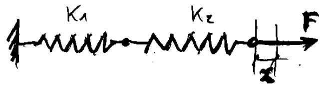
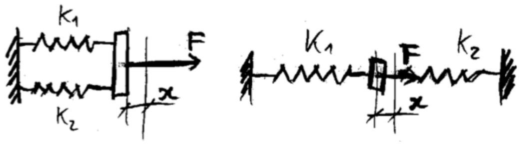
RÉSUMÉ : Combinaisons de ressorts

SÉRIE $K_{\text{eq}} = \frac{F}{x} = \frac{1}{\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}}$

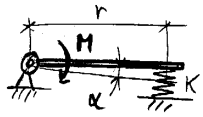


PARALLÈLE $K_{\text{eq}} = \frac{F}{x} = K_1 + K_2$

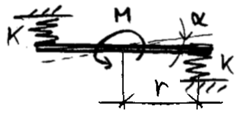


Les deux ressorts sont toujours tendus

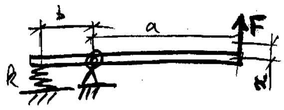
ROTATION $K_{\alpha\text{eq}} = \frac{M}{\alpha} = K \cdot r^2$



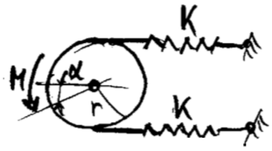
$K_{\alpha\text{eq}} = \frac{M}{\alpha} = 2 \cdot K \cdot r^2$



LEVIER $K_{\text{eq}} = \frac{F}{x} = k \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2$



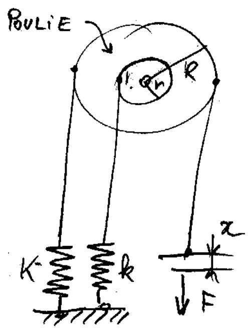
COURROIE $K_{\alpha\text{eq}} = \frac{M}{\alpha} = 2 \cdot K \cdot r^2$



COMBINAISON

$$\frac{1}{2} \cdot K_{\text{eq}} \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(x\frac{r}{R}\right)^2$$

$$K_{\text{eq}} = \frac{F}{x} = K + k \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2$$



Solution 1 : Butée élastique

1. Comparaison de l'énergie cinétique de la bille et de l'énergie admissible par le ressort.

- Calcul de l'énergie cinétique de la bille en mouvement : $E_{\mathrm{cin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 0{,}80$ J.
- Calcul de l'énergie admissible par le ressort : $E_{\mathrm{adm}} = \frac{n \cdot {\tau_{\mathrm{adm}}}^2 \pi^2 \cdot d^2 \cdot D}{16 \cdot G} = 1{,}53$ J.

  Avec $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $E = 210$ GPa et $\nu = 0{,}3$ pour l'acier.

$\boxed{\text{La limité élastique du ressort n'est pas dépassée durant la collision puisque } E_{\mathrm{cin}} < E_{\mathrm{adm}}.}$

2. Calcul de la déformation maximale du ressort

- Rigidité du ressort : $k = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot n \cdot D^3} = 126{,}2\ \mathrm{N\,m^{-1}}$.
- $\boxed{\text{Course maximale : } x_{\mathrm{max}} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{\mathrm{cin}}}{k}} = 0{,}11 \text{ m}}$.

3. Calcul de l'accélération maximale de la masse.

- Force maximale : $F_{\mathrm{max}} = k \cdot x_{\mathrm{max}} = 14{,}21$ N.
- $\boxed{\text{Accélération maximale : } a_{\mathrm{max}} = \frac{F_{\mathrm{max}}}{m} = 142{,}1\ \mathrm{m\,s^{-2}}}$.

Solution 2 : Propulseur

1. Calcul de l'angle de rotation maximal admissible du levier : $\boxed{\alpha_{\mathrm{adm}} = \frac{2 \cdot \tau_{\mathrm{adm}} \cdot L}{G \cdot d} = 0{,}74 \text{ rad } \textit{i.e. } 42{,}56\ ^\circ}$ avec $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $E = 210$ GPa et $\nu = 0{,}3$ pour l'acier.

