

## Série 7a - SOLUTIONS

### Problème 7a.1 – Axe neutre

Une poutre ABC de longueur  $L$  est encastree au point A. La section transversale de la poutre est carrée. Un moment  $M_0$  est appliqué sur son extrémité libre (point C), comme illustré sur la Figure 7.1. Pour le cas II, on impose en plus une axiale force  $F_0$ .

Pour les cas I, II et III, calculer :

- La position de l'axe neutre  $y_0$
- L'emplacement et la valeur absolue maximale de la contrainte normale  $|\sigma_{max}|$

-Indice pour cas 3 : chaque partie ( $x < L/2$ ,  $x > L/2$ ) de la poutre peut être analysée indépendamment

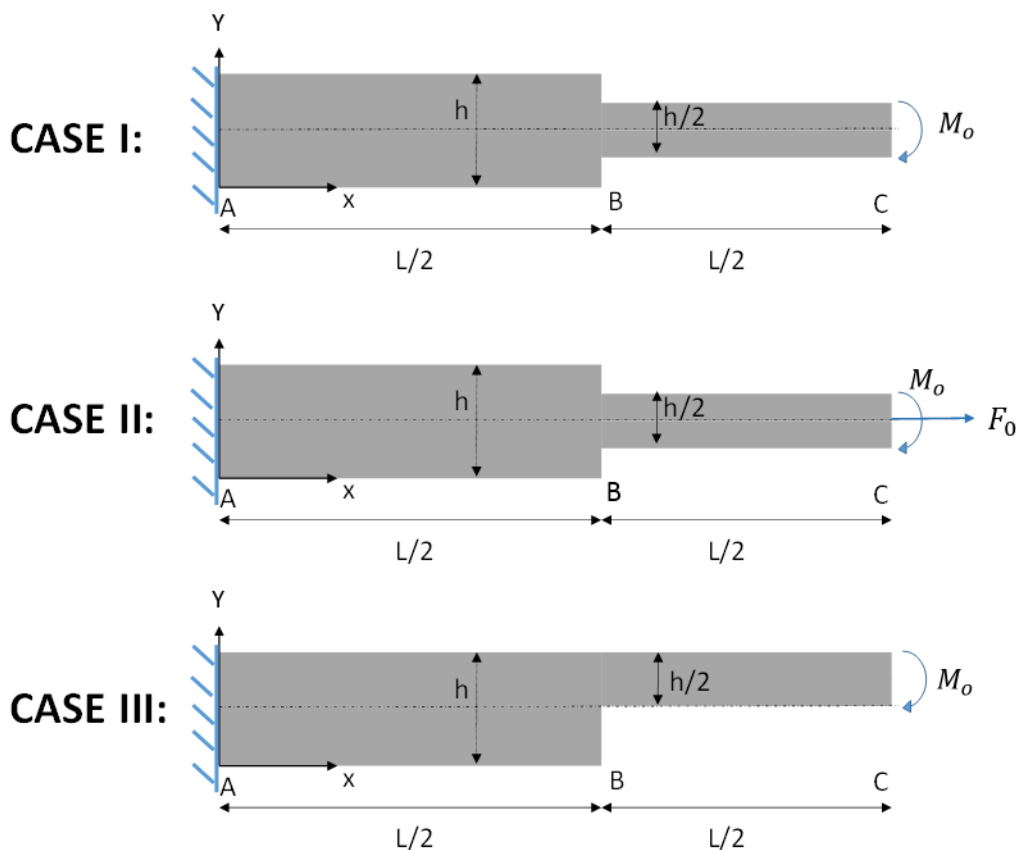


Figure 7.1 | Une poutre encastree, de section carrée.

### Solution

Ce qui est donné ?

Longueur  $L$

Épaisseur  $h$  et  $h/2$

Moment  $M_0$

Charge ponctuelle  $F_0$

### Hypothèses

Le matériau est homogène et isotrope.

### Ce qui est demandé ?

La position de l'axe neutre  $y_0$  pour les cas I, II et III.

