

## Série 10 – solution

### Problème 10.1 – Question très très courte

Une barre  $AB$  de longueur  $L = 1$  m, de section  $A$ , de moment d'inertie  $I = A \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$  et de module de Young  $E = 200 \text{ GPa}$  est suspendu comme montrée en Figure 0.0.1. Le coefficient d'expansion thermique est  $\alpha = 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

**Pour quelle différence de température  $\Delta T$  est-ce que la barre va flamber?**

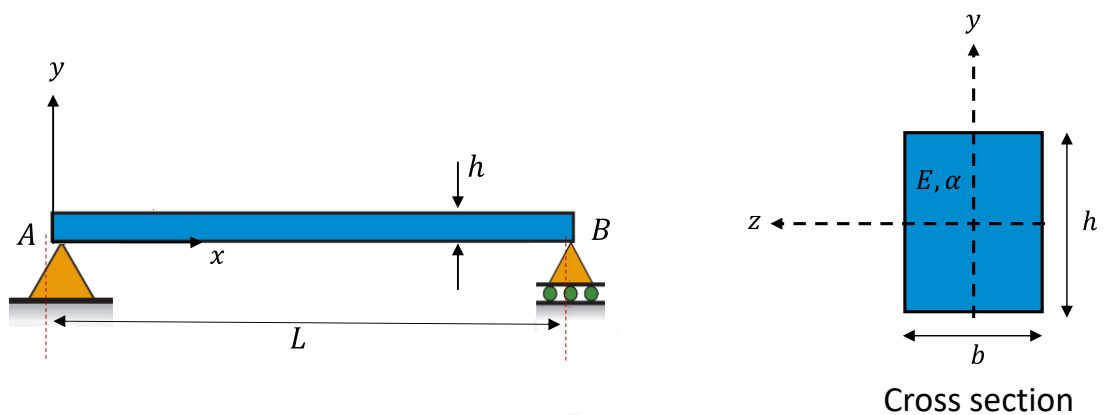


Figure 0.0.1 | Barre  $AB$  sujet à une augmentation de la température.

### 10.1 Solution

Le support droit de la barre n'impose pas de contrainte horizontale : la barre est donc libre de s'allonger sans générer de contrainte.

