Semaine 9b

Poutres statiquement indéterminées

PARTIE 1: (slide 3-39)

Poutres statiquement indéterminées

(Chapitre 10 de Gere et Goodno)

PARTIE 2: (slide 40 - 52)

poutres avec supports élastiques

v. 2025

EPFL

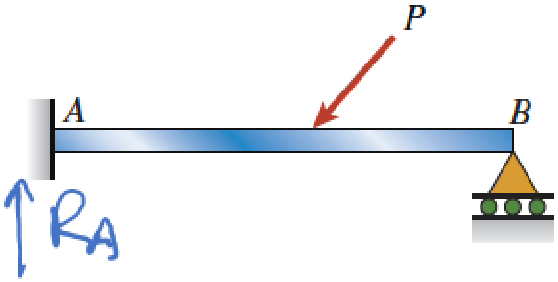
PROGRAMME DU COURS, semaines 6-10

6	14.10	Forces internes dans les poutres non-déformées	x	
6	16.10	$\varepsilon(y)$ et σ(y) en flexion pure. Moment d'intertie	x	Série 6
7	28.10	Poutres chargées axialement. Poutres composites	x	Série 6
7	30.10	Quiz + Session questions & réponses D. Briand		Série 1-5
8	04.11	Examen mi-semestre D. Briand		
8	06.11	Flèches des poutres	x	Série 7
9	11.11	Flèche pour guidage flexible	x	Série 8
9	13.11	Poutres statiquement indéterminées	x	Série 8
10	18.11	Poutres statiquement indéterminées. Flambage	x	Séries 9
10	20.11	Flambage	x	Série 10

Semaine 9b –partie 1 (slides 4-39) Objectifs d'apprentissage

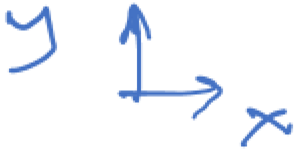
- Identifier si un système est statiquement indéterminé
- Identifier les redondants
- «Libérer» les poutres
- Utiliser la superposition pour trouver la flèche de poutres statiquement indéterminées

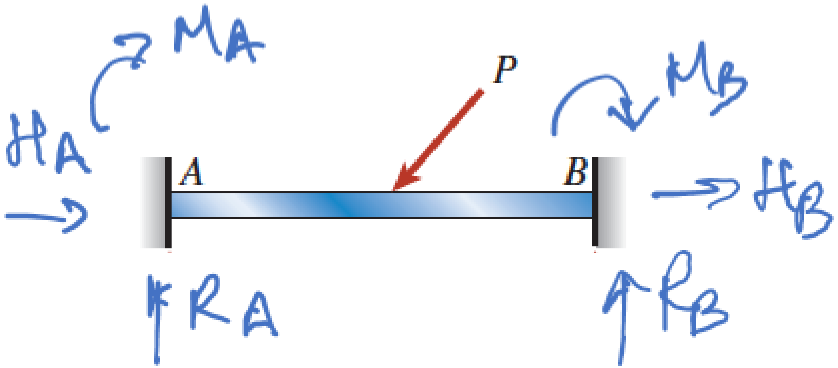
Poutres statiquement indéterminées



$4-3=1$

4 inconnues
mais 3 équations…

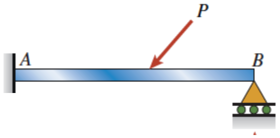


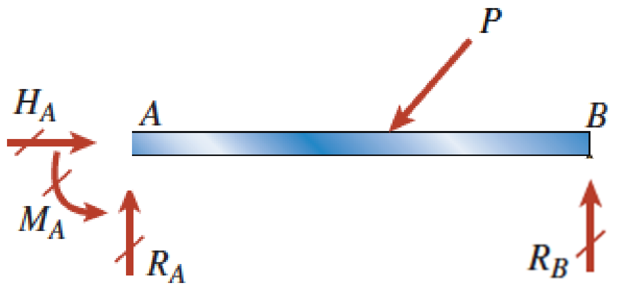


6 inconnues
mais 3 équations…

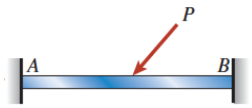
$6-3=3$

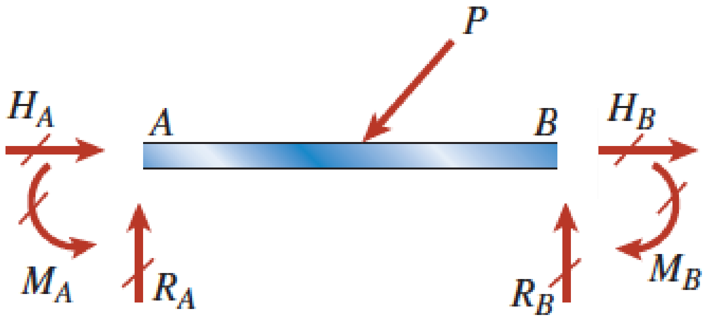
Poutres statiquement indéterminées





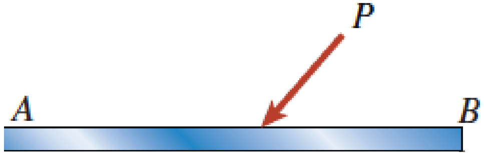
4 inconnues
mais 3 équations…



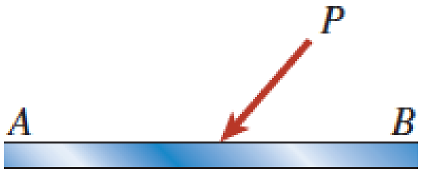


6 inconnues
mais 3 équations…

Poutres statiquement indéterminées

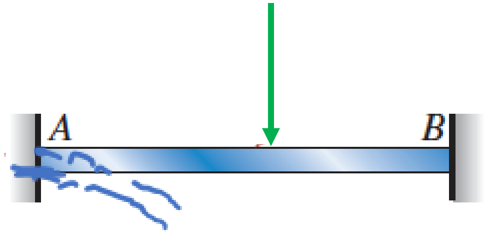


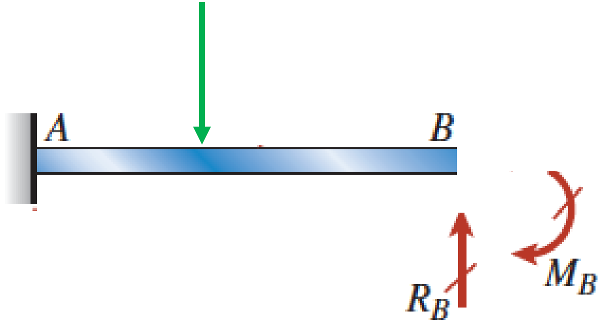
4 inconnues
mais 3 équations…



6 inconnues
mais 3 équations…

Aperçu de la Méthode de ce chapitre





$w_A(0) = w_B(L) = 0$

0. J'enlève l'encastrement qui me gène, et le remplace par une force R_B et un moment M_B (que je ne connais pas encore)

1. Je sais résoudre $w(x)$ par superposition, mais seulement en fonction de R_B et M_B (que je ne connais pas encore)

2. Je peux trouver R_B et M_B avec les conditions de compatibilité au support enlevé: $w(x = L) = 0$ et $w'(x = L) = 0$

$w'_A(0) = w'_B(L) = 0$

3. Je connais donc $w(x)$

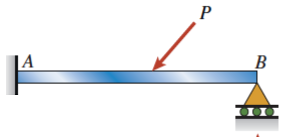
Les redondants

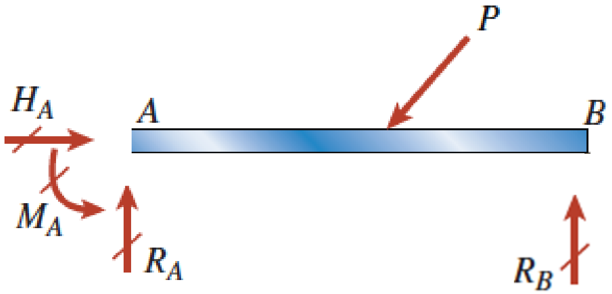
Exemple 1 : avec 1 seul redondant

 # de redondants = (nombre d'inconnus) - (nombre d'équation de la statique)

ici 4 réactions inconnues (M_A, R_A, R_B, H_A), et 3 equ. de la statique $(\sum F_x = 0$ et $\sum F_y = 0$ et $\sum M_z = 0)$

Donc 4-3=**1** redondant **(à choix parmi M_A, R_A, R_B, H_A)**





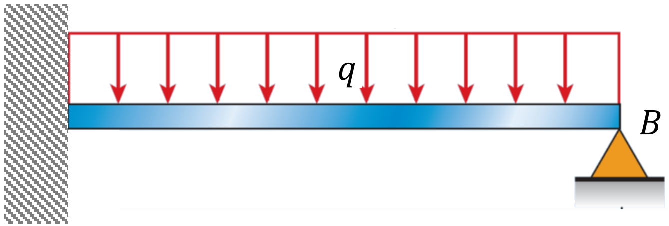
- C'est **vous** qui choisissez le/les redondants parmi les forces et moments inconnus
- Il vaut mieux prendre ceux qui permettront de facilement « enlever » des supports. Ici par exemple, R_B ou M_A