L'emplacement et la valeur absolue de la contrainte normale maximale  $|\sigma_{max}|$

### **CAS I:**

Nous sommes dans un cas de flexion pure, ce qui signifie que l'axe neutre coïncidera avec le centre de masse et sera donné par la formule que l'on peut trouver dans le formulaire (ou simplement par symétrie):

$$y_{0,bending} = \frac{\int_A E y dA}{\int_A E dA} = \frac{\int_A y dy dz}{\int_A dy dz} \quad (4.1)$$

En flexion pure, la contrainte maximale est donnée par :

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_{int}}{I_{z,y_0}}(y - y_0) \rightarrow \sigma_{max} = \frac{M_{max} c}{I_{z,y_0}} \quad (4.2)$$

Où  $c$  est la distance maximale de l'axe neutre au bord de la poutre et  $I_{z,y_0}$  est le moment d'inertie de la poutre (qui peut dépendre de  $x$ )

### **La position de l'axe neutre**

Etant donné que la section transversale est symétrique, la position de l'axe neutre est au centre de chaque partie ( $x < L/2$  et  $x > L/2$ ), avec l'origine on bas à gauche comme dans la figure.

$$y_0(x) = \frac{h}{2} \quad (4.3)$$

### **La contrainte maximale dans la poutre :**

Le moment interne est partout  $M_{int} = M_0$

Pour une section carrée :

$$I = \iint_A (y - y_0)^2 dy dz = \frac{h^4}{12} \quad (4.4)$$

Où  $h$  est l'épaisseur et la largeur de la section transversale. Il en résulte que :

Pour  $x < \frac{L}{2}$ :

$$\sigma_{max} = \frac{M_0}{I_1} c_1 = \frac{M_0}{\frac{h^4}{12}} \frac{h}{2} = \frac{6M_0}{h^3} \quad (4.5)$$

Pour  $x > \frac{L}{2}$ :

$$\sigma_{max} = \frac{M_0}{I_2} c_2 = \frac{M_0}{\frac{h^4}{16 \cdot 12}} \frac{h}{4} = \frac{48M_0}{h^3} \quad (4.6)$$

Ce qui signifie que la valeur maximale de la contrainte se situera dans la zone  $\frac{L}{2} < x < L$  à la fois en haut et en bas de cette deuxième partie de la poutre (à  $y = \frac{h}{4}$  ou à  $y = \frac{3h}{4}$ ) et elle sera :

$$\sigma_{max} = \frac{48M_0}{h^3} \quad (4.7)$$

### CAS II:

#### La position de l'axe neutre $y'_0$

Puisqu'il y a une charge axiale sur la poutre, la contrainte sera donnée par :

$$\sigma(x, y) = \frac{F_0}{A_1} - E \frac{y - y_0}{\rho} \quad (4.8)$$

Pour calculer la position de l'axe neutre  $y'_0$  (et non plus  $y_0 = \frac{h}{2}$  qui est la position de 'axe neutre sans charge axiale), nous appliquons le principe de superposition et trouvons la position  $y'_0$  où la contrainte est nulle :

Pour  $x \leq \frac{L}{2}$ :

$$\begin{aligned} \sigma(y'_0) = 0 &= \frac{F_0}{A_1} - E \frac{y'_0 - y_0}{\rho} \rightarrow y'_0 = \frac{F_0}{A_1 E} \rho + y_0 \\ y'_0 &= \frac{F_0 I_{z, y_0}}{A_1 M_{int}} + y_0 = -\frac{F_0 h^2}{12 M_0} + \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Où  $A_1$  est l'aire de la section de la partie de la poutre  $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ .

Pour  $x > \frac{L}{2}$ :

$$\begin{aligned} \sigma(y'_0) = 0 &= \frac{F_0}{A_2} - E \frac{y'_0 - y_0}{\rho} = \frac{F_0}{\frac{h^2}{4}} + \frac{M_{int}}{h^4/192} \left( y_0 - \frac{h}{2} \right) \\ y'_0 &= -\frac{F_0 h^2}{48 M_0} + \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Où  $A_2$  est l'aire de la section de la partie de la poutre pour  $\frac{L}{2} \leq x \leq L$ .