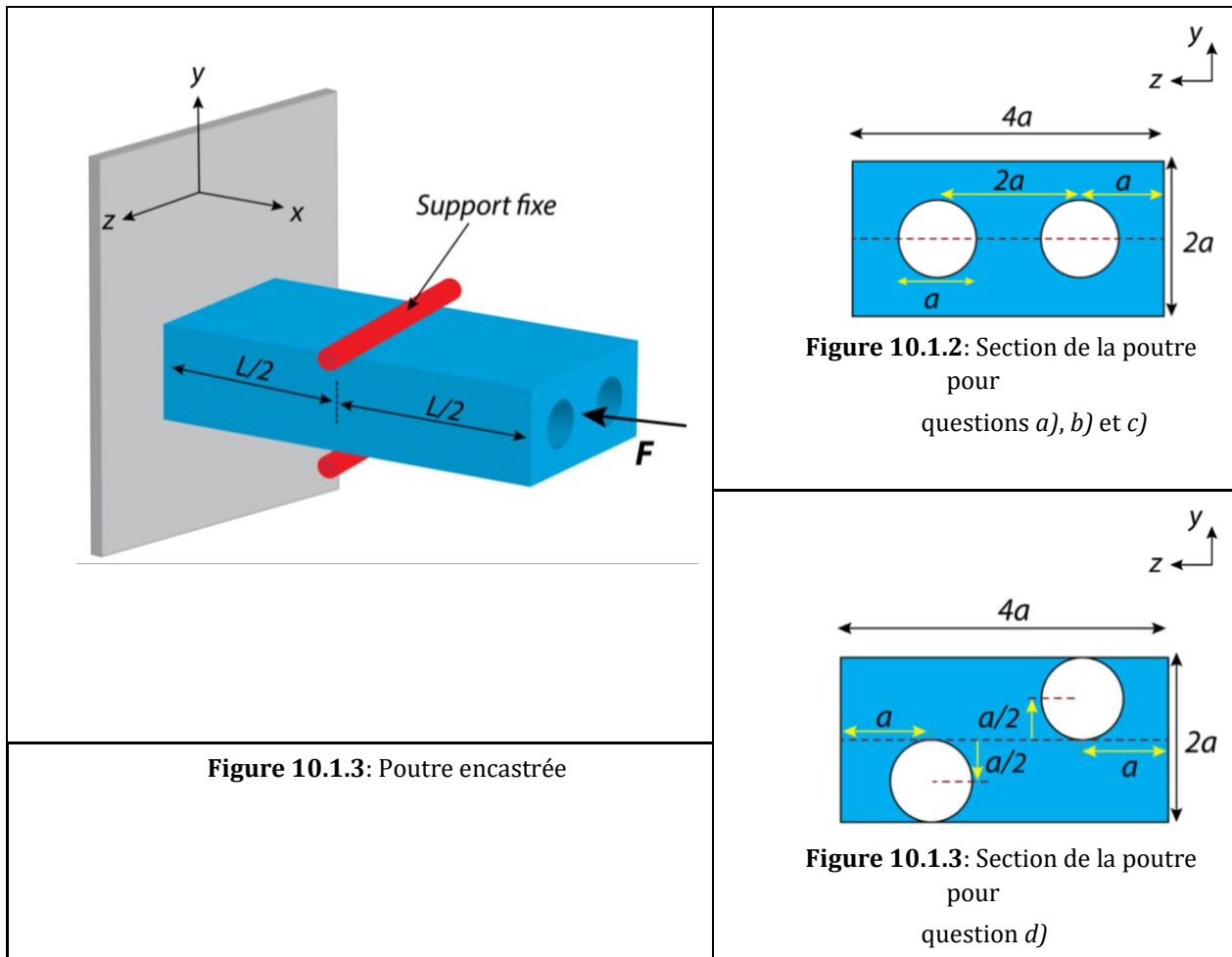
**Par conséquent, la barre ne va jamais flamber quelle que soit la différence de température.**

### Problème 10.2 – Modes de flambage avec $n > 1$ (adapté de l'exa 2021)-

Une poutre de longueur  $L$ , d'épaisseur  $2a$  et de largeur  $4a$  est encadrée, voir la Figure 10.2.1. La section de la poutre pour les questions a), b) et c) est illustrée en figure 10.1.2, et pour la question d) en figure 10.1.3.

Le matériau en bleu a un module de Young  $E$ . Les deux trous en blanc ont un diamètre  $a$ .

Un support fixe (dessiné en rouge) bloque le déplacement du milieu de la poutre dans la direction  $y$ .



- a) Calculez les moments quadratiques  $I_{z,y=y_0}$  et  $I_{y,z=z_0}$  de la poutre pour une flexion autour des axes neutres.
- b) Calculez la force critique pour le flambage  $F_{cr1}$  et Donnez le plan de flambage.
- c) La contrainte pour la rupture du matériau est  $\sigma_{yield} = E/4$ . La longueur est  $L = 4\pi a$ .
- Avec un facteur de sécurité de 2, quelle est la force  $F_{mat}$  pour une rupture du matériau (s'il n'y a pas de flambage)?
  - Avec un facteur de sécurité de 2, quelle est la force critique  $F_{cr2}$  pour le flambage?
- d) Les trous sont maintenant décalés de  $+a/2$  et  $-a/2$  sur l'axe  $y$  (voir la Figure 10.1.3).
- Calculez la force critique de flambage  $F_{cr3}$
  - Donnez le plan de flambage.

## 10.2 Solution

**10.2.a.** Find the moment of inertia using  $I_{Rec} = \frac{1}{12}bh^3$  and  $I_{Cir} = \frac{1}{4}\pi r^4$  and the respective 'offset-correction' (Steiner)  $A_i(y_i - y_0)^2$ .