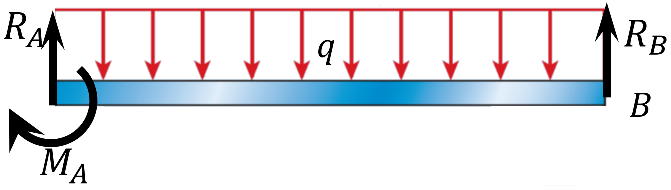
Les redondants

Exemple 2: avec 1 seul redondant

de redondants = (nombre d'inconnues) - (nombre d'équation de la statique)

ici 3 réactions inconnues (M_A, R_A, R_B), et 2 eq de la statique ($\sum F_y = 0$ et $\sum M_z = 0$)
Donc 1 redondant (à choix parmi M_A, R_A, R_B)





On a simplifié le problème, car pas de forces en x

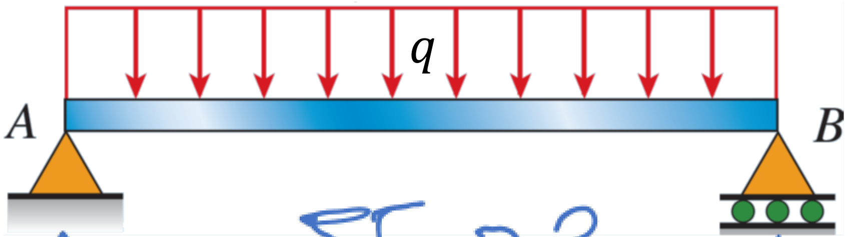
C'est vous qui choisissez le/les redondants. Vaut mieux prendre ceux qui permettent de facilement enlever des supports. Ici par exemple, R_B ou M_A

Quiz session: micro200

Déterminé/Indéterminé?
Combien de redondants ?

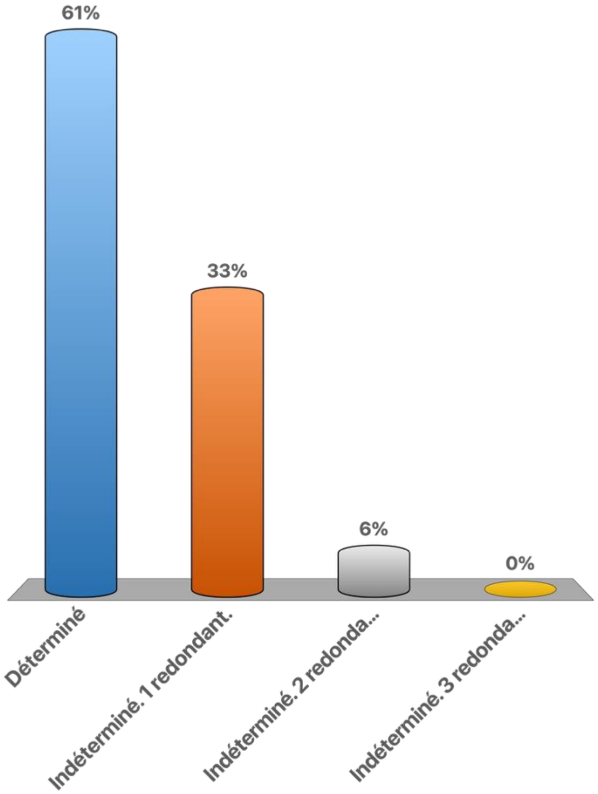
Question

A. Déterminé
B. Indéterminé. 1 redondant.
C. Indéterminé. 2 redondants.
D. Indéterminé. 3 redondants



$\uparrow R_A$ $\quad \sum F_y = 0 \quad$ $\uparrow R_B$

$\sum M_A = 0$



Quiz session: micro200

Solution

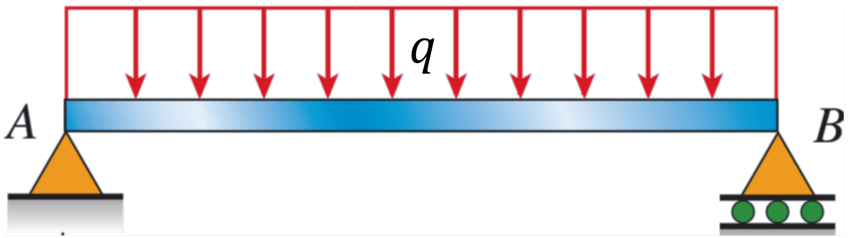
Déterminé/Indéterminé? Combien de redondants ?

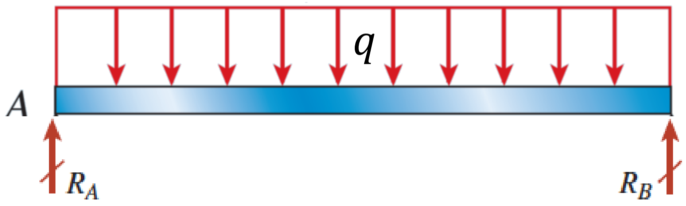
A. Déterminé

B. Indéterminé. 1 redondant.

C. Indéterminé. 2 redondants.

D. Indéterminé. 3 redondants





2 eq.
2 inconnue

Pareil si on a un R_x en A,

Quiz session: micro200

Déterminé / Indéterminé? Combien de redondants ?

Question

A. Déterminé

B. Indéterminé. 1 redondant.

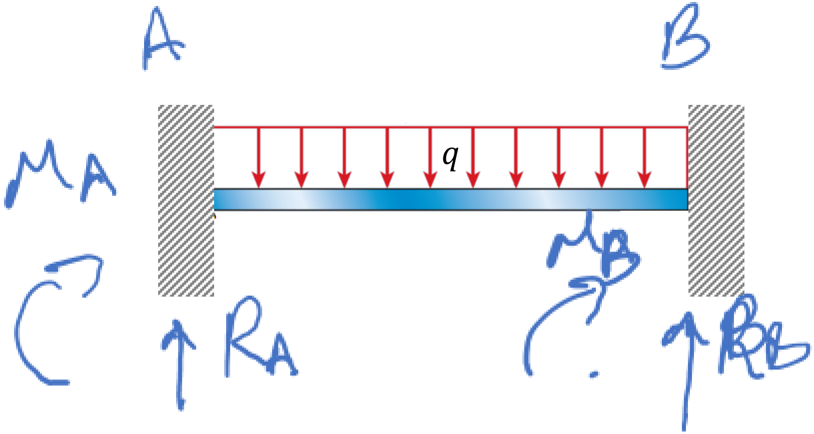
C. Indéterminé. 2 redondants.

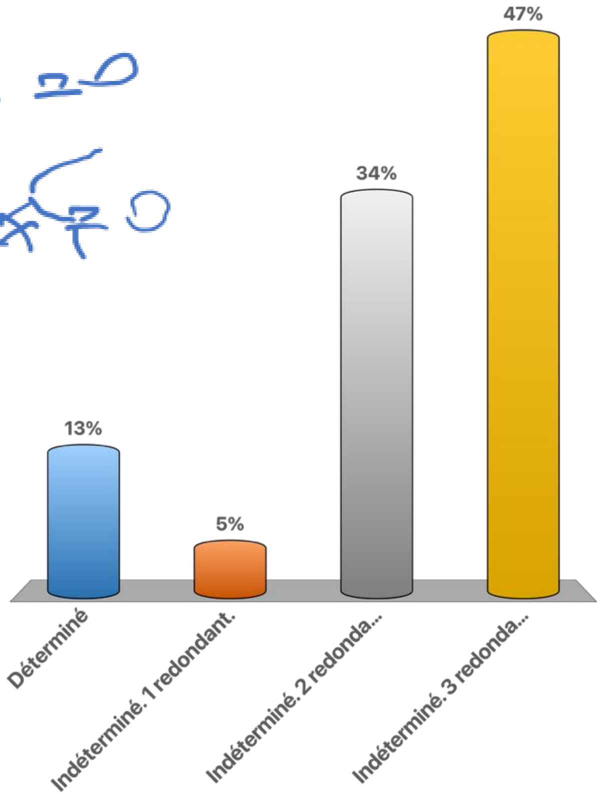
D. Indéterminé. 3 redondants

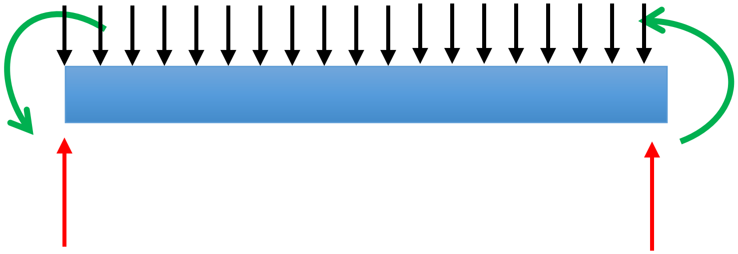
$\sum F_y = 0$

$\sum M_A = 0$

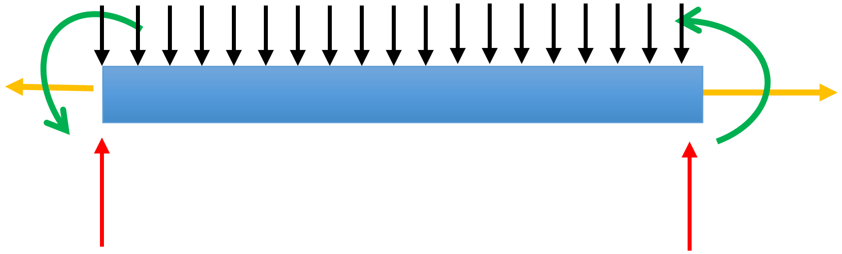
$\cancel{\sum F_x = 0}$



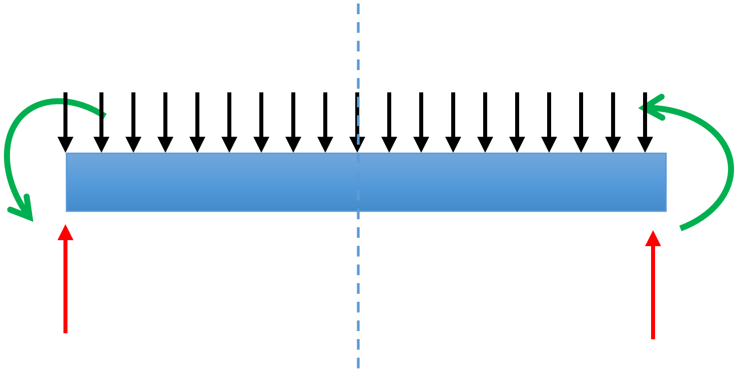




4 inconnus, 2 eqs = 2 redondants.



