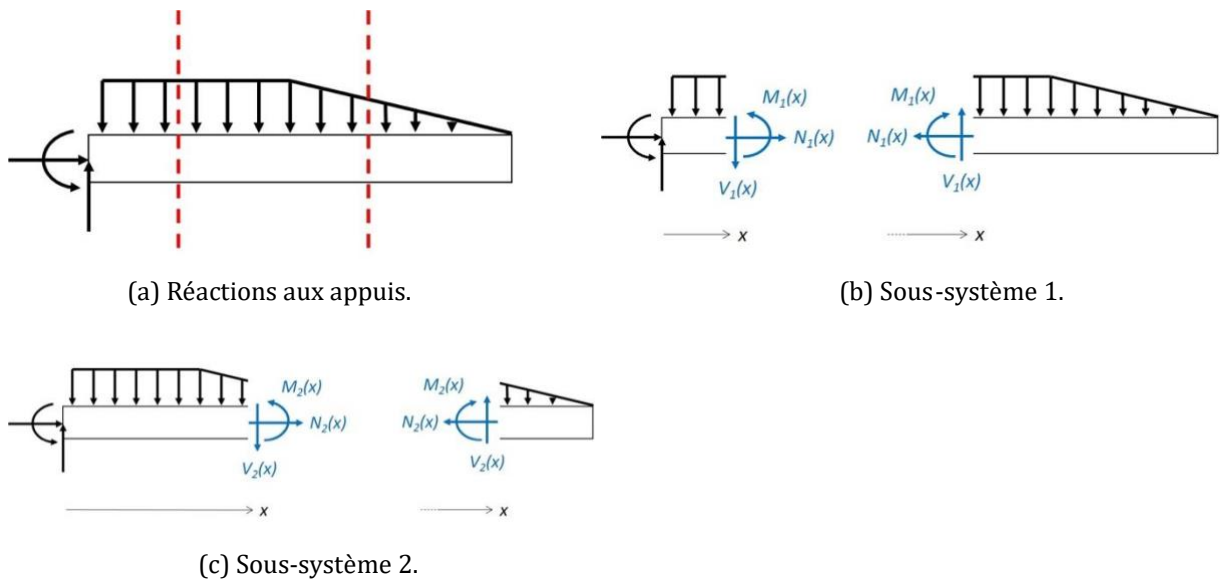


Figure 6a.1.6 | Poutre D.

Problème 6a.2 – Charge distribuée

Une charge ponctuelle $P = 2 \text{ kN}$ et une charge distribuée $w(x) = 100 \text{ N/m}$ agissent sur la poutre, de masse négligeable, de la figure 7a.2.1.

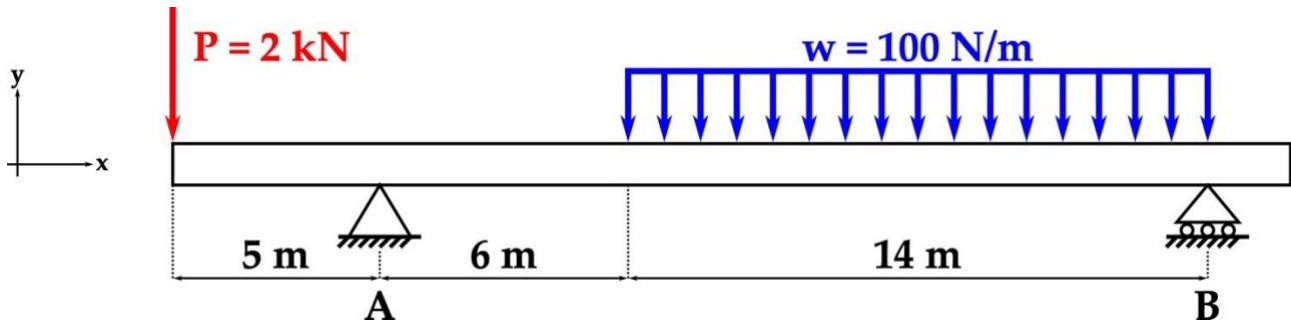


Figure 6a.2.1 | Schéma de la poutre.

- (a) Calculez les forces de réaction des appuis A et B.
 (b) Par la méthode des sections, calculez le moment fléchissant $M(x)$ le long de la poutre.

Solution – 6a2

Les forces de réaction sont dessinées à la figure 7a.2.2.

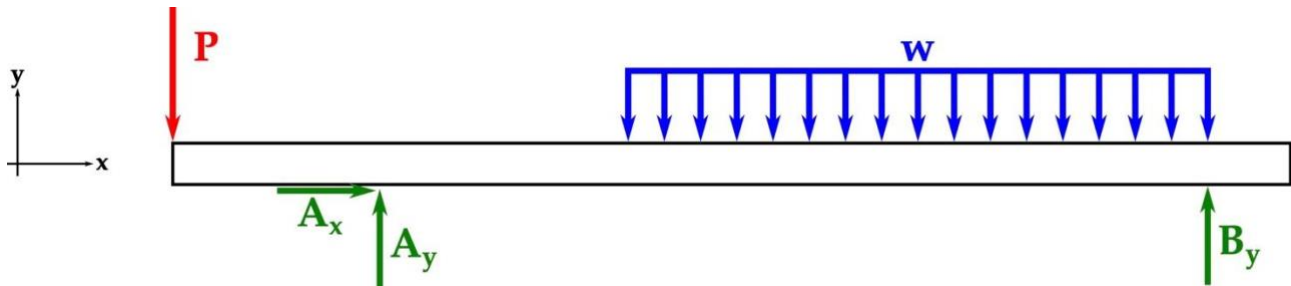


Figure 7a.2.2 | Diagramme des forces de la poutre.

Vu qu'il n'y a pas de force selon x , on remarque tout de suite que :

$$A_x = 0 \quad (1)$$

Pour calculer les réactions des appuis selon y , on fait la somme des moments au point A :

$$\Sigma M_A = 5 \cdot P - 14 \cdot w + 20 \cdot B_y = 0 \quad (2)$$

$$B_y = 410 \text{ N} \quad (3)$$

Somme des forces en y

$$\Sigma F_y = 0 = -P - 14 \cdot w + A_y + B_y = 0 \quad (4)$$

$$A_y = 2990 \text{ N} \quad (5)$$

Pour calculer $M(x)$, deux méthodes peuvent être utilisées :

1. Méthode des sections (ce qui est demandé dans l'énoncé):

On sépare trois fois en sous-systèmes, puis on trouve les $M_i(x)$. Vu qu'il n'y a pas de forces selon x , on a dessiné ni les efforts normaux, ni reporté A_x .