#### La contrainte maximale dans la poutre :

**Première option pour trouver**  $\sigma_{max}$  par.  $\sigma(x, y) = \frac{F_0}{A_1} - E \frac{y - y_0}{\rho} = \frac{F_0}{A_1} - \frac{M_{int}}{I_{z, y_0}} (y - y_0)$

Le moment interne est partout  $M_{int} = M_0$

La contrainte sera maximale sur soit le dessus soit le dessous de la poutre:

Pour  $x \leq \frac{L}{2}$ :

$$\sigma(y_{top}) = \frac{6 M_0}{h^3} + \frac{F_0}{h^2} \quad \sigma(y_{bottom}) = -\frac{6 M_0}{h^3} + \frac{F_0}{h^2} \quad (4.11)$$

Pour  $x > \frac{L}{2}$ :

$$\sigma(y_{top}) = \frac{48 M_0}{h^3} + \frac{4F_0}{h^2} \quad \sigma(y_{bottom}) = -\frac{48M_0}{h^3} + \frac{4F_0}{h^2} \quad (4.12)$$

La contrainte est maximale sur le dessus de la deuxième partie de la poutre  $\sigma(y_{top})$ :

$$\sigma_{max} = \frac{48M_0}{h^3} + \frac{4F_0}{h^2} \quad (4.13)$$

**Deuxième option pour trouver  $\sigma_{max}$ :**

Utiliser  $\sigma(x, y) = E \frac{y-y'_0}{\rho} = \frac{M_{int}}{I_{z,y_0}} (y - y'_0)$  plutôt que  $\sigma(x, y) = \frac{F_0}{A_1} - E \frac{y-y_0}{\rho}$

En travaillant à partir de  $y'_0$ , la force est déjà incluse dans la contrainte

Par exemple, pour  $x \leq \frac{L}{2}$ , on a :

$$\sigma_{bot} = 12 \frac{M_0}{h^4} (0 - y'_0) = 12 \frac{M_0}{h^4} \left( \frac{F_0 h^2}{12 M_0} - \frac{h}{2} \right)$$

$$\sigma_{bot} = \frac{F_0}{h^2} - \frac{6M_0}{h^3} \text{ comme eq 4.11 ci-dessus}$$

### CAS III: Moment appliqué à l'extrémité de la poutre, qui n'est plus symétrique.

#### La position de l'axe neutre

Comme dans le CAS I, nous sommes dans un cas de flexion pure, ce qui signifie que l'axe neutre coïncidera avec le centre de masse, et sera donné par l'Eq. (4.3). Cependant, la section est discontinue et asymétrique. *L'axe neutre est situé au centre de masse de chaque section :*

$$\begin{aligned} y_0 \left( x < \frac{L}{2} \right) &= \frac{h}{2} \\ y_0 \left( x > \frac{L}{2} \right) &= \frac{3h}{4} \end{aligned} \quad (4.14)$$

#### La contrainte maximale dans la poutre :

Comme avant,  $M_{int} = M_0$  dans cette poutre

Nous utilisons les mêmes formules que dans le CAS I, car  $c$  et  $I_1$  sont les mêmes.

Pour  $x \leq \frac{L}{2}$ :

$$\sigma_{max} = \frac{M_0}{I_1} c_1 = \frac{M_0}{\frac{12}{h^4}} \frac{h}{2} = \frac{6M_0}{h^3} \quad (4.15)$$

Pour  $x > \frac{L}{2}$ :

$$\sigma_{max} = \frac{M_0}{I_2} c_2 = \frac{M_0}{\frac{h^4}{16 \cdot 12}} \frac{h}{4} = \frac{48M_0}{h^3} \quad (4.16)$$

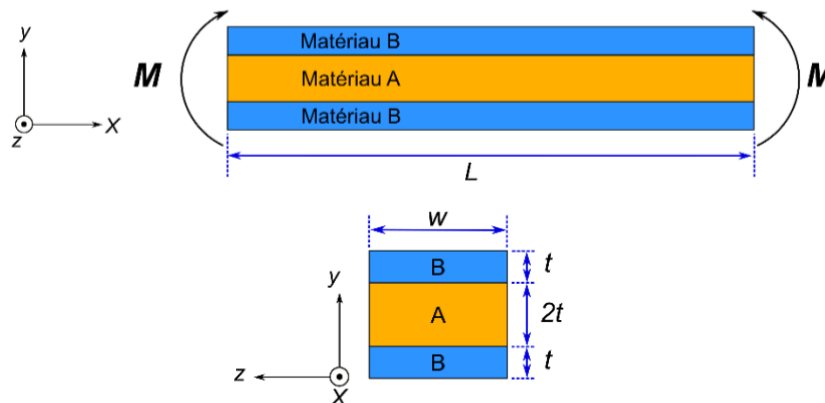
Ce qui signifie que la contrainte maximale sera située dans la zone  $x > \frac{L}{2}$ , se trouve en haut et en bas de la poutre et vaut :