The object symmetry sets  $y_0, z_0$  to the middle of the rectangle.

$$I_{y,z_0} = I_{rec,y} - 2(I_{cir} + A_{cir}(z_{cir} - z_0)^2) = \frac{128a^4}{12} - 2\left(\frac{\pi a^4}{64} + \pi \frac{a^4}{4}\right) = a^4 \left(\frac{32}{3} - \frac{17\pi}{32}\right)$$

$$I_{z,y_0} = I_{rec,z} - 2I_{cir} = \frac{32a^4}{12} - 2\frac{\pi a^4}{64} = a^4 \left(\frac{8}{3} - \frac{\pi}{32}\right)$$

**10.2.b.** Around the y-axis (ie z motion direction), n=1.

Around the z-axis (ie y motion direction), n=2 due to the red fixed supports.

In general,  $F_{cr} = \left(\frac{\pi n}{L_{eff}}\right)^2 EI$ . Here we have pinned-free, so  $L_{eff} = 2L$ .

$$F_{cr,z-direction} = \frac{n^2\pi^2}{4L^2} EI_y = \frac{\pi^2}{L^2} E a^4 \left(\frac{8}{3} - \frac{17\pi}{128}\right)$$

$$F_{cr,y-direction} = \frac{n^2\pi^2}{4L^2} EI_z = \frac{4\pi^2}{4L^2} E \left(\frac{32a^4}{12} - 2\frac{\pi a^4}{64}\right) = \frac{\pi^2}{L^2} E a^4 \left(\frac{8}{3} - \frac{4\pi}{128}\right)$$

therefore  $F_{cr,z-dir} < F_{cr,y-dir}$

$$\text{so } F_{cr1} = \frac{\pi^2}{L^2} E a^4 \left(\frac{8}{3} - \frac{17\pi}{128}\right)$$

Buckles in z-direction in **z-x** plane (n=1)

**10.2.c.** Maximum force that the material withstands is calculated : for buckling , and for material stress.

$$F_{max,mat} = \sigma_{max} A = \frac{\sigma_{yield}}{SF} A = \frac{1}{2} \sigma_{yield} a^2 \left(8 - \frac{\pi}{2}\right) = E a^2 \left(1 - \frac{\pi}{16}\right)$$

$$F_{cr2} = \frac{F_{cr1}}{SF} = \frac{\pi^2}{2(4\pi a)^2} E a^4 \left(\frac{8}{3} - \frac{17\pi}{128}\right) = E a^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{17\pi}{32 * 128}\right)$$

$$F_{cr2} < F_{max,mat}$$

So beam fails due to buckling ( approx 10x lower force for buckling than for immediate material failure)

**10.2.d.**  $I_y$  and hence  $F_{crit-z-dir}$  do not change.

But for  $I_z$ , the offset has to be taken into account:  $I_z$  becomes smaller. Use Steiner

$$I_z = \frac{32a^4}{12} - 2\left(\frac{\pi a^4}{64} + \frac{\pi a^2 a^2}{4}\right) = a^4 \left(\frac{8}{3} - \frac{5\pi}{32}\right)$$

$$F_{cr,y-dir} = \frac{n^2\pi^2}{L^2} EI_z = \frac{4\pi^2}{4L^2} E a^4 \left(\frac{8}{3} - \frac{5\pi}{32}\right) = \frac{\pi^2}{L^2} E a^4 \left(\frac{8}{3} - \frac{5\pi}{32}\right)$$

$$F_{cr,y-dir} < F_{cr,z-dir} \text{ (from before)}$$

Hence  $F_{cr3} = F_{cr,y-dir}$ . Beam Buckles in y-direction (so buckles in x-y plane) around the z-axis (n=2).

### Problème 10.1 – Défaillance

Considérez la Figure 10.3 où des humains identiques et amateurs de chapeaux se tiennent debout sur une poutre horizontale.  $n$  est le nombre de personnes par mètre (il ne se soucient pas de la distanciation sociale). Chaque humain pèse 80 kg (prenez  $g=10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ).

La poutre AC et la colonne BD ont un module de Young de  $E = 200 \text{ GPa}$  et une limite d'élasticité de  $\sigma_y = 200 \text{ MPa}$  : Ces poutres ont des sections carrées de largeur latérale  $t = 0.1 \text{ m}$ . Leurs longueurs respectives sont:  $L_{AC} = L = 10 \text{ m}$  et  $L_{BD} = \frac{L}{2} = 5 \text{ m}$ .