- Premier sous-système ($0 < x < 5$, figure 7a.2.3) :

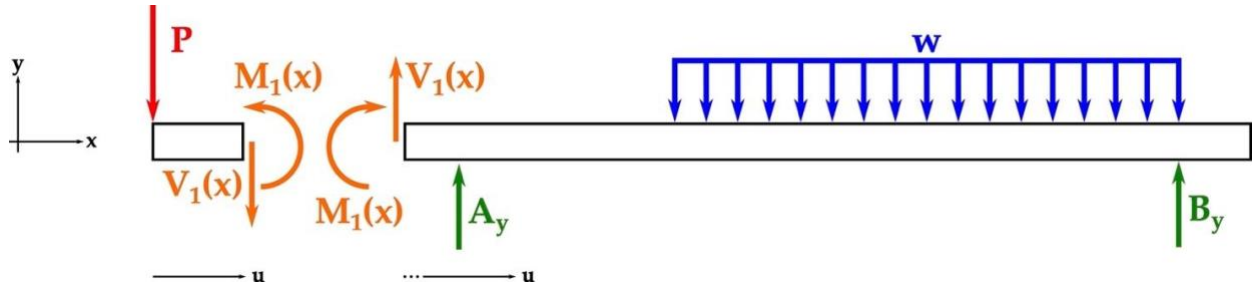


Figure 6a.2.3 | Diagramme des forces pour le premier sous-système.

Pour la partie de gauche :

$$\sum M_{Z_1}(x) = M_1(x) + Px = 0 \quad (6)$$

$$M_1(x) = -Px = -2000x \text{ N m} \quad (7)$$

- Deuxième sous-système ($5 < x < 11$, figure 7a.2.4) :

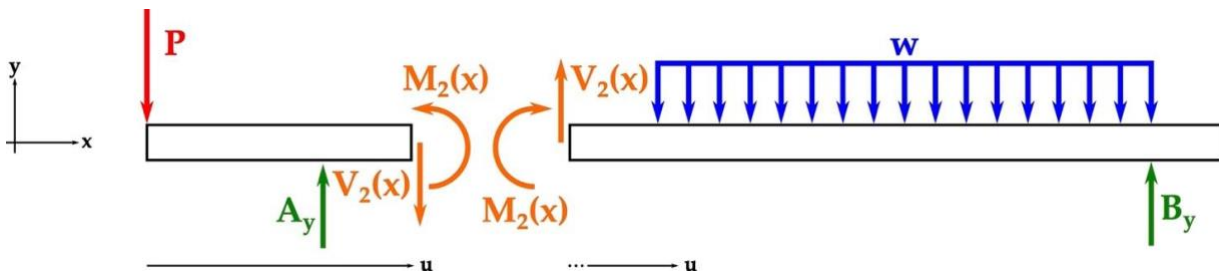


Figure 6a.2.4 | Diagramme des forces pour le deuxième sous-système.

Encore une fois, pour la partie de gauche :

$$\sum M_{Z_2}(x) = M_2(x) - (x - 5)A_y + Px = 0 \quad (8)$$

$$M_2(x) = (x - 5)A_y - Px = -14950 + 990x \text{ N m} \quad (9)$$

- Troisième sous-système ($11 < x < 25$, figure 7a.2.5) :

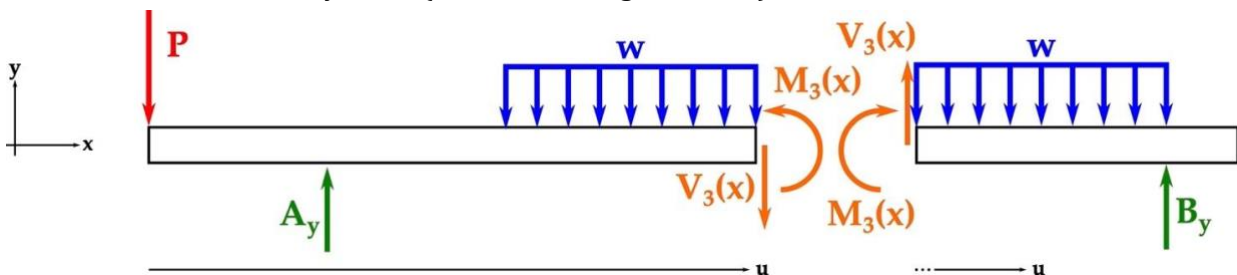


Figure 6a.2.5 | Diagramme des forces pour le troisième sous-système.

Le plus simple, ici, est d'utiliser la partie de droite (attention à l'intégrale utilisant la variable muette u qui varie de x (coordonnée de la coupe) à 25):

$$\sum M_{Z_3}(x) = -M_3(x) + (25 - x)B_y - \int_x^{25} 100(u - x) du = 0 \quad (10)$$

$$M_3(x) = -21000 + 2090x - 50x^2 \text{ N m} \quad (11)$$

- Quatrième sous-système ($25 < x < \dots$)

Les forces et moments internes entre B et l'extrémité de la poutre sont tous nuls, car il n'y a aucune contrainte externe sur cette partie de la poutre.

Pour trouver l'effort tranchant $V(x)$, on dérive simplement le moment de flexion calculé précédemment ($V(x) = \frac{dM(x)}{dx}$). On dessine ensuite l'effort tranchant et le moment fléchissant par rapport à la distance x , en tenant compte des valeurs calculées (voir figure 7a.2.6) :

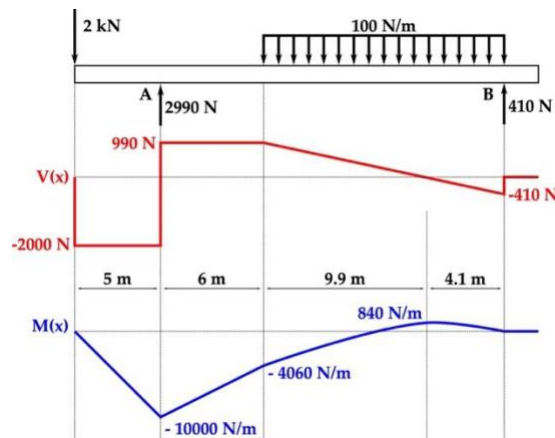


Figure 6a.2.6 | Diagramme des forces et moments internes.