$$\sigma_{max} = \frac{48M_0}{h^3} \quad (4.17)$$

## Problème 7a.2 – Contrainte normale maximale

Une poutre composite est constituée de deux matériaux : A et B. La poutre a une longueur  $L$ , largeur  $w$ , et épaisseur  $4t$ . Les matériaux A et B ont un module de Young  $E_A = 9E$  et  $E_B = 3E$ , des épaisseurs  $t_A = 2t$ , and  $t_B = t$ , voir la figure ci-dessous.

On impose un moment externe  $M$  selon l'axe  $z$  aux deux extrémités de la poutre, dans les sens dessinés ci-dessous. Aucune force externe et aucun autre moment externe **ne sont** imposés.



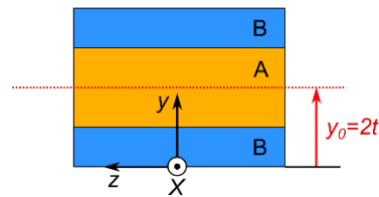
Pour les questions A à E, donnez vos réponses en fonction de  $W$ ,  $L$ ,  $w$ , ou  $t$ .

- A) Quelle est la distance entre l'axe neutre et bas de la poutre ? Indiquez l'axe neutre sur un dessin dans le plan  $xy$
- B) Calculez la Rigidité en flexion de la poutre  $\langle EI_{z,y0} \rangle$
- C) Calculez le rayon de courbure ( $\rho$ ) pour un moment de flexion  $M = 0.2Ewt^2$
- D) Trouvez les déformations relatives maximum  $\epsilon_{x,max-tension}$  et  $\epsilon_{x,max-compression}$  dans la poutre.
- E) Calculer la contrainte maximum en traction dans la poutre pour  $E = 100$  MPa et  $t = 10$  mm.
- F) Pour une position arbitraire  $x$  le long de la poutre, dessinez la contrainte  $\sigma_x$  en fonction de  $y$ . Indiquez où les contraintes en traction et on compression sont maximum.

## Solution 7.2 Contrainte normale maximale

A) L'axe neutre se situe à:

$$y_0 = \frac{\sum E_i Q_i}{\sum E_i A_i} = \frac{E_A Q_A + E_B Q_B}{E_A A_A + E_B A_B} = \frac{9E(2wt)(2t) + 3E(wt)\left(\frac{t}{2}\right) + 3E(wt)\left(\frac{7t}{2}\right)}{9E(2wt) + 3E(wt) + 3E(wt)} = 2t$$



B) Bending stiffness:  $\langle EI \rangle = E_A I_A + E_B I_B = 9E \left( \frac{w(2t)^3}{12} \right) + 3E \left( \frac{w(4t)^3}{12} - \frac{w(2t)^3}{12} \right) = 20Ewt^3$

ci-dessus on a pris des éléments avec axe neutre de chaque élément pratiques déjà à  $y=2t$

On aurait aussi pu sommer trois éléments avec des axes neutres à  $t/2, 2t$  et  $7t/2$  en utilisant Steiner pour ramener à  $y_0 = 2t$

C) General formula of the radius of curvature ( $\rho$ ):

$$\rho = \frac{\langle EI \rangle}{M} = \frac{20Ewt^3}{0.2Ewt^2} = 100t$$

D) Maximum and minimum longitudinal strains: sera à  $y = 4t$  et à  $y = 0$

$$\varepsilon_x = -\frac{y - y_0}{\rho}, y \in [0, 4t]$$

$$\varepsilon_{x, \max\_comp} = -\frac{4t - 2t}{100t} = -0.02 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{x, \max\_traction} = -\frac{0 - 2t}{100t} = 0.02$$