**Déterminez:**

- Les forces de réactions et les moments de réaction sur la poutre AC
- La densité maximale de personnes ( $n$ ) avant que la poutre BD ou AC se casse ou flambe.
- Est-ce que la défaillance est structurelle ou liée au matériau ?
- Si  $n=2$ , quelle serait la longueur maximale  $L_{BD}$  avant qu'une défaillance structurelle ne se produise dans poutre BD? Le ratio entre les longueurs des barres horizontale et verticale reste constante. Est-ce que la poutre serait en flambage ?
- Quel est l'excentricité de la charge "ressentie" par la colonne BD ?

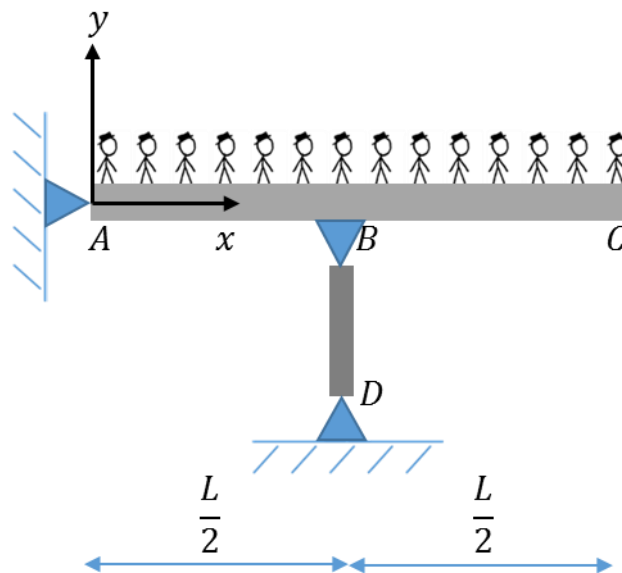


Figure 10.3 | Poutre avec un support élastique (colonne) et une charge distribuée.

### 10.3 Solution

#### Donnée

$$\begin{aligned} L &= 10 \text{ m} \\ L_{BD} &= 5 \text{ m} \\ t &= 0.1 \text{ m} \\ n &= \text{\#personnes/m} \\ E &= 200 \text{ GPa} \\ \sigma_y &= 200 \text{ MPa} \end{aligned}$$

#### Hypothèses

Le matériau est homogène et isotrope.

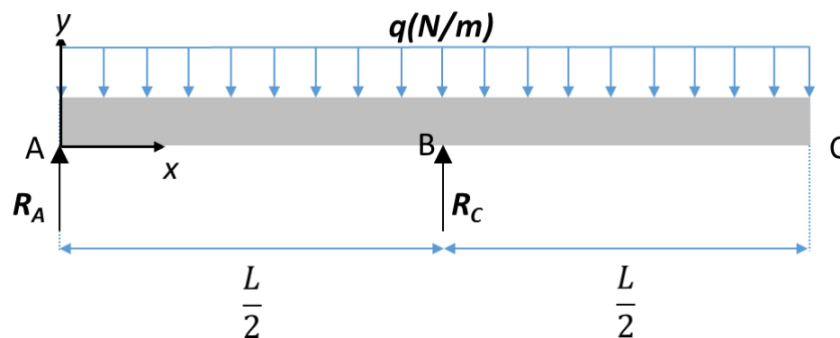
#### Qu'est-ce qui est demandé ?

- Les forces de réaction et moments de réaction sur AC
- La densité maximale de personnes  $n$  avant que la défaillance soit observée.
- Est-ce que la défaillance est structurelle ou due au matériau ?
- Si  $n=2$ , quelle est la longueur maximale avant la défaillance structurelle ?
- De combien est l'excentricité de la charge "ressentie" par la colonne BD?

#### Principes et formules

- Les forces de réaction et moments de réaction

On calcule les forces de réaction depuis le diagramme de forces de la poutre montré dans la Figure 10.3.2.