2. Méthode différentielle (pas ce qui est demandé, mais pour montrer que toutes les méthodes mènent à la même réponse)

Charge :

$$q_1(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq 5 \quad (12)$$

$$q_2(x) = 0 \quad 5 \leq x \leq 11$$

$$q_3(x) = 100 \quad 11 \leq x \leq 25$$

On sait que $V(x) = \int -q(x') dx'$:

$$V_1(x) = C_1 \quad 0 \leq x \leq 5 \quad (13)$$

$$V_2(x) = C_2 \quad 5 \leq x \leq 11$$

$$V_3(x) = -100x + C_3 \quad 11 \leq x \leq 25$$

Avec les conditions aux bords :

$$V_1(0) = -2000 \text{ N} \Leftrightarrow C_1 = -2000 \quad (14)$$

$$V_3(25) = -410N \Leftrightarrow -100 * 25 + C_3 = -410$$

$$V_2(11) = V_3(11) \Leftrightarrow C_2 = -100 * 11 + C_3$$

La continuité peut être utilisée car aucune force ponctuelle n'est appliquée en ce point de $x=11$

Après substitution :

$$V_1(x) = -2000 \quad 0 \leq x \leq 5 \quad (15)$$

$$V_2(x) = 990 \quad 5 \leq x \leq 11$$

$$V_3(x) = -100x + 2090 \quad 11 \leq x \leq 25$$

On sait ensuite que $M(x) = \int V(x') dx'$:

$$M_1(x) = -2000x + C_4 \quad 0 \leq x \leq 5 \quad (16)$$

$$M_2(x) = 990x + C_5 \quad 5 \leq x \leq 11$$

$$M_3(x) = -100 \frac{x^2}{2} + 2090x + C_6 \quad 11 \leq x \leq 25$$

Avec les conditions aux bords :

$$M_1(0) = 0 \Leftrightarrow C_4 = 0 \quad (17)$$

$$M_3(25) = 0 \Leftrightarrow -100 \frac{25^2}{2} + 2090 * 25 + C_6 = 0$$

$$M_1(5) = M_2(5) \Leftrightarrow -2000 * 5 = 990 * 5 + C_5$$

La continuité peut être utilisée car aucun moment n'est appliqué en $x=5$.

Après substitution :

$$M_1(x) = -2000x \quad 0 \leq x \leq 5 \quad (18)$$

$$M_2(x) = 990x - 14950 \quad 5 \leq x \leq 11$$

$$M_3(x) = -50x^2 + 2090x - 21000 \quad 11 \leq x \leq 25$$

Comme prévu, on retrouve le même résultat en utilisant les deux méthodes.

- Problème 6a.3 – Charge distribuée et moment pur (couple) en D

- On considère le système présenté à la figure 4 où une poutre de masse négligeable et de longueur $4L$ est supportée par un pivot en A et par un pivot glissant en B.
- Une force ponctuelle de valeur $2P$ est appliquée en C,
- Un moment de valeur $4PL$ est appliqué en D
- Une force distribuée de valeur P/L est appliquée entre D et B.

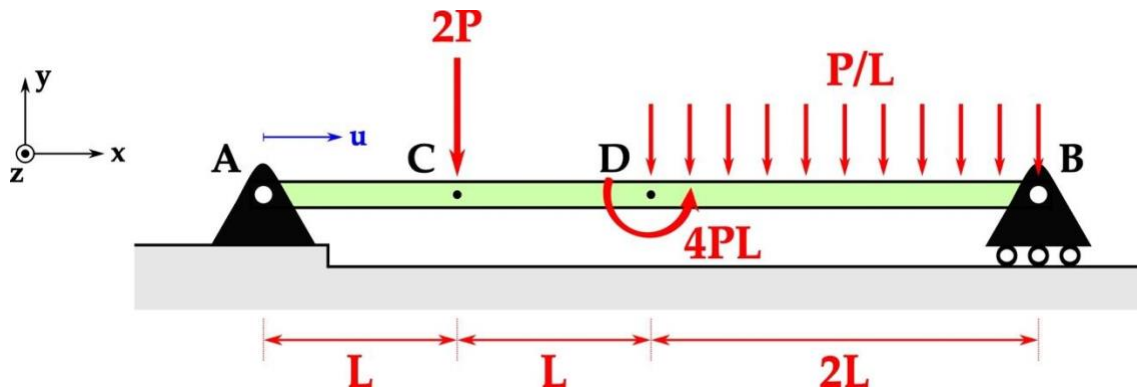


Figure 7a.3.1 | Schéma d'une poutre sous contrainte.

- (a) Dessinez le diagramme des forces agissant sur la poutre (entière) et déterminez leurs valeurs.
- (b) Dessinez le graphe du moment de flexion interne $M(u)$ le long de la poutre.

Solution 6a.3

(a) The free body diagram of the beam is shown in Figure 7a.3.2:

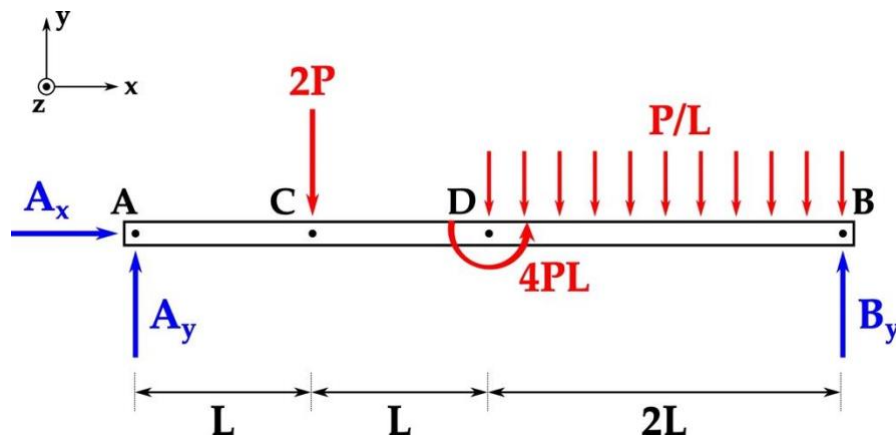


Figure 6a.3.2 | The FBD of the beam.