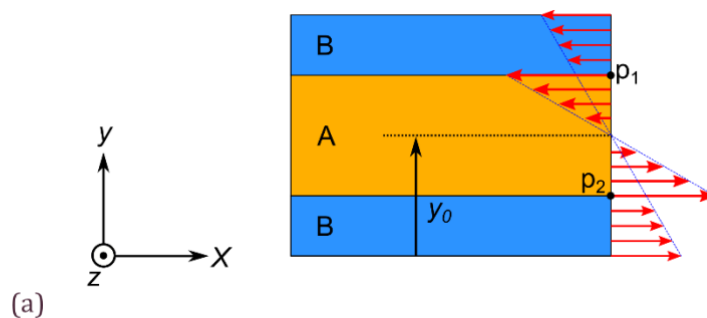
E) To find the maximum tensile stress in the composite beam (bottom of the beam), we need to find maximum tensile stress in both materials A and B. This will be at  $y = 0$  (for material B) and at  $y = t = 10 \text{ mm}$  for material A, as these are the locations furthest from the neutral plane.

$$\sigma_{\max, B} = -E_B \frac{y - y_0}{\rho_0} = -300 [\text{MPa}] \frac{0 - 20 [\text{mm}]}{1000 [\text{mm}]} = 6 [\text{MPa}]$$

$$\sigma_{\max, A} = -E_A \frac{y - y_0}{\rho_0} = -900 [\text{MPa}] \frac{10 - 20 [\text{mm}]}{1000 [\text{mm}]} = 9 [\text{MPa}]$$

La contrainte max en traction est donc de 9 MPa, située à  $y = 10 \text{ mm}$  (voir dessin ci-dessous), à l'interface entre A et B, point  $p_2$

F) Contrainte  $\sigma_x(y)$



The maximum tensile stress occurs at  $y = t$  (point  $p_2$ ) and the maximum compressive stress at  $y = 3t$  (point  $p_1$ )

### Problème 7a.3 – Contrainte normale maximale

Une poutre, de largeur  $b$ , est composée de deux matériaux. La section est montrée en Fig 7.3. Les modules de Young des deux matériaux sont  $E_1 = 300$  GPa et  $E_2 = 100$  GPa. On impose une courbure de la poutre de  $\kappa = 8/h \cdot 10^{-4}$ .

- a) Pour une position arbitraire  $x$  le long de la poutre, dessinez la contrainte  $\sigma_x$  en fonction de  $y$ . Indiquez où les contraintes en traction et en compression sont maximum.
- b) Quel est la valeur absolue de la contrainte normale maximale  $\sigma_x$  ?

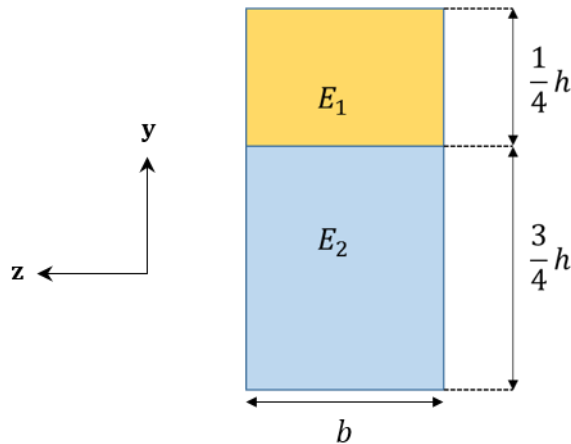


Fig 7.3| Vue en coupe de la section de la poutre

#### Solution

What is given?

$$t_1 = \frac{1}{4}h$$

$$t_2 = \frac{3}{4}h$$

$$E_1 = 300 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 100 \text{ GPa}$$

$$\kappa = 8/h \cdot 10^{-4}$$

$$\text{width} = b$$

Assumptions

The material is homogeneous and isotropic.

The cross-section of the beam in the  $yz$  plane remains un-deformed along the length of the beam.

What is asked?