**Figure 10.3.2** | Poutre avec un support élastique (colonne) et une charge distribuée.

L'équilibre des forces en  $y$  donne:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_C - qL = 0 \quad (10.3.1)$$

$$R_A + R_C = qL \quad (10.3.2)$$

Où  $q = n \cdot 800 \text{ N/m}$ . Avec la somme des moments  $M_z$  au point A, on obtient:

$$\Sigma M_z = 0 \Rightarrow R_C \frac{L}{2} - qL \left( \frac{L}{2} \right) = 0 \quad (10.3.3)$$

$$R_C = qL \quad (10.3.4)$$

$$R_A = 0. \text{ (qu'on aurait pu deviner par symétrie)} \quad (10.3.5)$$

(b) La densité maximale de personnes  $n$  avant qu'une défaillance ne soit observée.

Dans ce problème, on doit considérer trois défaillances possibles :

- i. Défaillance structurelle dans la colonne verticale (flambage)
- ii. Défaillance matérielle dans la colonne verticale.
- iii. Défaillance matérielle dans la colonne horizontale (car elle se plie)

#### i. Flambage

La colonne verticale est « pinned-pinned », donc la longueur effective pour le flambage est la même que la distance totale:  $L_{eff} = L_{BD} = \frac{L}{2}$  (voir la table de constantes de longueur effective). La charge critique pour le flambage est :

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{eff}^2} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (10.3.6)$$

On a trouvé plus haut la force de réaction  $R_c = qL$ , et donc:

$$F_{cr} = qL = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}, \quad q = 800 \cdot n \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right] \quad (10.3.7)$$

Par conséquent, le nombre minimal de personnes par mètre pour induire le flambage est:

$$n_{Buckling} = \frac{4\pi^2 EI}{800 \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right] \cdot L^2} = 82,2 \quad (10.3.8)$$

Ça fait quand même beaucoup de personnes par mètre, avec ou sans masque. Sans doute pas trop à s'inquiéter du la flambage de BD

#### ii Défaillance matérielle de la colonne verticale :

On considère maintenant la charge pour laquelle la colonne verticale va développer une contrainte qui dépasse la limite d'élasticité donnée pour ce problème :

$$\sigma_{colonne} = \frac{R_c}{A} = \frac{qL}{t^2} = 800 n \text{ kPa} \rightarrow n_{yield,vertical} = \frac{\sigma_Y}{800 \text{ kPa}} = 250 \quad (10.3.9)$$

#### iii Défaillance matérielle de la poutre horizontale :

La contrainte normale dans la poutre horizontale AC est calculée avec la formule suivante :

$$\sigma_{normal} = \frac{-M_z}{I_z} (y - y_0)$$

Vu que  $R_A = 0$ , le moment de flexion est :

$$M_z = \begin{cases} -\frac{qx^2}{2} & x \in [0; L/2] \\ -\frac{q(L-x)^2}{2} & x \in [L/2; L] \end{cases} \quad (10.3.10)$$

Le moment de flexion maximal est  $M_z^{max} = \frac{qL^2}{8}$  obtenu en  $x=L/2$ . La contrainte est donc maximale dans la position  $x = \frac{L}{2}$  et  $y - y_0 = c = \frac{t}{2}$ .

$$\sigma_{max} = \frac{|M_z|}{I_z} c = \frac{3qL^2}{4t^3} \rightarrow n_{Horizontal\ Yield} = \sigma_Y \cdot \frac{4t^3}{3 \cdot 800 \left[ \frac{N}{m} \right] \cdot L^2} \approx 3.333 \quad (10.3.11)$$

Le nombre maximal de personnes par mètre qui peut être maintenu sur la poutre sans défailir est de **3.3**, à cause de la défaillance matérielle de la barre horizontale.

(c) Est-ce que la défaillance est structurelle ou due au matériau ?

Défaillance matérielle, de la poutre AC

(d) Si  $n=2$ , quelle est la longueur maximale avant la défaillance structurelle ?