To find A_x , we use the force balance in the x direction:

$$\Sigma F_x = A_x = 0 \quad (19)$$

To find B_y , we take the sum of moments with respect to point A:

$$\Sigma M_A = -(2P)(L) + 4PL - \int_{2L}^{4L} q(u) u du + B_y(4L) = 0 \quad (20)$$

$$\Sigma M_A = -(2P)(L) + 4PL - \int_{2L}^{4L} \frac{P}{L} u \, du + B_y(4L) = 0 \quad (21)$$

$$B_y = P \quad (22)$$

As we now know B_y , we can use the force balance equation in the y direction to find A_y :

$$\Sigma F_y = A_y - 2P - \int_{2L}^{4L} q(u) \, du + B_y = 0 \quad (23)$$

$$\Sigma F_y = A_y - 2P - \int_{2L}^{4L} \frac{P}{L} \, du + B_y = 0 \quad (24)$$

$$A_y = 3P \quad (25)$$

(b) Encore une fois, il est possible d'utiliser la méthode des sections ou la méthode différentielle. Nous vous montrons les deux afin de vous aider à voir les avantages /désavantages

Méthode différentielle :

Charge :

$$q_1(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad (26)$$

$$q_2(x) = 0 \quad L \leq x \leq 2L$$

$$q_3(x) = \frac{P}{L} \quad 2L \leq x \leq 4L$$

On sait que $V(x) = \int -q(x') \, dx'$:

$$V_1(x) = C_1 \quad 0 \leq x \leq L \quad (27)$$

$$V_2(x) = C_2 \quad L \leq x \leq 2L$$

$$V_3(x) = -\frac{P}{L}x + C_3 \quad 2L \leq x \leq 4L$$

Avec les conditions aux bords :

$$V_1(0) = 3P \Leftrightarrow C_1 = 3P \quad (28)$$

$$V_3(4L) = -P \Leftrightarrow -\frac{P}{L}4L + C_3 = -P$$

$$V_2(2L) = V_3(2L) \Leftrightarrow C_2 = -\frac{P}{L} * 2L + C_3$$

La continuité en $V(x)$ peut être utilisée en $x = 2L$ car aucune force ponctuelle n'est appliquée en ce point.

Après substitution :

$$V_1(x) = 3P \quad 0 \leq x \leq L \quad (29)$$

$$V_2(x) = P \quad L \leq x \leq 2L$$

$$V_3(x) = -\frac{P}{L}x + 3P \quad 2L \leq x \leq 4L$$

On sait ensuite que $M(x) = \int V(x') \, dx'$:

$$M_1(x) = 3Px + C_4 \quad 0 \leq x \leq L \quad (30)$$

$$M_2(x) = Px + C_5 \quad L \leq x \leq 2L$$

$$M_3(x) = -\frac{P}{L} \frac{x^2}{2} + 3Px + C_6 \quad 2L \leq x \leq 4L$$

Avec les conditions aux bords :

$$M_1(0) = 0 \Leftrightarrow C_4 = 0 \tag{31}$$

$$M_3(4L) = 0 \Leftrightarrow -\frac{P}{L} \frac{(4L)^2}{2} + 3P * (4L) + C_6 = 0$$

$$M_1(L) = M_2(L) \Leftrightarrow 3P * L = P * L + C_5$$

La continuité en $M(x)$ peut être utilisée en $x = L$ car aucun moment ponctuel n'est appliqué en ce point (mais un moment est appliqué en $x = 2L$)

Après substitution :

$$M_1(x) = 3Px \quad 0 \leq x \leq L \tag{32}$$

$$M_2(x) = Px + 2PL \quad L \leq x \leq 2L$$

$$M_3(x) = -\frac{P}{L} \frac{x^2}{2} + 3Px - 4PL \quad 2L \leq x \leq 4L$$

Méthode des sections :

On sépare trois fois en sous-systèmes, puis on trouve les $M_i(x)$.

- Premier sous-système ($0 < x < L$, figure 7a.3.3) :

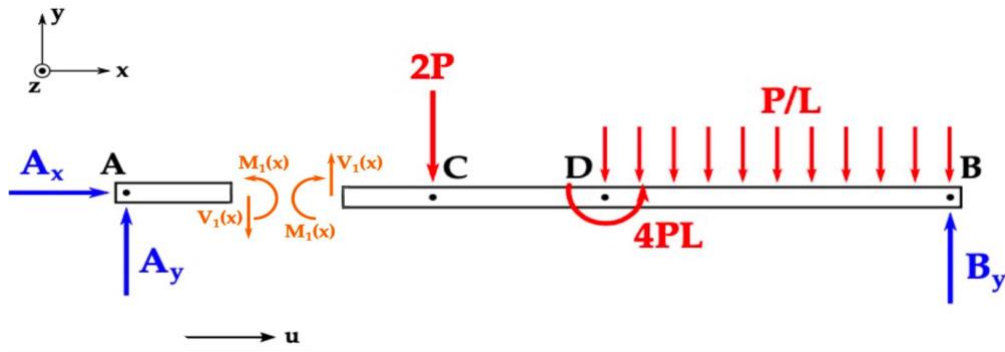


Figure 6a.3.3 | Diagramme des forces pour le premier sous-système.