6 inconn, 3 eqs = 3 redondants.



Ou symétrie, et 0 redondants…

Quiz session: micro200

Déterminé / Indéterminé? Combien de redondants ?

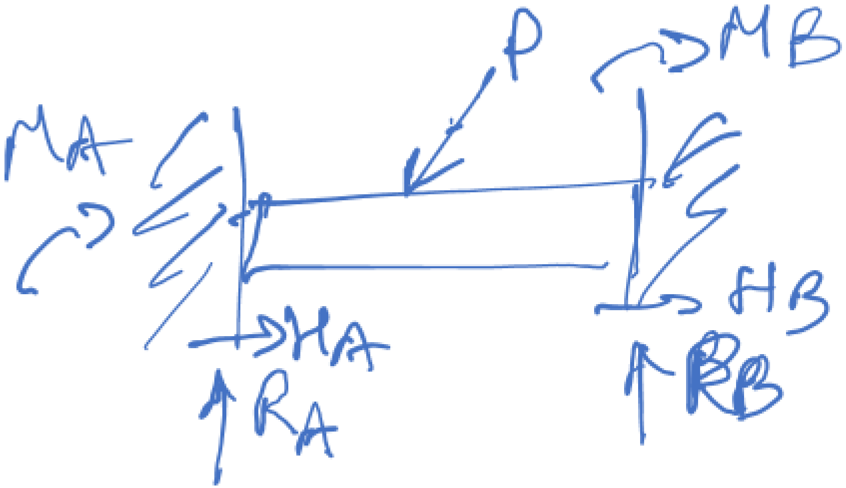
Solution

A. Déterminé

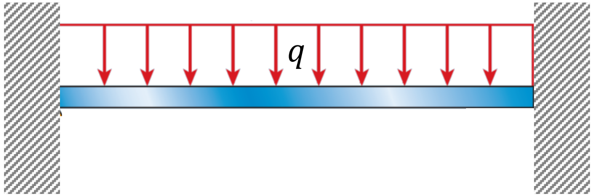
B. Indéterminé. 1 redondant.

C. $\boxed{\text{Indéterminé. 2 redondants.}}$

D. Indéterminé. 3 redondants



6 unknowns



$\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_A = 0$ 3 equations

Quiz session: micro200

Question

Déterminé / Indéterminé? Combien de redondants ?

A. Determiné

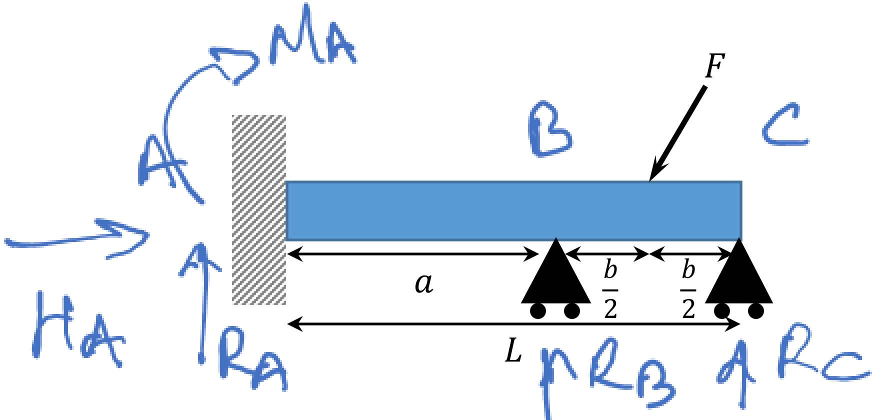
B. Indéterminé. 1 redondant.

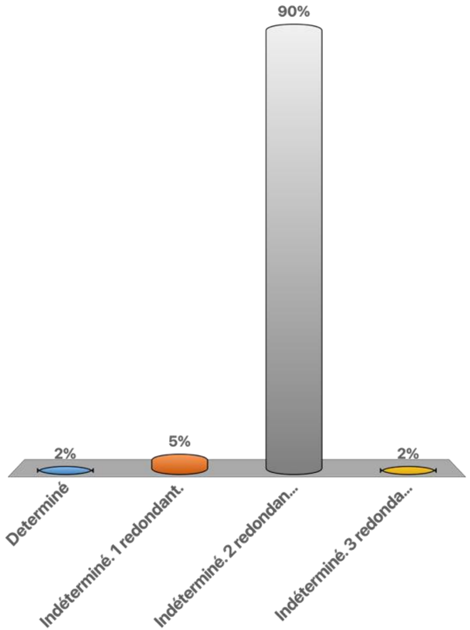
C. Indéterminé. 2 redondants.

D. Indéterminé. 3 redondants.

unknowns = 5

equations = 3



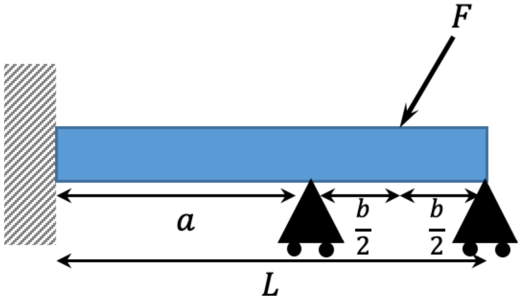


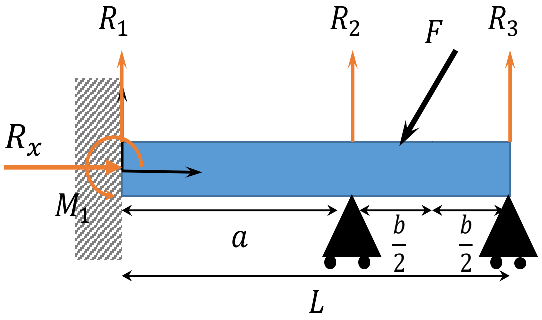
Quiz session: micro200

Solution

Déterminé / Indéterminé? Combien de redondants ?

A. Determiné
B. Indéterminé. 1 redondant.
C. Indéterminé. 2 redondants.
D. Indéterminé. 3 redondants.

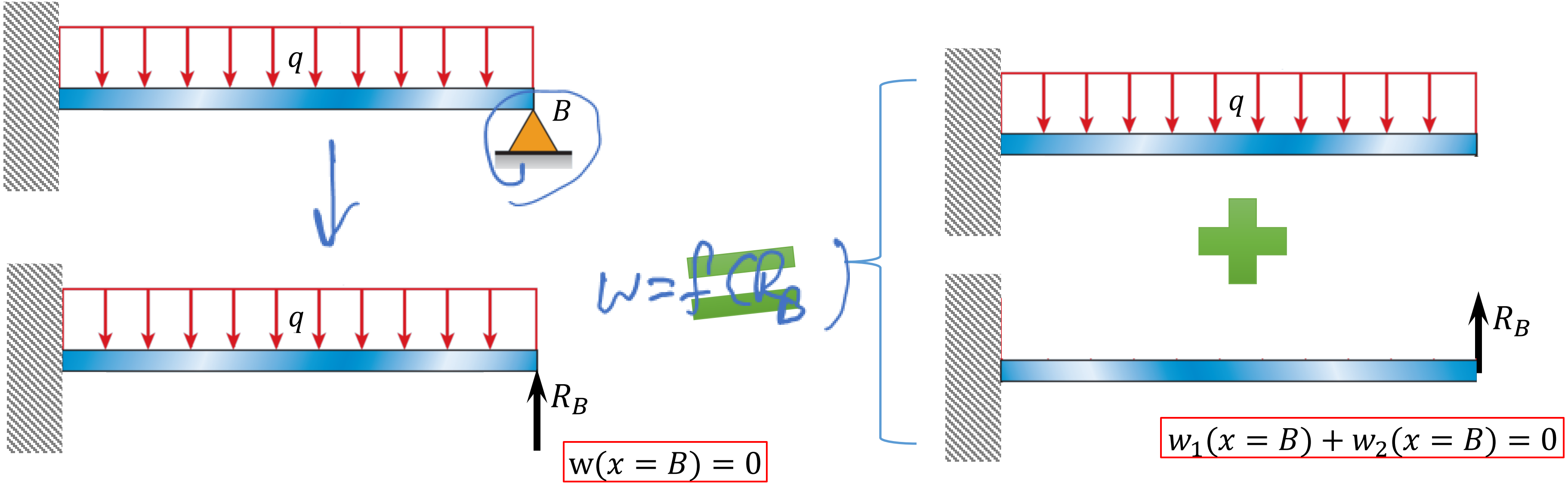




Poutres statiquement indéterminées

Résolution par méthode force-flexibilité = **superposition**

- Résumé de la méthode
  1. décomposer en systèmes additionnels en enlevant les redondants,
  2. calculer la flèche de chaque système,
  3. puis utiliser les équations de compatibilité pour trouver la flèche (et aussi les redondants)