Pas de défaillance par rupture matériau, car  $2 < 250$ , voir eq 21.4.9 ci-dessus

Le ratio entre les longueurs des barres horizontale et verticale est constante. En résolvant l'équation Eq. (10.3.8) pour  $L$ , on trouve (avec  $L_{BD} = \frac{L}{2}$ )

$$L_{BD}^3 = \frac{\pi^2 EI}{1600 \left[ \frac{N}{m} \right] \cdot n} \rightarrow L_{BD} \approx 17.26 \text{ m} \quad (10.3.12)$$

Défaillance par flambage si la colonne BD fait plus de 17m de long.

(e) Quel est l'excentricité de la charge "ressentie" par la colonne BD?

L'excentricité ressentie par la poutre est de zéro car il n'y a pas de force de réaction  $R_A$  et que la charge  $q$  est complètement symétrique par rapport à la colonne BD.

Table de constantes de longueur effective

Limite de la colonne	Constante de longueur effective: $C = L_{eff}/L$
Free - Free	1.0
Fixed - Free	2.0
Fixed - Pinned	0.707
Fixed - Guided	1.0
Fixed - Fixed	0.5
Guided - Free	2.0
Guided - Pinned	2.0
Guided - Guided	1.0
Pinned - Free	1.0
Pinned - Pinned	1.0

### Problème 10.4 – Modes de flambage avec $n > 1$

Une colonne de section rectangulaire  $b \times h$  est attaché par des pivots en A et en C (voir **Error! Reference source not found.**). La colonne est contrainte au point B dans le plan  $x$ - $y$ , mais est libre de se déplacer dans le plan  $x$ - $z$  au point B.

Déterminez:

- La forme de flambage de la colonne dans le plan  $x - y$  et dans le plan  $x - z$ . Ecrivez les formules pour la charge critique dans chacun des deux plans.
- Que devrait-êtr le ratio  $h/b$  pour que les charges critiques dans les deux plans soient égales ?

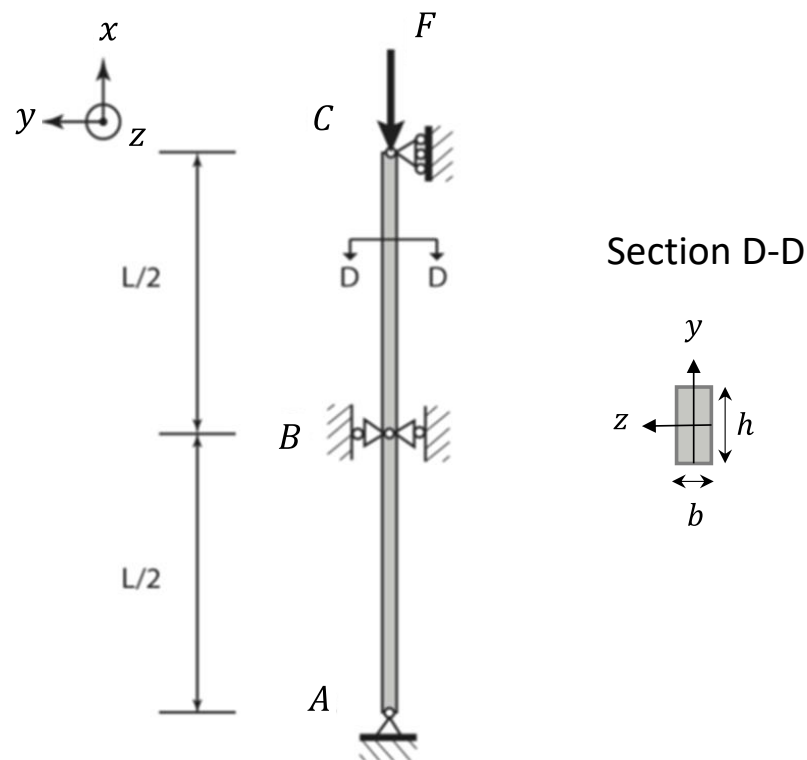


Figure 10.4 | Colonne rectangulaire sous une charge

## 10.4 Solution

### Donnée:

Colonne supportée par deux pivots (un mobile) avec une restriction du mouvement au point B (elle peut bouger dans le plan xz, pas en xy)