Pour la partie de gauche :

$$\sum M(x) = M_1(x) - A_y x = 0 \tag{33}$$

$$M_1(x) = A_y x = 3Px \tag{34}$$

- Deuxième sous-système ($L < x < 2L$, figure 7a.3.4) :

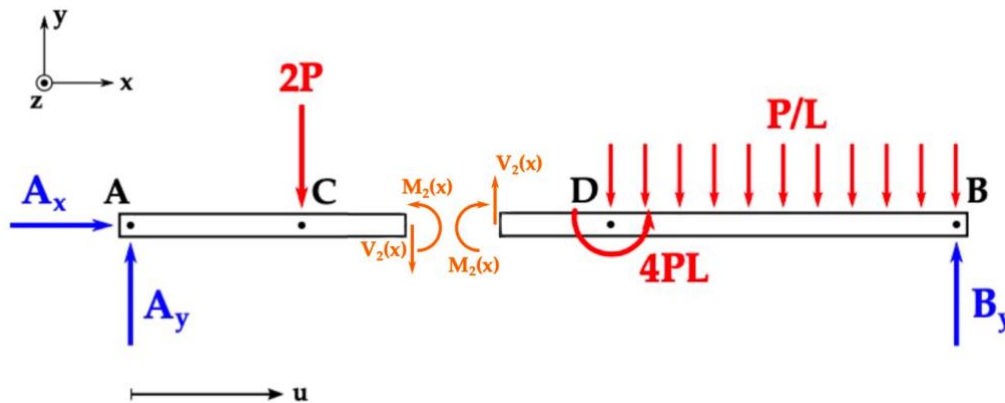


Figure 6a.3.4 | Diagramme des forces pour le deuxième sous-système.

pour la partie de gauche :

$$\sum M(x) = M_2(x) - A_y x + 2P(x - L) = 0 \quad (35)$$

$$M_2(x) = Px + 2PL \quad (36)$$

- Troisième sous-système ($11 < x < 25$, figure 7a.3.5) :

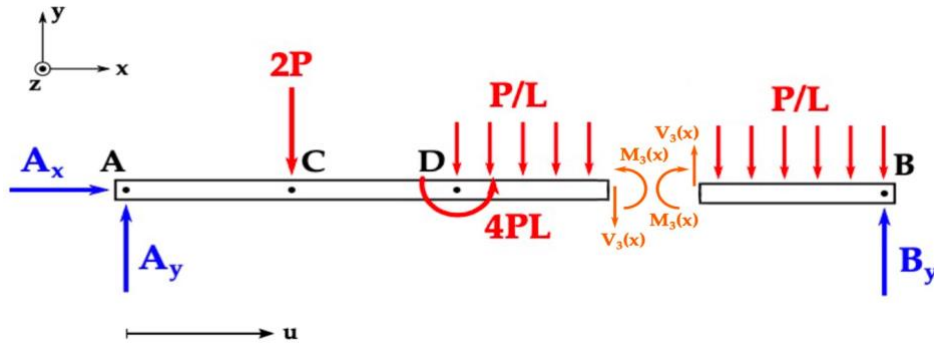


Figure 6a.3.5 | Diagramme des forces pour le troisième sous-système.

C'est plus simple, dans ce cas, d'utiliser la partie de droite (attention à l'intégrale utilisant la variable muette u):

$$\sum M(x) = M_3(x) - (4L - x)B_y + \int_x^{4L} \frac{P}{L}(u - x)du = 0 \quad (37)$$

$$M_3(x) = -\frac{Px^2}{2L} + 3Px - 4PL \quad (38)$$

On retrouve, bien entendu, les mêmes moments qu'avec la méthode différentielle.

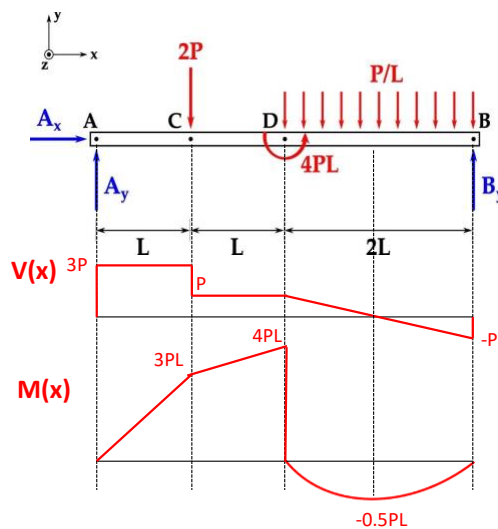


Figure 6a.3.6 | Diagramme des forces et moments internes.

Problème 6a.4 – Charge distribuée non linéaire

On considère la poutre présentée à la figure 6a.4.1, pour deux cas de charge distribuée.

- (a) **OPTIONNEL** : Dessinez le graphe du moment de flexion interne $M(x)$ de la poutre et effort tranchant $V(x)$ pour le cas a
- (b) **PRINCIPAL** : Dessinez le graphe du moment de flexion interne $M(x)$ de la poutre et effort tranchant $V(x)$ pour le cas b

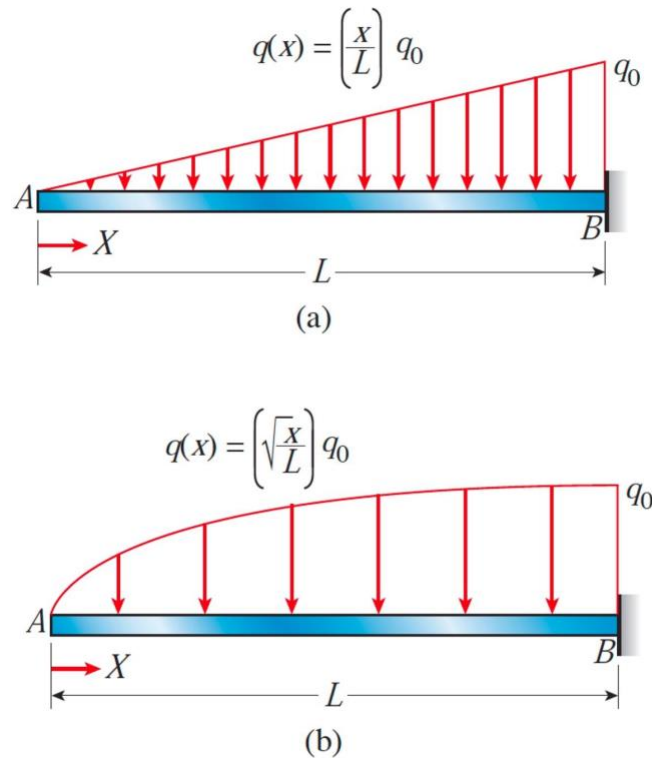


Figure 6a.4.1 | Schéma d'une poutre avec 2 cas de charges.