2. Calcul de la vitesse maximale de la navette

- Énergie maximale disponible : $E_{\mathrm{adm}} = \frac{{\tau_{\mathrm{adm}}}^2 \pi \cdot d^2 \cdot L}{16 \cdot G} = 583{,}43$ J.
- Masse du levier : $m_{\mathrm{levier}} = \rho \cdot b \cdot h \cdot l = 156$ g avec $\rho = 7800\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ pour l'acier.
- Moment d'inertie prenant en compte la navette et le levier : $I_{\mathrm{eq}} = m \cdot l^2 + \frac{1}{3} \cdot m_{\mathrm{levier}} \cdot l^2 = 3{,}28\ \mathrm{g\,m^2}$.
- Vitesse maximale de rotation du levier propulsant la navette : $\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{\mathrm{adm}}}{I_{\mathrm{eq}}}} = 596{,}45\ \mathrm{rad\,s^{-1}}$.
- $\boxed{\text{Vitesse maximale de la navette : } v = \omega \cdot l = 119{,}29\ \mathrm{m\,s^{-1}}\ \textit{i.e. } 429{,}44\ \mathrm{km\,h^{-1}}}$.

Solution 3 : Ressort hélicoïdal de traction ou de compression

1. D'après le tableau de R. Clavel (2003), pour un diamètre normal (diamètre extérieur du ressort) $D_a = D + d = 5.5 + 0.5 = 6$ mm, nous avons :

- $\boxed{\text{Force maximale : } F_{\mathrm{adm}} = 570 \text{ cN } \textit{i.e. } F_{\mathrm{adm}} = 5{,}7 \text{ N}}$.
- Flèche par spire : $x_{\mathrm{spire}} = 1{,}51$ mm.
- Flèche pour 4 spires : $x_{\mathrm{max}} = 6{,}04$ mm.
- $\boxed{\text{Rigidité : } k = \frac{F_{\mathrm{adm}}}{x_{\mathrm{max}}} = 943{,}7\ \mathrm{N\,m^{-1}}}$.
- $\boxed{\text{Énergie maximale pouvant être stockée : } E_{\mathrm{adm}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot {x_{\mathrm{max}}}^2 = \frac{1}{2} \frac{{F_{\mathrm{adm}}}^2}{k} = \frac{1}{2} F_{\mathrm{adm}} \cdot x_{\mathrm{max}} = 17{,}21 \text{ mJ}}$.

2. D'après le formulaire de S. Henein (2007). (Notez la bonne concordance avec la méthode 1).

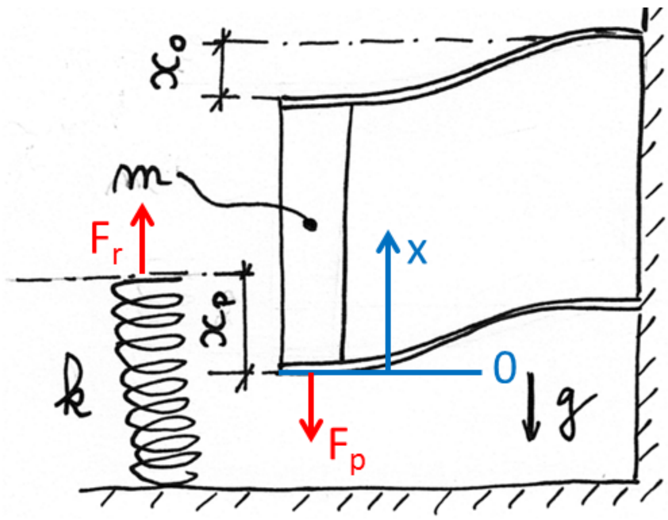
- $\boxed{\text{Force maximale : } F_{\mathrm{adm}} = \frac{\tau_{\mathrm{adm}} \cdot \pi \cdot d^3}{8 \cdot D} = \frac{640 \cdot 10^6 \cdot \pi (0{,}5 \cdot 10^{-3})^3}{8 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-3}} = 5{,}711 \text{ N}}$.
- $\boxed{\text{Rigidité : } k = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot n \cdot D^3} = \frac{81 \cdot 10^9 \cdot (0{,}5 \cdot 10^{-3})^4}{8 \cdot 4 \cdot (5{,}5 \cdot 10^{-3})^3} = 950\ \mathrm{N\,m^{-1}}}$.