Poutres statiquement indéterminées

Résolution par méthode force-flexibilité = **superposition**

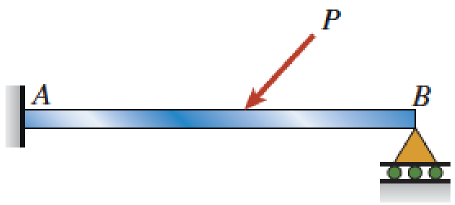
- Nous ajoutons aux équations d'équilibre autant **d'équations de compatibilité** que nous avons des réactions redondantes

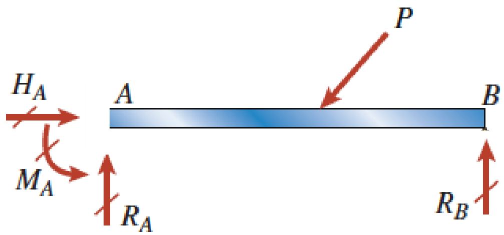
1. Trouver le nombre de redondants = (nombre d'inconnues) - (nombre d'équation de la statique)
2. Choisir les redondants
3. Utiliser les équations d'équilibre ($\sum F = 0, \sum M = 0$) pour exprimer les forces et moments de réaction en fonction des redondants
4. " Libérer la structure " (supprimer les réactions redondantes, ce qui revient à supprimer les supports qui génèrent les réactions redondantes). Ceci nous donnera des systèmes que nous savons résoudre.
5. **Trouver la flèche sans les redondants, mais avec les charges**
6. **Enlever les charges et calculer la flèche due seulement aux redondants** (un à la fois, donc à répéter pour chaque redondant)
7. au point/s où le/s redondants sont appliqués, la somme des flèches des points 5 et 6 doit être nulle (ou une valeur fixe donné par le problème, ou c'est l'angle de la flèche qui a une valeur connue). Ceci permet de déduire les équations de compatibilité (la flèche et l'angle de la flèche, en fonction du problème)
8. Résoudre l'ensemble des équations pour **les forces de réaction redondantes** et autres forces, ainsi **que la flèche.**

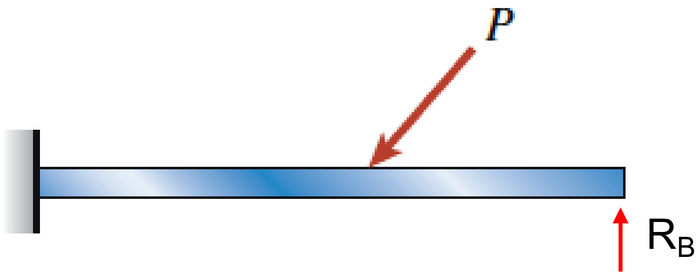
Exemples de “libérer” un poutre

Choisir les redondants puis enlever les supports

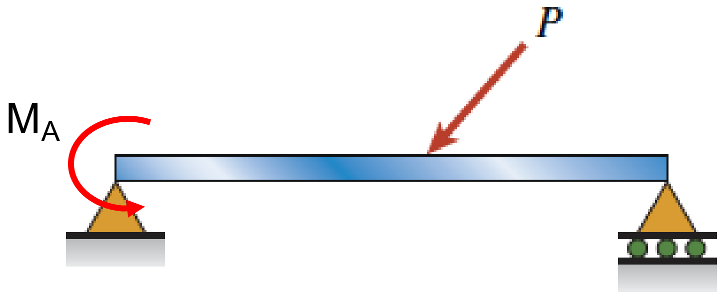
exemple 1: avec 1 seul redondant.







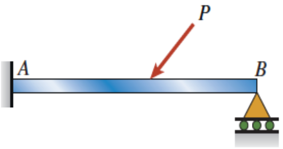
Option 1: poutre libérée avec R_B choisi comme redondant **et** $w(L) = 0$
(réfléchir : qu'est-ce qui cause R_B ?)



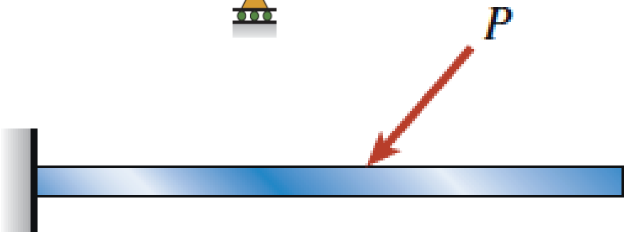
Option 2: poutre libérée avec M_A choisi comme redondant **et** $w'(0) = 0$
(réfléchir : qu'est-ce qui cause M_A ?)

On choisit le redondant, puis on« libère » la poutre pour n'avoir que des cas non-hyperstatiques: ceci implique « changer » les supports

exemple 1: avec 1 redondant.

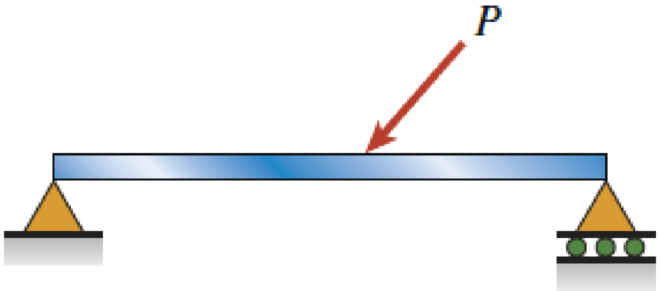


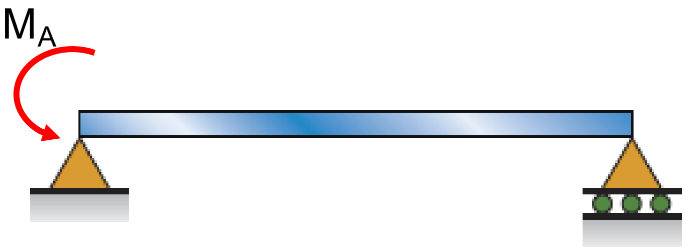
option 1: poutre libérée avec R_B choisie comme redondant



$$w_{total}\,(x = L) = 0$$

OU





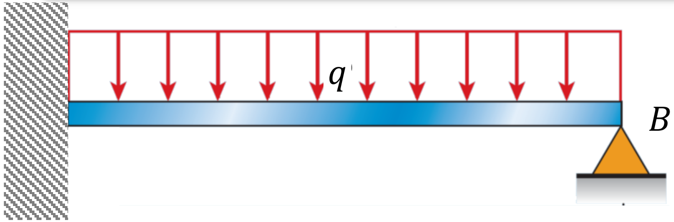
$$w'(x = 0) = 0$$

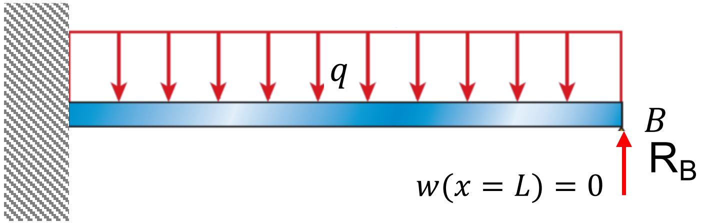
option 2: poutre libérée avec M_A choisi comme redondant

Mais: R_B ou M_A, on ne les connait pas…

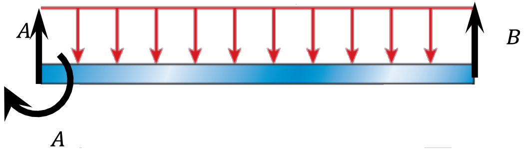
On choisit le redondant, puis on« libère » la poutre pour n'avoir que des cas non-hyperstatiques: ceci implique « changer » les supports

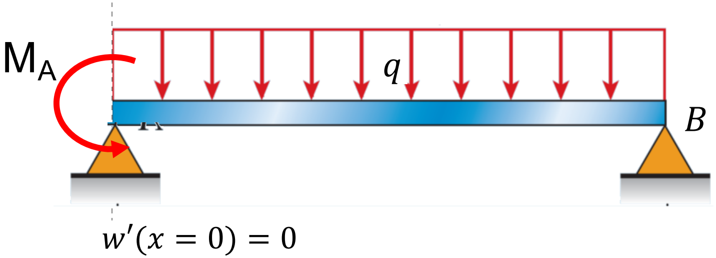
exemple 2: avec 1 seul redondant





Option 1: poutre libérée avec R_B choisie comme redondant





Option 2: poutre libérée avec M_A choisi comme redondant

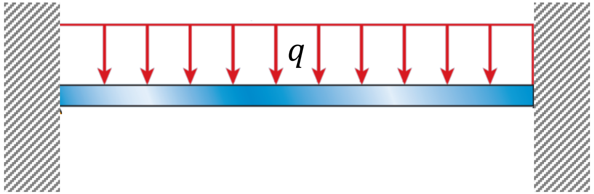
on ne connait pas encore R_B ou M_A

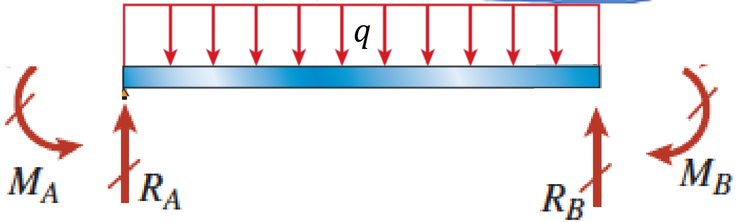
Exemple avec 2 redondants

Ici 4 réactions inconnues (M_A, R_A, R_B, M_B), et 2 eq de la statique ($\sum F_y = 0$ et $\sum M_z = 0$)
Donc 4-2=2 redondants (à choix parmi M_A, R_A, R_B, M_B)