Solution

(a) Le diagramme des forces est présenté en figure 7a.4.2.

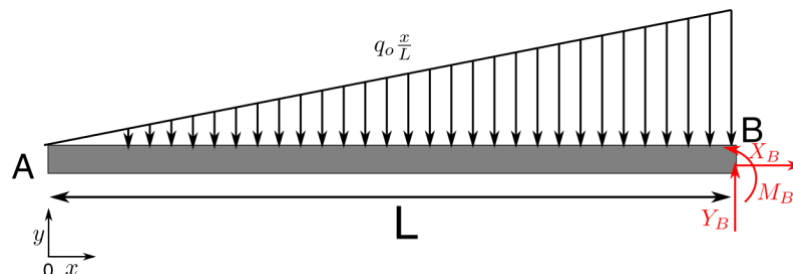


Figure 6a.4.2 | Question 4a : Diagramme des forces.

On peut calculer les réactions en calculant le bilan des forces du système, cette étape n'est pas obligatoire pour répondre à la question mais elle permet de vérifier facilement les résultats obtenus pour les calculs de moment de flexion et d'effort tranchant :

$$\Sigma F_x = X_B = 0 \quad (39)$$

$$\Sigma F_y = Y_B - \int_0^L q(x) dx = 0 \quad (40)$$

$$\Sigma M_z \text{ en } B = M_B - \int_0^L q(x)(x-L)dx = 0 \quad (41)$$

On trouve :

$$Y_B = \int_0^L q_0 \frac{x}{L} dx = \frac{q_0 L}{2} \quad (42)$$

$$M_B = \int_0^L q_0 \frac{x}{L} (x-L) dx = -\frac{q_0 L^2}{6} \quad (43)$$

On intègre la distribution de charge $q(x)$ pour trouver l'effort tranchant : $V(x) = \int -q(x)dx$

$$V(x) = \int -q_0 \frac{x}{L} dx \quad (44)$$

$$V(x) = -\frac{q_0 x^2}{2L} + C_1 \quad (45)$$

Comme il n'y a pas d'effort ponctuel en $x = 0$, on calcule facilement C_1 :

$$V(x = 0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (46)$$

De même pour le moment de flexion, on intègre l'effort tranchant : $M(x) = \int V(x)dx$

$$M(x) = -\frac{q_0 x^3}{6L} + C_2 \quad (47)$$

Comme il n'y a pas de moment ponctuel en en $x = 0$, on calcule C_2 :

$$M(x = 0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad (48)$$

On obtient les graphes en figure 7a.4.3. On remarque que les efforts internes au point B correspondent aux efforts de réaction Y_B et M_B .

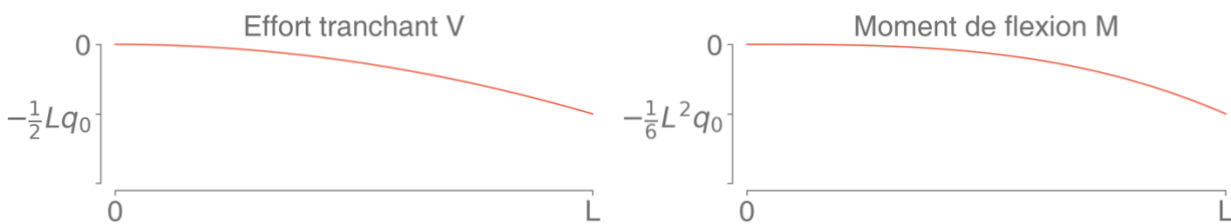


Figure 6a.4.3 | Question 4a : Graphes d'effort tranchant et moment de flexion

(b) Le diagramme des forces est présenté en figure 7a.4.4.

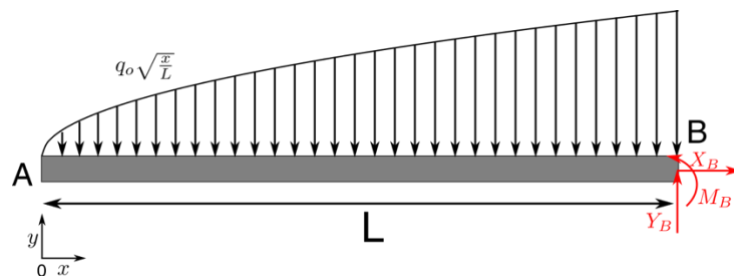


Figure 6a.4.4 | Question 4b : Diagramme des forces.

On peut calculer les réactions en calculant le bilan des forces du système, cette étape n'est pas obligatoire pour répondre à la question mais elle permet de vérifier facilement les résultats obtenus pour les calculs de moment de flexion et d'effort tranchant :

$$\Sigma F_x = X_B = 0 \quad (49)$$

$$\Sigma F_y = Y_B - \int_0^L q(x) dx = 0 \quad (50)$$

$$\Sigma M_z \text{ en } B = M_B - \int_0^L q(x)(x-L) dx = 0 \quad (51)$$

On trouve :

$$Y_B = \int_0^L q_0 \sqrt{\frac{x}{L}} dx = \frac{2}{3} q_0 L \quad (52)$$

$$M_B = \int_0^L q_0 \sqrt{\frac{x}{L}} (x-L) dx = -\frac{4}{15} q_0 L^2 \quad (53)$$

On intègre la distribution de charge $q(x)$ pour trouver l'effort tranchant : $V(x) = \int -q(x) dx$

$$V(x) = \int -q_0 \sqrt{\frac{x}{L}} dx \quad (54)$$

$$V(x) = -\frac{2}{3} x \sqrt{\frac{x}{L}} q_0 + C_1 \quad (55)$$

Comme il n'y a pas d'effort ponctuel en $x = 0$, on calcule C_1 :

$$V(x=0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (56)$$

De même pour le moment de flexion, on intègre l'effort tranchant : $M(x) = \int V(x) dx$

$$M(x) = -\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} x^2 \sqrt{\frac{x}{L}} q_0 + C_2 \quad (57)$$

$$M(x) = -\frac{4}{15} x^2 \sqrt{\frac{x}{L}} q_0 + C_2 \quad (58)$$

Comme il n'y a pas de moment ponctuel en $x = 0$, on calcule C_2 :

$$M(x=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad (59)$$

On obtient les graphes en figure 7a.4.5. On remarque que les efforts internes au point B correspondent aux efforts de réaction Y_B et M_B .