Maximum bending stress  $\sigma_x$

Principles and formula

We first start by calculating the location of the neutral axis, which we can do using the formula from the formula sheet and, setting the origin at the bottom of the cross-section :

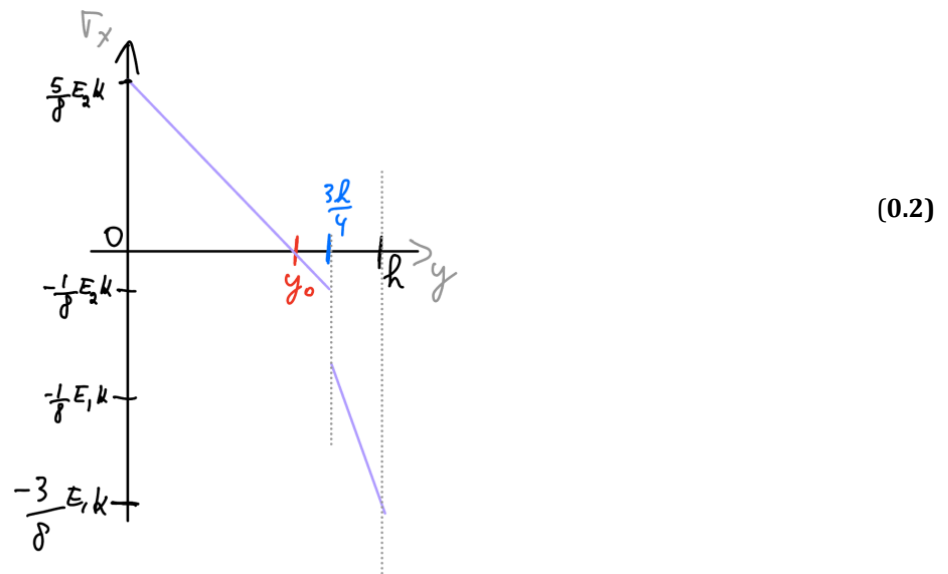
$$y_0 = \frac{\int_A E(y)y dA}{\int_A E(y) dA} = \frac{\int_0^b \left( \int_0^{\frac{3h}{4}} E_2 y dy \right) dz + \int_0^b \left( \int_{\frac{3h}{4}}^h E_1 y dy \right) dz}{\int_0^b \left( \int_0^{\frac{3h}{4}} E_2 dy \right) dz + \int_0^b \left( \int_{\frac{3h}{4}}^h E_1 dy \right) dz} \quad (0.1)$$

$$y_0 = \frac{E_2 \frac{b}{2} \frac{9}{16} h^2 + E_1 \frac{b}{2} \left( h^2 - \frac{9}{16} h^2 \right)}{E_2 \frac{3}{4} bh + E_1 \frac{1}{4} bh} = \frac{5}{8} h$$

To find the maximum bending stress, we start with the flexure formula for composite beams and the relationship between the moment and the curvature:

$$M_z(x) = \frac{1}{\rho} \langle EI_{z,y_0} \rangle = \kappa \langle EI_{z,y_0} \rangle$$

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{E(y) M_z(x)}{\langle EI_{z,y_0} \rangle} (y - y_0) = -E(y) \kappa (y - y_0)$$



The maximum stresses occur at both extremes of the cross section:

$$|\sigma_{bottom}| = \left| -E_2 \cdot \frac{8}{h} \cdot 10^{-4} \cdot -\frac{5}{8} h \right| = 50 \text{ MPa} \quad (0.3)$$

$$|\sigma_{top}| = \left| -E_1 \cdot \frac{8}{h} \cdot 10^{-4} \cdot \frac{3}{8} h \right| = 90 \text{ MPa} \quad (0.4)$$

The maximum normal stress is therefore 90 MPa.

### Problème 7a.4 – Question courte – Contrainte normale maximale

Une poutre composite, faite d'un panneau aggloméré (matériau A, en bleu) recouvert de deux parois en fibre de verre (matériau B, en gris), a une section telle qu'illustrée en Fig 7.4

La largeur de la poutre est de 5 cm, l'épaisseur des parois est de 0.25 cm et l'épaisseur du panneau central est de 1 cm. La poutre est soumise à un moment de flexion positif de 28 N.m selon l'axe z. Les modules de Young des deux matériaux sont  $E_A = 10 \text{ GPa}$  et  $E_B = 27.5 \text{ GPa}$ .