(Ou, si on prend des forces de réaction aussi en x, alors 6 inconnues et 3 eq de la statique, et 3 redondants)

$\sum F_y = 0$, $\sum M_A = 0$





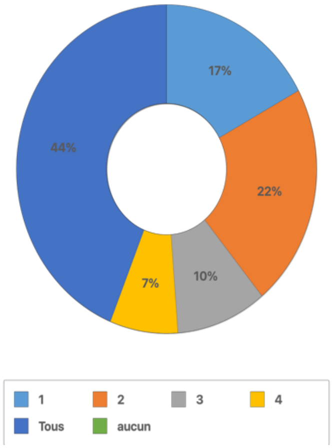
2 eq.
4 inconnues

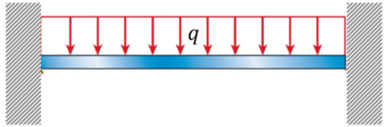
C'est vous qui choisissez les redondants. Vaut mieux prendre ceux qui permettent de facilement enlever des supports. Ici par exemple, R_B et M_B

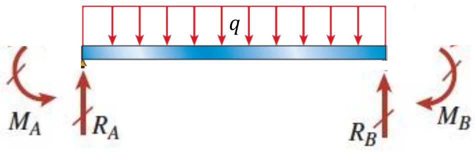
Quiz session: micro200

Question

Quel/quels dessins libèrent correctement la poutre? (enlèvent 2 redondants)

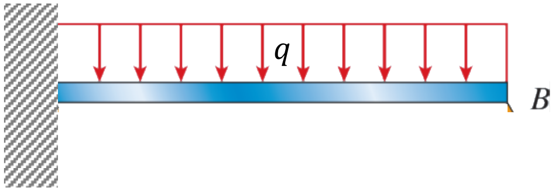


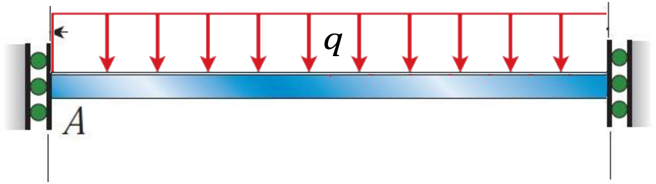




A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. Tous
F. aucun

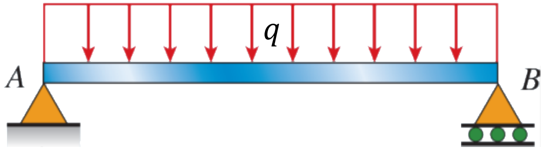
1

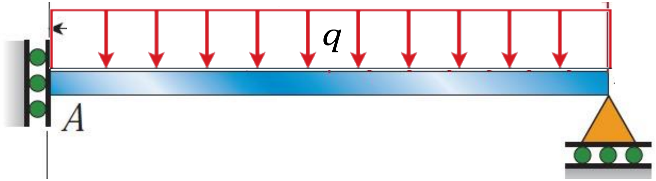




3

2



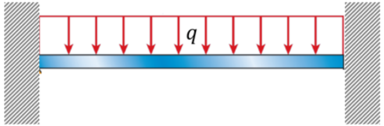


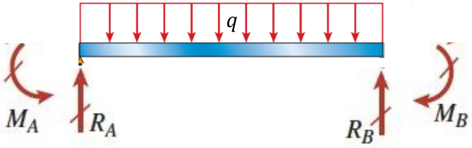
4

Quiz session: micro200

Solution

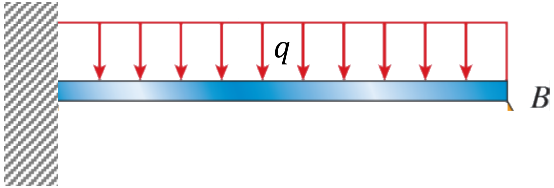
Quel/quels dessins libèrent correctement la poutre? (enlèvent 2 redondants)



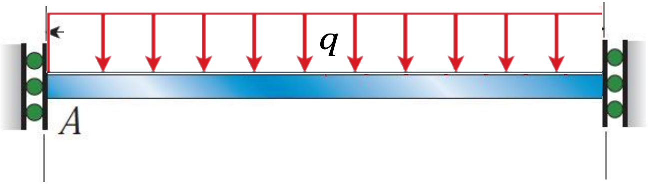


- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- **E. Tous**
- F. aucun

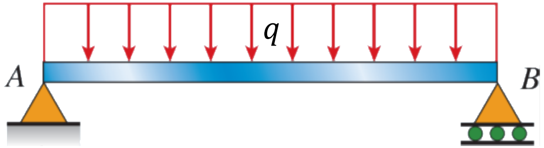
1



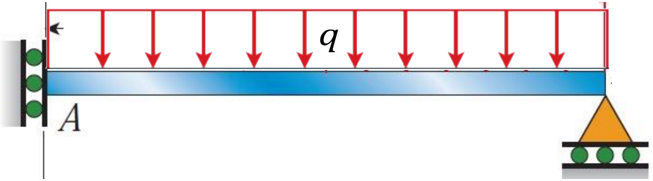
3



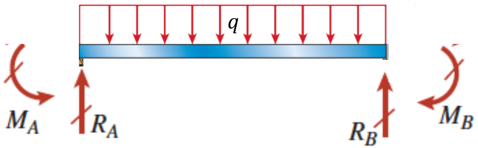
2



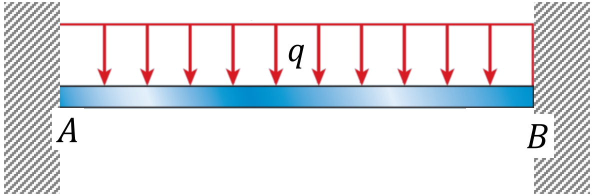
4



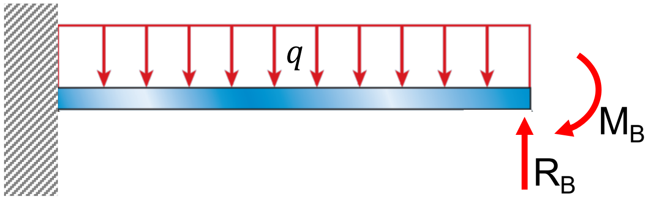
exemple 3: avec 2 redondants



<u>Option 1</u>: je choisis R_B et M_B comme redondants. J'enlève donc l'encastrement en B



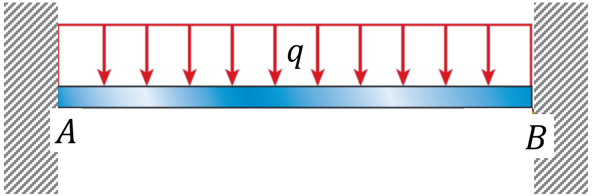
(je ne sais pas résoudre par $\sum F_y = 0$ et $\sum M_z = 0$)



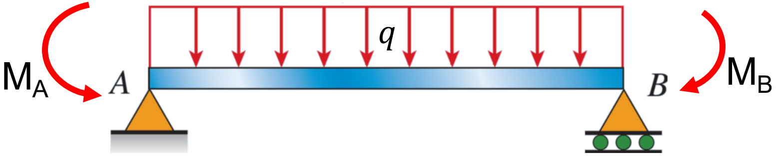
(je sais résoudre par $\sum F_y = 0$ et $\sum M_z = 0$)

Il faudra donc ajouter R_B et M_B "à la main", et je ne les connais pas encore …

<u>Option 2</u>: je choisis M_A et M_B comme redondants. Je remplace les deux encastrements par des pivots



(je ne sais pas résoudre par $\sum F_y = 0$ et $\sum M_z = 0$)



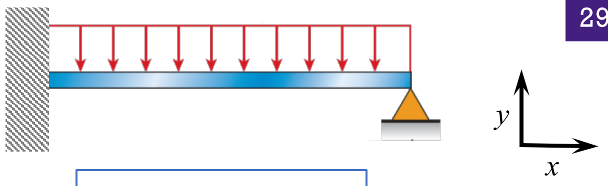
(je sais résoudre par $\sum F_y = 0$ et $\sum M_z = 0$)

Il faudra donc ajouter M_A et M_B "à la main", et en plus je ne les connais pas encore …

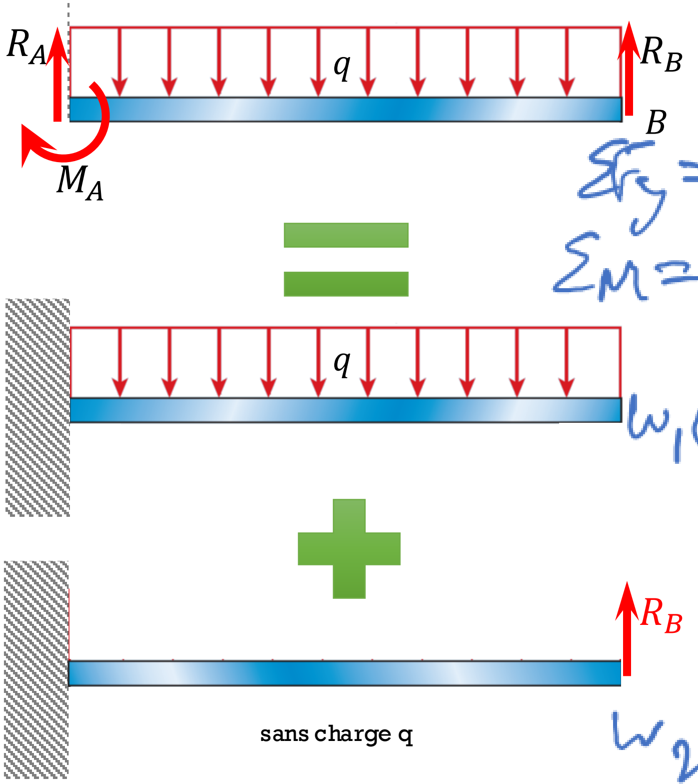
(voir quizz du slide précédent: il y au moins 3 autres possibilités)

Calcul de la flèche d’une poutre statiquement indéterminée

Exemple S1: Calculer la flèche de cette poutre (charge distribuée q).