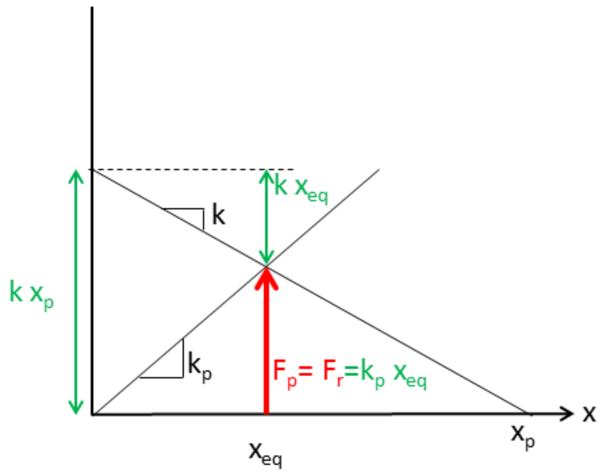
- $\boxed{\text{Énergie maximale : } E_{\text{adm}} = \frac{n \cdot \tau_{\text{adm}}{}^2 \cdot \pi^2 \cdot d^2 \cdot D}{16 \cdot G} = \frac{4 \cdot (640 \cdot 10^6)^2 \cdot \pi^2 \cdot (0{,}5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-3}}{16 \cdot 81 \cdot 10^9} = 17{,}15 \text{ mJ}}$.

Solution 4 : Equilibre de ressorts

a) Résolution graphique en prenant comme origine du repère la position x_1 du guidage flexible sous gravité (ceci permet de résoudre l'équation d'équilibre sans considérer le poids (mg) qui agit simplement comme un *offset*) :

- Rigidité de la table à deux lames parallèles : $k_p = \frac{mg}{x_0}$
- A l'équilibre : $F_p = F_r$
  $k_p\, x_{eq} + k\, x_{eq} = k\, x_p$, donc $x_{eq} = \frac{k\, x_p}{k+k_p}$.
  Comme $x_{eq} = x_0 - x_1$, $\boxed{x_1 = x_0 - \frac{k\, x_p}{k+k_p}}$
- Application numérique : $x_1 = 3.5$ mm





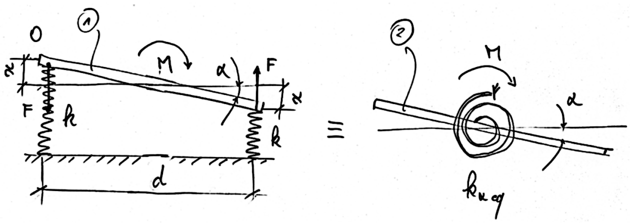
b) Résolution "brute force" avec l'équilibre des forces dans le repères absolu :

- $mg\frac{x_1}{x_0} + k(x_p - x_0 + x_1) = mg$ d'où l'on tire $\boxed{x_1 = x_0 - \frac{k\, x_p}{k+k_p}}$
- Application numérique : $x_1 = 3.5$ mm

Solution 5 : Combinaison de ressorts

Méthode 1

- Équilibre : $\sum M_O = 0 \Rightarrow M - F \cdot d = 0$
  $\Rightarrow M = F \cdot d$ avec $F = k \cdot x$ on obtient $\boxed{M = k \cdot x \cdot d}$.
- Cinématique : $x = \frac{d}{2} \sin\alpha \simeq \alpha\frac{d}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha \simeq \frac{2 \cdot x}{d}}$.
- Par définition : $k_{\alpha\text{eq}} = \frac{M}{\alpha} = \frac{k \cdot x \cdot d}{\frac{2 \cdot x}{d}} \Rightarrow \boxed{k_{\alpha\text{eq}} = \frac{k \cdot d^2}{2}}$.
- Avec $r = \frac{d}{2}$: $\boxed{k_{\alpha\text{eq}} = 2kr^2}$.