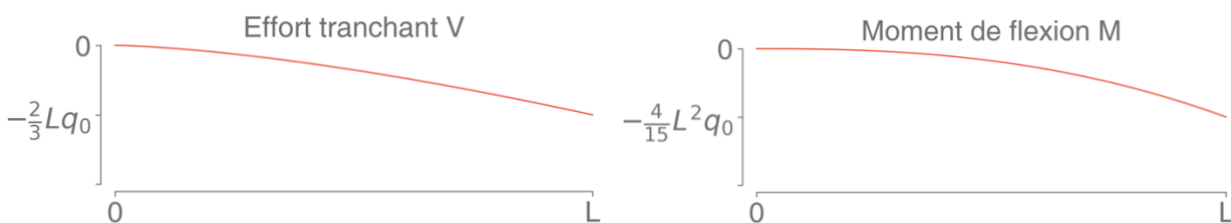


Figure 6a.4.5 | Question 4b : Graphes d'effort tranchant et moment de flexion

Problème 6a.5 – de $V(x)$ à la charge

On nous donne l'effort tranchant $V(x)$ en fonction de la position le long d'une poutre, voir figure 6a.5.1.

- Trouvez la charge $q(x)$ le long de la poutre.
- Calculez par intégration le moment fléchissant $M(x)$, en prenant pour hypothèse supplémentaire qu'il n'y a pas de moments externes sur la poutre.

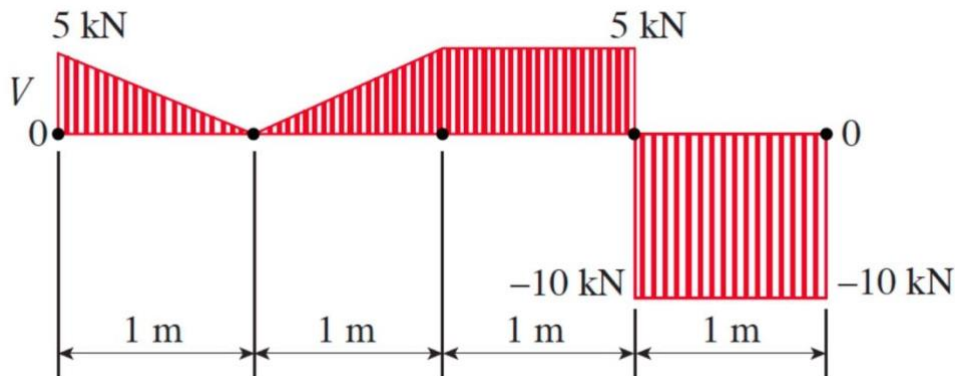


Figure 6a.5.1 | Poutre sous contrainte.

Solution

(a) From the provided shear force diagram, we can write the shear force as:

$$\begin{aligned}
 V_1(x) &= 5 - 5x & 0 \leq x \leq 1 & \quad (60) \\
 V_2(x) &= -5 + 5x & 1 \leq x \leq 2 \\
 V_3(x) &= 5 & 2 \leq x \leq 3 \\
 V_4(x) &= -10 & 3 \leq x \leq 4
 \end{aligned}$$

The derivative of the shear force gives us the distributed load (which is taken as positive pointing down for these differential relationship): $q(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$

$$\begin{aligned}
 q_1(x) &= +5 & 0 \leq x \leq 1 & \quad (61) \\
 q_2(x) &= -5 & 1 \leq x \leq 2 \\
 q_3(x) &= 0 & 2 \leq x \leq 3 \\
 q_4(x) &= 0 & 3 \leq x \leq 4
 \end{aligned}$$

Note the shear force is discontinuous at $x = 3$. **The point load at this point is +15kN.** (see fig 6a.5.1 and hence 6a.5.2 !)

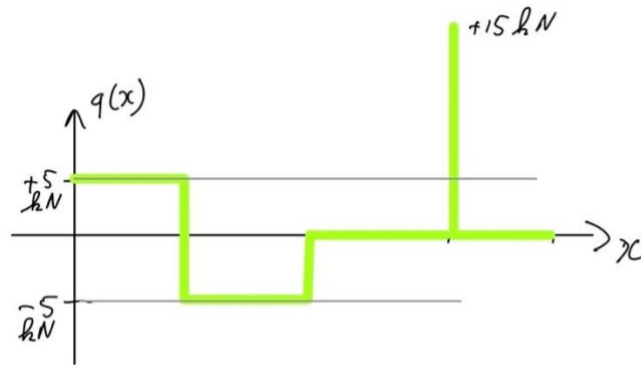


Figure 6a.5.2 | The distributed load diagram.

(b) The integral of the shear force gives us the bending moment: $M(x) = \int V(x) dx$

$$M_1(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 5x + C_1 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (62)$$

$$M_2(x) = \frac{5}{2}x^2 - 5x + C_2 \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$M_3(x) = 5x + C_3 \quad 2 \leq x \leq 3$$

$$M_4(x) = -10x + C_4 \quad 3 \leq x \leq 4$$

There are 2 boundary conditions for the bending moment: $M_1(x=0) = 0$ and $M_4(x=4) = 0$.

Thus $C_1 = 0$ and $C_4 = 40$.

We use 2 continuity equations of the bending moment to find C_2 and C_3 :

$$M_1(x=1) = M_2(x=1) = 2.5 \text{ kNm} \quad \text{and} \quad M_3(x=3) = M_4(x=3) = 10 \text{ kNm}.$$

This gives us $C_2 = 5$ and $C_3 = -5$.

$$M_1(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 5x \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (63)$$

$$M_2(x) = \frac{5}{2}x^2 - 5x + 5 \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$M_3(x) = 5x - 5 \quad 2 \leq x \leq 3$$

$$M_4(x) = -10x + 40 \quad 3 \leq x \leq 4$$

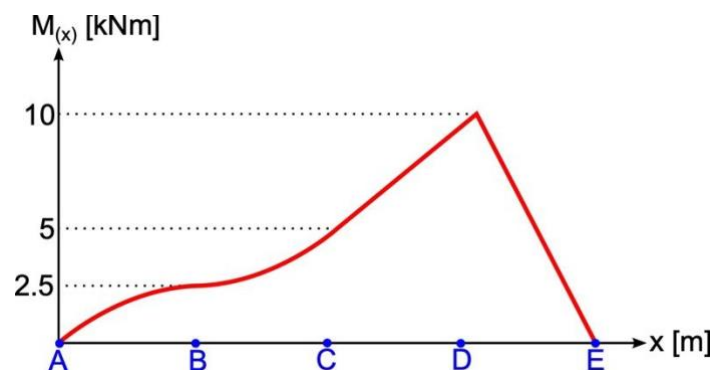


Figure 6a.5.3 | The moment diagram of the beam.