Choix de R_B comme redondant



$$w(x=A)=0$$
$$w'(x=A)=0$$
$$w(x=B)=0$$
$$R_B = qL - R_A$$
$$M_A = \frac{qL^2}{2} - R_B L$$

Système complet

$\Sigma F_y = 0$

$\Sigma M = 0$

<u>Sans le support redondant</u>, mais <u>avec la charge</u>

$w_1(x)$

$$\underline{w(x) = w_1(x) + w_2(x)}$$

<u>Sans la charge</u>, mais <u>avec une force</u> ou moment <u>pour remplacer un support redondant</u>

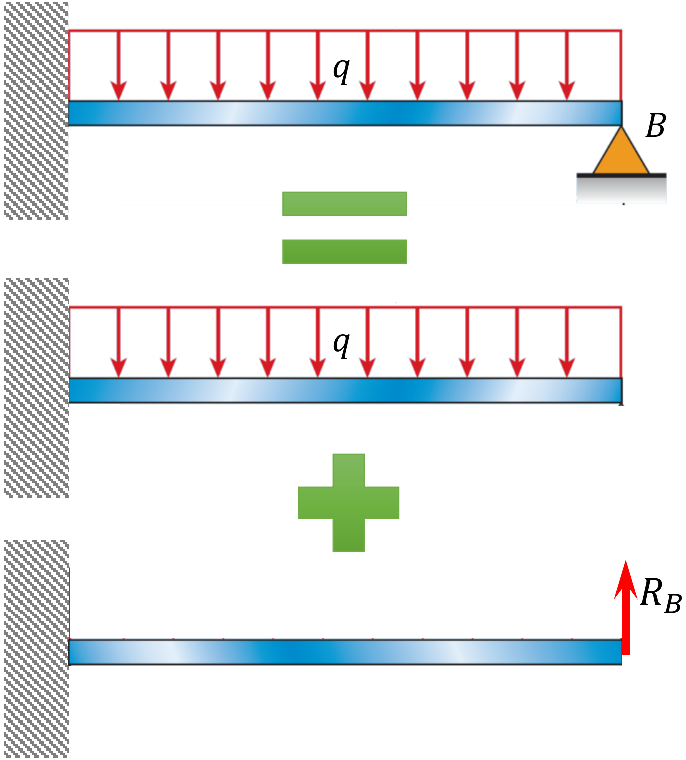
$w_2(x)$

<u>Et</u> Compatibilité au point où supports ont été changés:

$$\boxed{w_1(x=B) + w_2(x=B) = 0}$$

(rappel: R_B est encore une inconnue)

on calcule les flèches avec les “formules utiles” de l’annexe G/H de Gere et Goodno, ou autre recueil de formules de poutres (voir moodle)



$$w_1(x) = -\frac{qL^4}{24EI}\left(6\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4\right)$$

$$w_2(x) = \frac{R_B L^3}{6EI}\left(3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right)$$

$w_2(x)$ dépend de R_B !
Et on ne connait pas encore R_B

$$w(x) = w_1(x) + w_2(x)$$

Equation de compatibilité au point ou le redondant est appliqué. Ici, c'est $w(x = B) = 0$. donc $w_1(x = B) + w_2(x = B) = 0$

$$w_1(x = B) = -\frac{qL^4}{8EI}$$

$$w_2(x = B) = \frac{R_B L^3}{3EI}$$

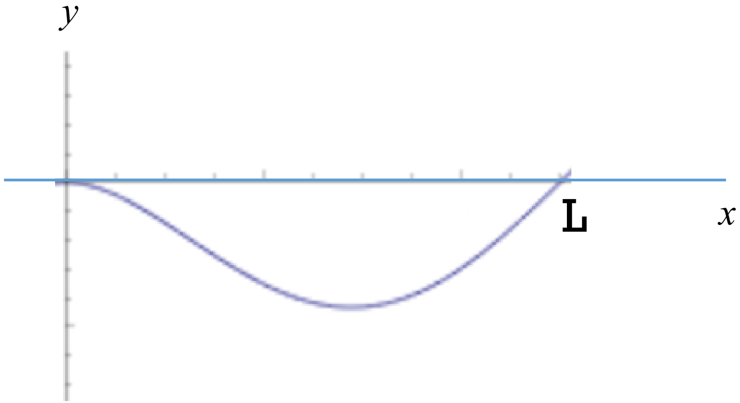
$$w_1(x = B) + w_2(x = B) = 0$$

$$-\frac{qL^4}{8EI} + \frac{R_B L^3}{3EI} = 0$$

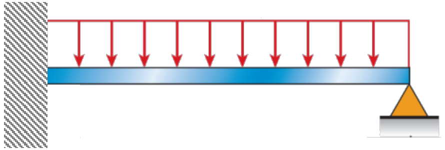
$$\boxed{\rightarrow R_B = \frac{3}{8} qL}$$

$$w(x) = w_1(x) + w_2(x)$$

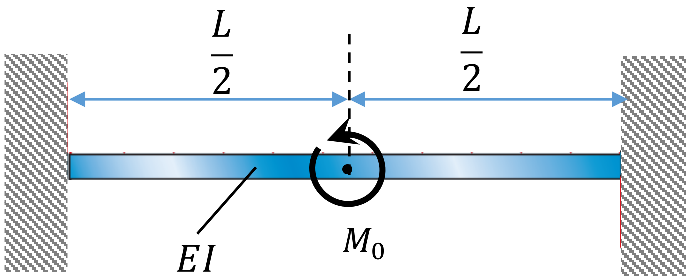
$$w(x) = \frac{qL^4}{8EI}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{5}{6}\left(\frac{x}{L}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{L}\right)^4\right)$$



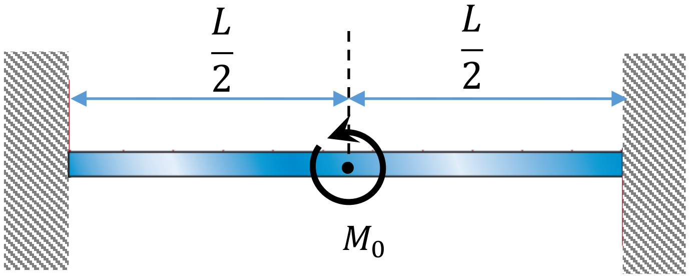
Une fois qu'on connait R_B, on peut aussi trouver R_A et M_A avec les équations de la statique

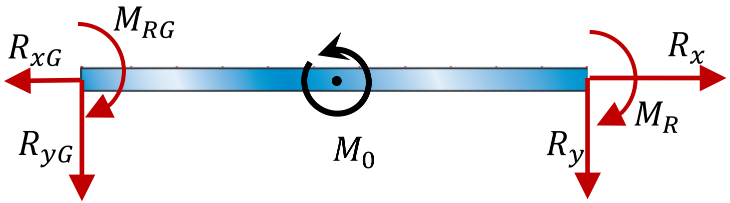


Exemple S2: Calculer la flèche de cette poutre (moment externe M_0).



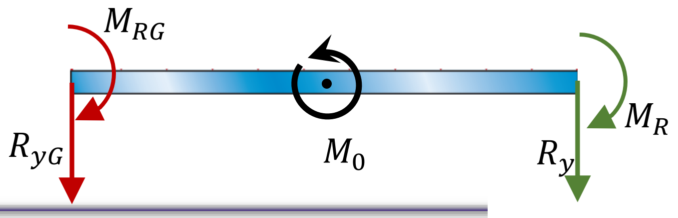
- nous allons:
  1. décomposer en systèmes additionnels en enlevant les redondants,
  2. calculer la flèche de chaque système,
  3. puis utiliser les équations de compatibilité pour trouver la flèche (et les redondants)

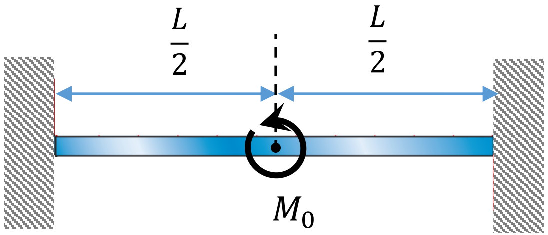


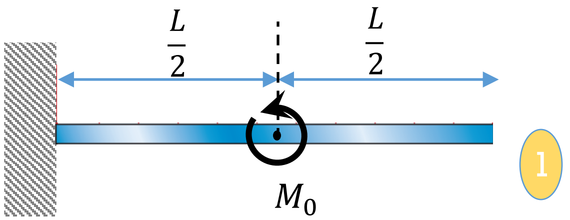


- Nombre de redondants: 3 si on considère x
- hypothèse de $R_x = 0$ car pas de force axiale.
- 2 redondants à trouver (**je choisis M_R et R_y**)
- il nous faudra 2 eq. de compatibilité au point où nous enlevons les redondants