Section de la colonne

### Hypothèses:

Le matériau est homogène et isotrope

### Qu'est-ce qui est demandé?

- Forme de flambage et charge critique
- Ratio  $h/b$  pour obtenir des charges critiques égales

### Principes et formules

- Forme de flambage et charge critique

Sur le plan  $x - y$ , puisqu'il existe une contrainte au point B, la forme de flambage va avoir la forme d'un mode  $n = 2$ , comme montré dans la Figure 21.2.2(a). La charge critique est donnée par:

$$F_{cr_{x-y}} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} = \frac{2^2 \pi^2 EI_z}{L^2} = \frac{4 \pi^2 EI_z}{L^2} \quad (10.4.1)$$

$$\text{avec } I_z = \frac{bh^3}{12} \quad (10.4.2)$$

Dans le plan  $x - z$ , puisqu'il n'y a aucune contrainte au point B, la forme de flambage adoptera la forme d'un mode  $n = 1$ , comme montré dans la Figure 10.4.2(b). La charge critique est donnée par:

$$F_{cr_{x-z}} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} = \frac{1^2 \pi^2 EI_y}{L^2} = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \quad (10.4.3)$$

$$\text{avec } I_y = \frac{b^3 h}{12} \quad (10.4.4)$$

Les formes de flambage sont donc données par :

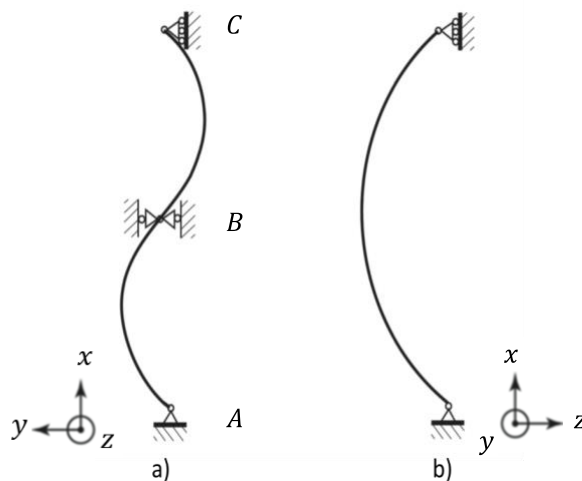


Figure 10.4.2 | Formes de flambage pour a) Plan x-y b) Plan z-y

(f) Ratio  $h/b$  pour obtenir des charges critiques égales

Pour calculer le ratio  $h/b$ , nous devons avoir les même charges critiques des plans  $x - y$  et  $x - z$ .

$$F_{cr_{x-z}} = F_{cr_{x-y}} \quad (10.4.5)$$

Avec les équations **Error! Reference source not found.** et **Error! Reference source not found.** on obtient:

$$\frac{4\pi^2 EI_z}{L^2} = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \quad (10.4.6)$$

En substituant les valeurs de  $I_y$  et de  $I_z$  des équations (10.4.2) et (10.4.4) dans les équations précédentes, on obtient:

$$\frac{4bh^3}{12} = \frac{b^3h}{12} \quad (10.4.7)$$

$$\frac{b}{h} = 2 \quad (10.4.8)$$

### Problème 10.5 – Charges excentriques (Optionnel - Question courte)

Une poutre en H de longueur  $L = 7.5$  m (voir **Error! Reference source not found.**) est soumise à une force  $F_1 = 1800$  kN sur l'axe de la poutre et à une force excentrique  $F_2 = 200$  kN à une distance  $d_1 = 400$  mm du centroïde. La section de la poutre est  $A = 200$  cm<sup>2</sup>. Le rayon de giration est  $r = 17.32$  cm. La distance maximale depuis le centroïde est  $c = 150$  mm. L'acier utilisé a un module de Young de  $E = 200$  GPa et une limite d'élasticité de  $\sigma_Y = 300$  MPa.

(a) Trouvez la contrainte compressive maximale sur la poutre.

(b) Déterminez le facteur de sécurité en considérant la charge imposée.