Méthode 2

L'énergie élastique stockée dans les deux systèmes pour un même angle α est la même.

- $\frac{1}{2} \cdot k_{\alpha \text{eq}} \cdot \alpha^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$.
- $\frac{1}{2} \cdot k_{\alpha \text{eq}} \cdot \alpha^2 = k \cdot \frac{\alpha^2 \cdot d^2}{4}$.
- $\boxed{k_{\alpha \text{eq}} = \frac{k \cdot d^2}{2}}$.

Solution 6 : Levier et ressort

Méthode 1

- Équilibre : $\sum M_O = 0 \Rightarrow F' \cdot l - F \cdot L = 0 \Rightarrow F = F' \frac{l}{L}$.
- Cinématique : $x' = l \cdot \sin(\alpha)$ et $x = L \cdot \sin(\alpha)$ donc $\frac{x'}{x} = \frac{l}{L} \Rightarrow x = x' \frac{L}{l}$.
- Par définition : $\boxed{k_{\text{eq}} = \frac{F}{x} = \frac{F' \cdot (l/L)}{x' \cdot (L/l)} = \frac{F'}{x'} \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^2 = k \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^2}$.

Méthode 2

Égalité des énergies élastiques pour un même déplacement.

- $\frac{1}{2} \cdot k_{\text{eq}} \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x'^2$.
- $k_{\text{eq}} \cdot x^2 = k \cdot x^2 \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^2$.
- $\boxed{k_{\text{eq}} = k \cdot \left(\frac{l}{L}\right)^2}$.

Solution 7 : Plongeoir

- Cinématique : $x = l \cdot \sin(\alpha) \simeq l \cdot \alpha$.
- Egalité des énergies élastiques pour un même angle : $\frac{1}{2} \cdot k_{\alpha \text{eq}} \cdot \alpha^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \Rightarrow k_{\alpha \text{eq}} \cdot \alpha^2 = k \cdot l^2 \cdot \alpha^2 \Rightarrow \boxed{k_{\alpha \text{eq}} = k \cdot l^2}$.

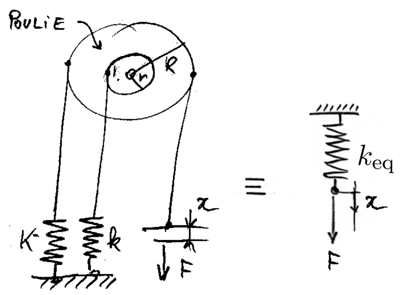
Solution 8 : Mécanisme flexible à quatre barres

- Cinématique : $x = l \cdot \sin(\alpha) \simeq l \cdot \alpha$.
- Egalité des énergies élastiques pour un même déplacement x : $\frac{1}{2} \cdot k_{\text{eq}} \cdot x^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot k_\alpha \cdot \alpha^2 \Rightarrow k_{\text{eq}} \cdot x^2 = 4 \cdot k_\alpha \cdot \frac{x^2}{l^2} \Rightarrow \boxed{k_{\text{eq}} = \frac{4 \cdot k_\alpha}{l^2}}$.

Solution 9 : Poulie

Cinématique

- $x_K = x$
- $x_k = x \frac{r}{R}$



Égalité des énergies

- $\frac{1}{2} k_{\text{eq}} x^2 = \frac{1}{2} K {x_K}^2 + \frac{1}{2} k {x_k}^2 = \frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} k \left(x \frac{r}{R}\right)^2$
- $\boxed{k_{\text{eq}} = K + k \left(\frac{r}{R}\right)^2}$