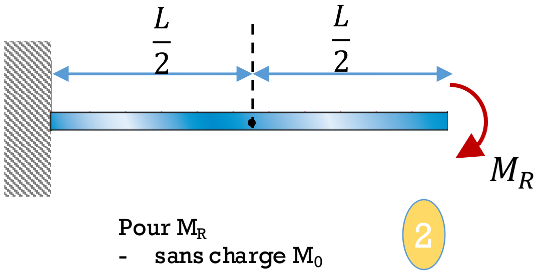
Solution (superposition en 3 systèmes)



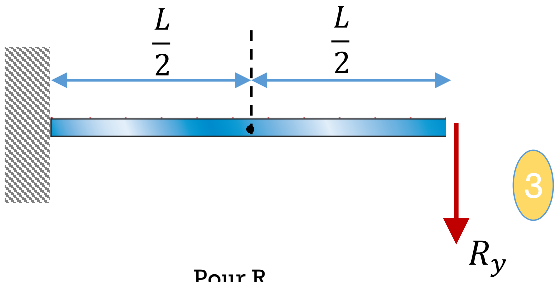




avec charge M_0, sans les deux redondants M_R et R_y (donc sans le mur)



Pour M_R
- sans charge M_0
- Sans redondant R_y

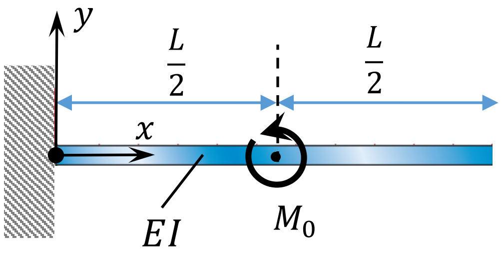


Pour R_y
- sans charge M_0
- Sans redondant M_R

+ 2 eq de compatibilité

Solution (partie 1)

1



$$M_z(x) = \begin{cases} M_0; & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 0; & x \geq \frac{L}{2} \end{cases}$$

$$w_1'(x) = \begin{cases} \frac{M_0}{EI}x & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{M_0 L}{2EI} & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

$$w_1(x) = \begin{cases} \frac{M_0}{2EI}x^2 & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{M_0 L}{2EI}\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{M_0 L^2}{8EI} & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

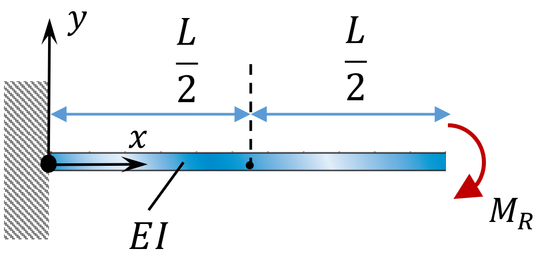
$$w'_1(L) = \frac{M_0 L}{2EI}$$

$$w_1(L) = \frac{3M_0 L^2}{8EI}$$

Pour trouver les constantes d'intégration, nous avons utilisé $w_1(x=0) = 0$ et $w'_1(x=0) = 0$
Et aussi continuité de $w'_1(x = L/2)$ et de $w_1(x = L/2)$

Solution (partie 2)

2



$$M_z(x) = -M_R$$ Sur toute la poutre

$$w_2'(x) = -\frac{M_R}{EI}x$$

$$w_2(x) = -\frac{M_R}{2EI}x^2 \qquad 0 \leq x \leq L$$

$$w'_2(L) = -\frac{M_R L}{EI}$$

$$w_2(L) = -\frac{M_R L^2}{2EI}$$

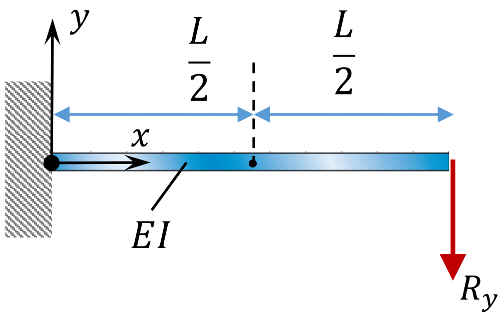
$w_2 = f(M_R)$

Attention: nous ne connaissons pas encore M_R

Pour trouver les constantes d'intégration, nous avons utilisé $w_2(x=0) = 0$ et $w'_2(x=0) = 0$

Solution (partie 3)

3



$$M_z(x) = -R_y(L-x)$$ Sur toute la poutre

$$w_3'(x) = -\frac{R_yL^2}{2EI}\left(2\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right)$$

$$w_3\ (x) = -\frac{R_yL^3}{6EI}\left(3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right) \qquad 0 \le x \le L$$

$$w'_3(L) = -\frac{R_yL^2}{2EI}$$

$$w_3(L) = -\frac{R_yL^3}{3EI}$$

$w_3 = f(R_y)$

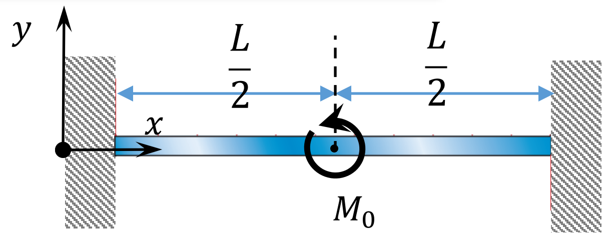
Attention: nous ne connaissons pas encore R_y

Pour trouver les constantes d'intégration, nous avons utilisé que $w_3(x=0) = 0$ et $w'_3(x=0) = 0$

Solution (Équations de Compatibilité pour trouver R_y et M_R)

2 équations de compatibilité au point où nous avons enlevé les redondants:
flèche en $x = L$ et angle en $x = L$
(car poutre encastrée en $x = L$)

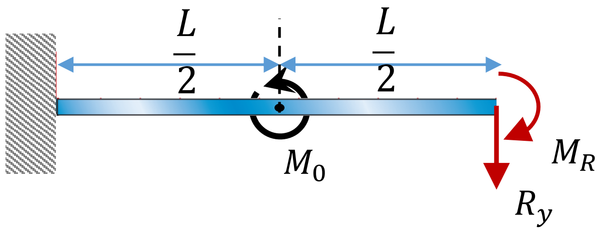
$$\boxed{\begin{aligned} w_1'(L) + w_2'(L) + w_3'(L) &= 0 \\ w_1(L) + w_2(L) + w_3(L) &= 0 \end{aligned}}$$



$\sum w'(L) = 0$ $\qquad M_0 - 2M_R - R_y L = 0$

$\sum w(L) = 0$ $\qquad 3M_0 - 4M_R - \frac{8L}{3} R_y = 0$

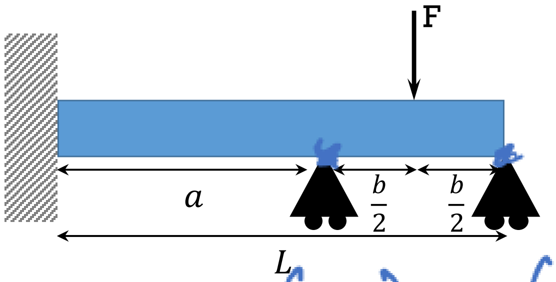
$$\boxed{M_R = -\frac{M_0}{4}} \qquad \boxed{R_y = \frac{3M_0}{2L}}$$



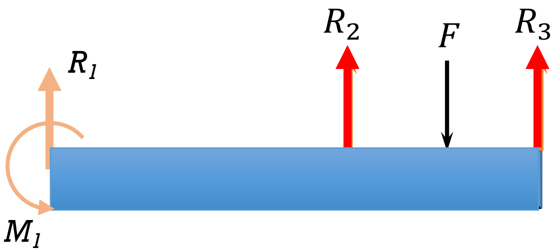
$$\boxed{w(x) = w_1(x) + w_2(x) + w_3(x) = \begin{cases} \dfrac{M_0 L^2}{8EI}\left(2\left(\dfrac{x}{L}\right)^3 - \left(\dfrac{x}{L}\right)^2\right); & 0 \le x \le \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{M_0 L^2}{8EI}\left(-1 + 4\left(\dfrac{x}{L}\right) - 5\left(\dfrac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\dfrac{x}{L}\right)^3\right); & \dfrac{L}{2} \le x \le L \end{cases}}$$

Exemple S3

Calculer la déflection d'une Poutre avec 3 supports



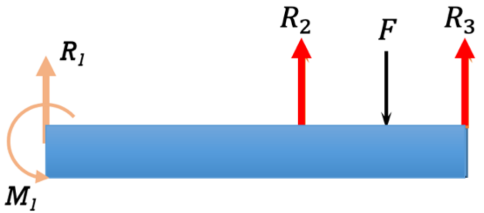
$v(xa) = v(x = L) = 0$

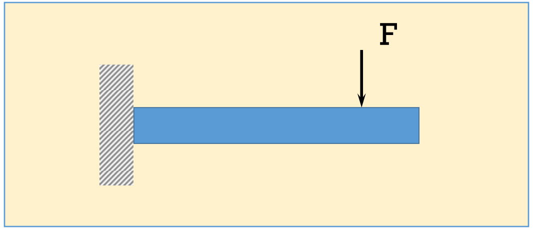


- 2 redondants
- Je choisis R_2 et R_3
- Il faudra donc des équations de compatibilité aux 2 supports que je vais enlever
  - $w(x = a) = 0$
  - $w(x = L) = 0$