Contrainte maximale pour une charge excentrique:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} \left[ 1 + \frac{ec}{r^2} \cdot \sec \left( \frac{L}{2r} \sqrt{\frac{F}{EA}} \right) \right]$$

Avec  $\sec(x) = 1/\cos(x)$

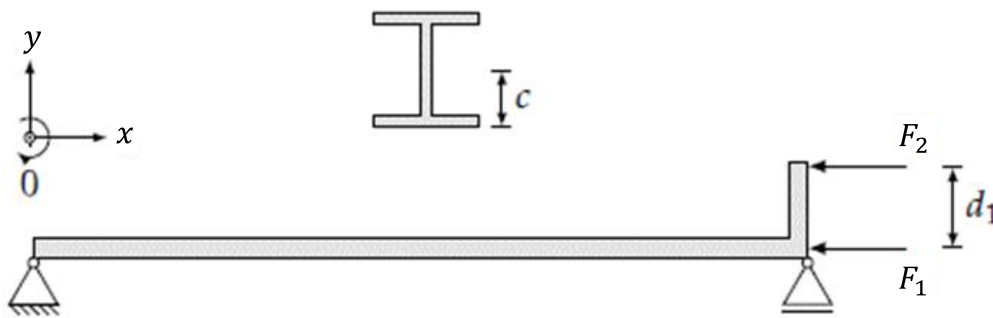


Figure 10.5 | Poutre soumise à une contrainte excentrique.

### 10.5 Solution

Donnée:

Longueur de la poutre  $L = 7.5$  m  
 Section  $A = 200$  cm<sup>2</sup>  
 Distance maximale depuis le centroïde  $c = 150$  mm  
 Rayon de giration  $r = 17.32$  cm  
 Module de Young  $E = 200$  GPa  
 Limite d'élasticité  $\sigma_Y = 300$  MPa  
 Charges:  $F_1 = 1800$  kN &  $F_2 = 200$  kN  
 Distance entre les charges  $d_1 = 400$  mm

Qu'est-ce qui est demandé?

- Contrainte compressive maximale dans la poutre.
- Facteur de sécurité

Principes et formules

- La formule sécante pour la contrainte maximale (en valeur absolue) :

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} \left[ 1 + \frac{e \cdot c}{r^2} \sec \left( \frac{L}{2r} \sqrt{\frac{F}{EA}} \right) \right] \quad (10.5.1)$$

On remplace les deux charges appliquées par une charge équivalente de valeur:

$$F = F_1 + F_2 = 2000 \text{ kN} \quad (10.5.2)$$

La charge équivalente  $F$  est appliquée à une distance  $e$  du centroïde. Pour calculer cela, on trouve le moment par rapport à l'origine:

$$M = F_2 \cdot d_1 = 80 \text{ kN} \cdot \text{m} = F \cdot e \rightarrow e = 40 \text{ mm} \quad (10.5.3)$$

On sait que la valeur pour la contrainte maximale est donnée par la formule sécante. On calcule donc les valeurs pour les différentes parties composant la formule sécante:

$$\frac{F}{A} = \frac{2000 \text{ kN}}{200 \text{ cm}^2} = 100 \text{ MPa} \quad (10.5.4)$$

$$\frac{e \cdot c}{r^2} = \frac{(40 \text{ mm})(150 \text{ mm})}{(17.32 \text{ cm})^2} = 0.2 \quad (10.5.5)$$

En injectant ces valeurs dans la formule sécante, on trouve:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} \left[ 1 + \frac{e \cdot c}{r^2} \sec \left( \frac{L}{2r} \sqrt{\frac{F}{EA}} \right) \right] = (100 \text{ MPa}) [1 + 0.2 \sec(0.48414)] = 120 \text{ MPa} \quad (10.5.6)$$

Souvenez-vous que  $c$ 'est une contrainte compressive et que la valeur exprimée en Eq. (10.5.6) est en valeur absolue.

#### (b) Facteur de sécurité

On peut calculer un facteur de sécurité en considérant la contrainte maximale et la limite d'élasticité :

$$SF = \frac{\sigma_y}{\sigma_{max}} = \frac{300 \text{ MPa}}{120 \text{ MPa}} = 2.5 \quad (10.5.7)$$