Problème 6a.6 – OPTIONNEL

On considère le système présenté à la figure 7a.6.1 où une poutre de masse négligeable et de longueur L est supportée tel que dessiné. Le support en A n'a aucune force de réaction verticale.

(a) Dessinez le diagramme des forces agissant sur la poutre

(a) En utilisant la méthode intégrale (plutôt que de "couper") Dessinez le graphe du moment de flexion interne $M(u)$ de la poutre et effort tranchant $V(u)$

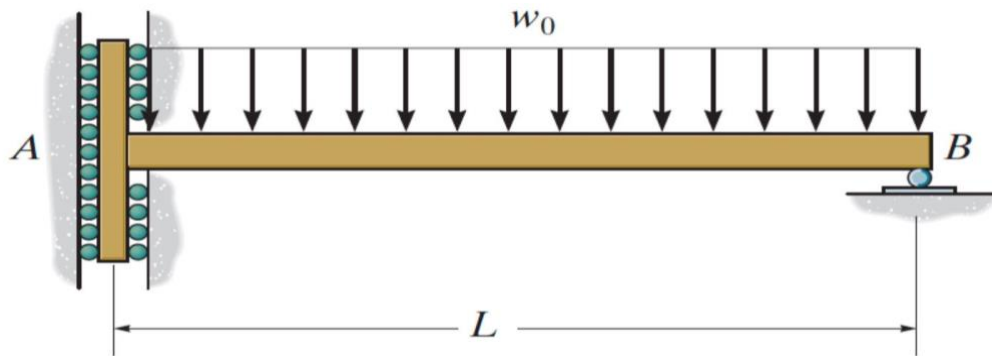


Figure 6a.6.1 | Schéma d'une poutre sous contrainte.

Solution

(a) The free body diagram of the beam is shown Figure 6a.6.2

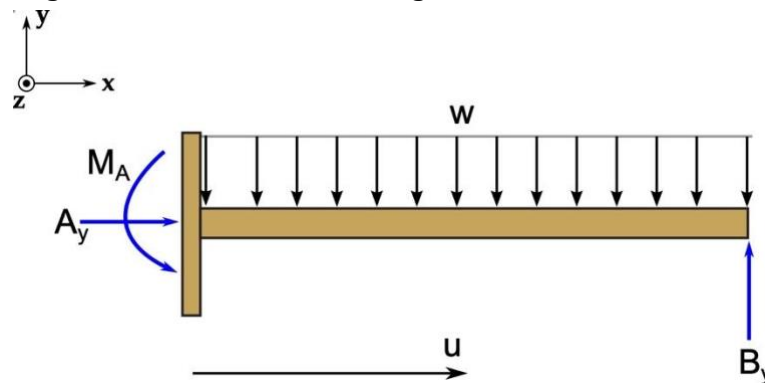


Figure 6a.6.2 | Free body diagram of the beam.

Reaction forces:

$$\Sigma F_y = -\int_0^L w_0 dx + B_y = 0 \quad (64)$$

$$B_y = w_0 L \quad (65)$$

$$\Sigma F_x = A_x = 0 \quad (66)$$

$$\Sigma M_z = M_A - \int_0^L w_0 x dx + B_y L = 0 \quad (67)$$

$$M_A = -\frac{w_0 L^2}{2} \quad (68)$$

(b) $q(x) = w_0$

$$V(x) = \int -q(x) dx = \int -w_0 dx \quad (69)$$

$$V(x) = -w_0 x + C_1 \quad (70)$$

Boundary condition: $V(x) = 0$, thus $C_1 = 0$ and $V(x) = -w_0 x$.

$$M(x) = \int V(x) dx = \int -w_0 x dx \quad (71)$$

$$M(x) = -\frac{w_0 x^2}{2} + C_2 \quad (72)$$

Boundary condition: $M(L) = 0$, thus $C_2 = \frac{w_0 L^2}{2}$ and $M(x) = \frac{w_0}{2} (L^2 - x^2)$.

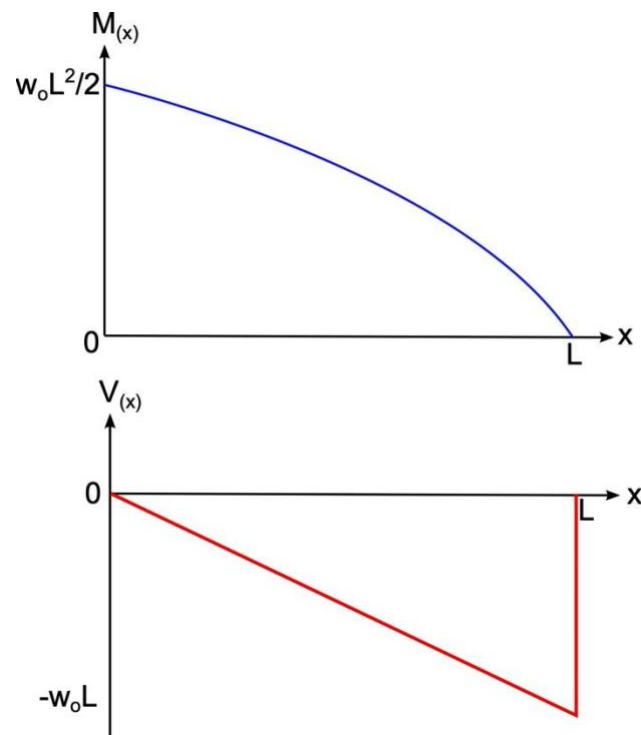


Figure 6a.6.3 | Bending moment and Shear force along the beam.