- Déterminez les contraintes normales maximales  $\sigma_A$  et  $\sigma_B$  dans les matériaux A et B
- Même question si on inverse les matériaux : fibre de verre au centre et aggloméré à l'extérieur

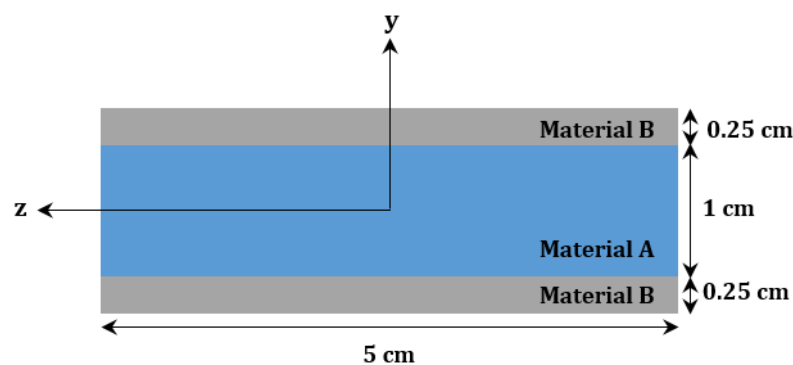


Figure 7.4 | Vue en coupe de la section de la poutre composite

### Solution

What is given?

$$\begin{aligned} w_{beam} &= 5.00 \text{ cm} \\ t_A &= 1.00 \text{ cm} \\ t_B &= 0.25 \text{ cm} \\ M &= 2.80 \text{ kN} \cdot \text{cm} \\ E_A &= 10.00 \text{ GPa} \\ E_B &= 27.50 \text{ GPa} \end{aligned}$$

Assumptions

The material is homogeneous and isotropic.

The cross-section of the beam in the YZ plane remains un-deformed along the length of the beam.

What is asked?

Maximum bending stress  $\sigma_A$  &  $\sigma_B$

Principes and formules:

$$\sigma_{x,i}(x, y) = -\frac{E(y)M_z(x)}{\langle EI_{z,y_0} \rangle} (y - y_0)$$

Pour trouver les  $\langle EI_{z,y_0} \rangle$ , nous commençons par trouver les moments d'inertie de chaque matériau.

$$I_{z,y_0} = \int (y - y_0)^2 dA \quad (0.1)$$

For a rectangular cross section and  $y_0 = 0$ :

$$I_A = \frac{W_{\text{beam}} t_A^3}{12} \quad (0.2)$$

For the moment of inertia of material B, a difference is made between the moment of inertia of the whole beam and material A (since material B is not a solid block, but two pieces):

$$I_B = I_{\text{beam}} - I_A = \frac{W_{\text{beam}}}{12} (h^3 - t_A^3) \quad (0.3)$$

Where  $h = 2t_B + t_A$ .

To find the normal stresses, one uses the flexure formula for composite beams:

$$\begin{aligned} \sigma_{x,i}(x,y) &= - \frac{E(y)M_z(x)}{\langle EI_{z,y_0} \rangle} (y - y_0) \\ \langle EI_{z,y_0} \rangle &= \sum_i EI_{z,y_0,i} = E_A I_A + E_B I_B . \end{aligned} \quad (0.4)$$

*attention , ici c'est facile d'utiliser  $I_A$  et  $I_B$ , car tous les moments d'inertie sont autour de l'axe  $y=0$ . Et donc pas de Steiner à utiliser ici ...*

Ainsi:

$$\sigma_A = \frac{M_z E_A}{E_A I_A + E_B I_B} \left( \frac{t_A}{2} \right); \quad \sigma_B = \frac{M_z E_B}{E_A I_A + E_B I_B} \left( \frac{h}{2} \right) \quad (0.5)$$

**Résultats numériques:**

$$I_A = 0.41 \text{ cm}^4; \quad I_B = 0.99 \text{ cm}^4 \quad (0.6)$$

$$\sigma_A = 4.46 \text{ MPa}; \quad \sigma_B = 18.4 \text{ MPa} \quad (0.7)$$