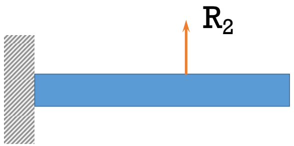
Exemple S3

Calculer la déflection d’une poutre avec 3 supports





avec charge F, sans les deux redondants R_2 et R_3



Pour R_2
- sans charge F
- Sans redondant R_3

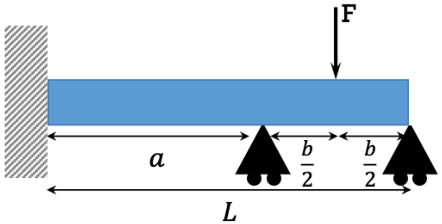
Pour R_3
- sans charge F
- Sans redondant R_4

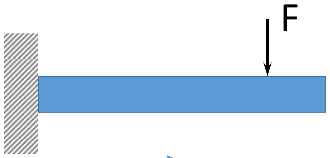
- Nous avons enlevé les supports « gênants » (2 redondants, R_2 et R_3) et divisé le problème en trois poutres encastrées avec des forces ponctuelles:

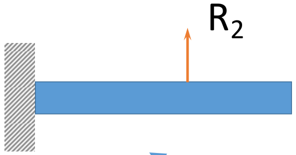
1. Nous utilisons les formules des poutres encastrées (annexe G/H de Gere et Goodno) pour calculer la flèche
2. Nous ne connaissons pas nos redondants R_2 et R_3
3. Flèche = somme des flèches des 3 poutres
4. Nous appliquons des conditions de compatibilité aux supports que nous avons « enlevés » pour trouver R_2 et R_3

Pour chaque poutre, nous avons $w\,(x = 0) = 0$ et $w'(x = 0) = 0$ car dans tous les 3 cas la poutre encastrée en $x = 0$

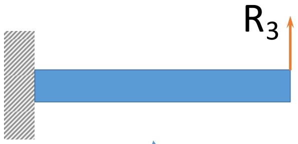
Exemple S3







Rappel: nous ne connaissons pas encore R_3



$$w_3(x) = \frac{R_3 x^2}{6EI}(3L - x) \qquad 0 \le x \le L$$

Rappel: nous ne connaissons pas encore R_2

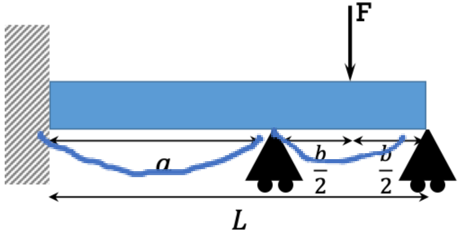
$$w_1(x) = \begin{cases} \dfrac{-F}{6EI} x^2 \left(3\left(a + \dfrac{b}{2}\right) - x\right) & x \le a + \dfrac{b}{2} \\ \dfrac{-F}{6EI}\left(a + \dfrac{b}{2}\right)^2 \left(3x - \left(a + \dfrac{b}{2}\right)\right) & a + \dfrac{b}{2} \le x \le L \end{cases}$$

$$w_2(x) = \begin{cases} \dfrac{R_2}{6EI} x^2(3a - x) & x \le a \\ \dfrac{R_2}{6EI} a^2(3x - a) & a \le x \le L \end{cases}$$

$$\boxed{w_{Total}(x) = w_1(x) + w_2(x) + w_3(x)}$$

Exemple S3

conditions de compatibilité (pour R_2 et R_3)



Les **conditions de compatibilité aux deux supports « enlevés » :**

La flèche est 0 en $x = a$ et en $x = L$. Nous n'avons pas de conditions sur $w'(a)$ ou $w'(L)$

$$w_{Total}(\boldsymbol{x = a}) = 0 = w_1(a) + w_2(a) + w_3(a)$$

$$0 = \frac{R_2}{3EI}a^3 - \frac{F}{6EI}a^2\left(2a + \frac{3b}{2}\right) + \frac{R_3 a^2}{6EI}(3L - a)$$

$$\rightarrow R_2 = F\left(1 + \frac{3b}{4a}\right) - R_3\left(1 + \frac{3b}{2a}\right)$$

$$w_{Total}(\boldsymbol{x = L}) = 0 = w_1(L) + w_2(L) + w_3(L)$$

$$0 = \frac{R_2}{6EI}a^2(3L - a) - \frac{F}{6EI}\left(a + \frac{b}{2}\right)^2\left(2a + \frac{5b}{2}\right) + \frac{R_3 L^3}{3EI} \rightarrow$$

$$\boxed{R_3 = \frac{6a + 5b}{4(3a + 4b)}F} \qquad \boxed{R_2 = \frac{12a^2 + 22ab + 9b^2}{8a(3a + 4b)}F}$$

Avec les résultats du slide précédent, nous pouvons alors écrire $w(x)$ pour cette poutre…

Semaine 9b – partie 2
Objectifs d'apprentissage

- Savoir appliquer la méthode des poutres indéterminées aux cas où un support est ***élastique***

- Trouver la flèche de poutres avec des supports élastiques

$F = -K \cdot y$

Poutres avec Supports élastiques

Supports élastiques

https://vsl.com/home/technologies/bearings/

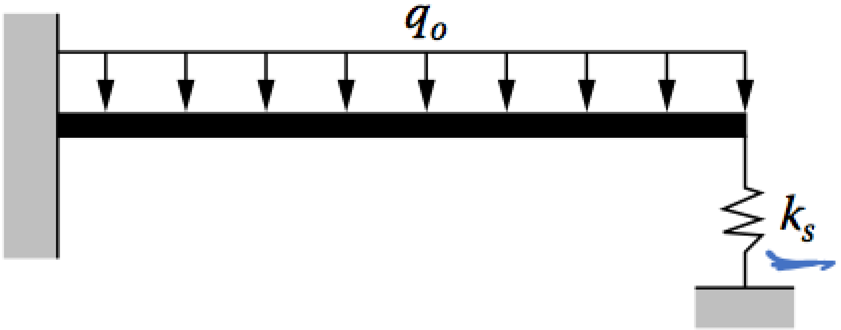
Supports élastiques

https://www.youtube.com/watch?v=lyJcR9chLSQ

Nano-indenter

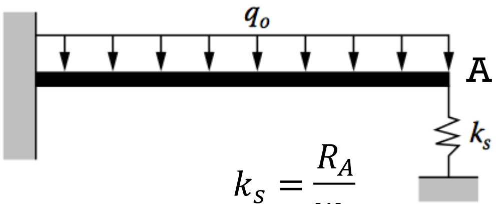
Poutre avec des supports élastiques

- Les supports ne sont pas parfaitement rigides.
  - Structure : les câbles de suspension sont élastiques, la poutre repose sur une structure en bois qui peut être comprimée, etc…
  - Fonctionnel : Utilisation de poutres pour mesurer des propriétés mécaniques (par exemple nano-indentation)
- Dans ces cas, il faut examiner la relation entre la force de réaction et le déplacement.



4 types de supports élastiques

Ressort



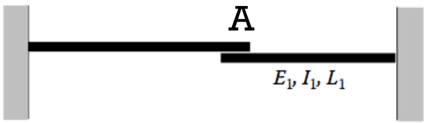
$$k_s = \frac{R_A}{w_A}$$

câble

$$k_{cable} = \frac{E_2 A_2}{L_2} = \frac{R_A}{w_A}$$

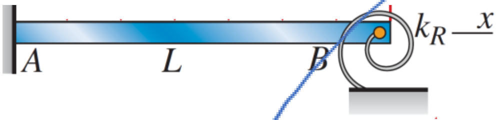
réaction
moment
?

Poutres



$$k_{cant} = \frac{3E_1 I_1}{L_1^3} = \frac{R_A}{w_A}$$

Ressort spirale



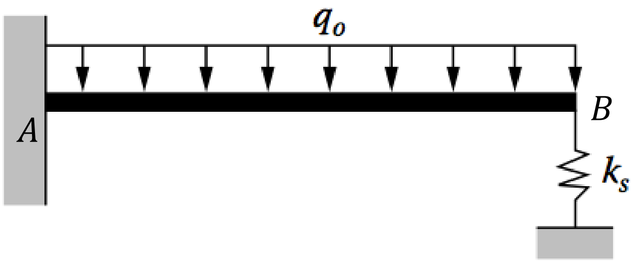
$$k_R = M_s / w'(L)$$

Poutres avec des supports élastiques

Ce sont tous des cas indéterminés!

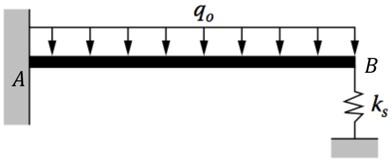
- Nous allons donc appliquer le principe de superposition, comme précédemment dans ce chapitre. Nous traiterons la force élastique comme un redondant.
- étapes (méthode):
  a. Trouver la **flèche** **<u>sans la force de réaction du support élastique</u>**
  b. Trouver la **flèche** **<u>sans la charge</u>, mais avec la force de réaction du support élastique**
  c. Calculer la **déflection au support élastique (en fonction de la force de réaction)**
  d. Appliquer la **condition de compatibilité** aux supports élastiques (attention, ici les flèches ne seront pas zéro): Nous utilisons $\boldsymbol{F = \pm kx}$ pour trouver force de réaction et puis la flèche de la poutre

$$w(L) = w_{charge}(L) + w_{support}(L) = \frac{R_{Support}}{k_{support}}$$

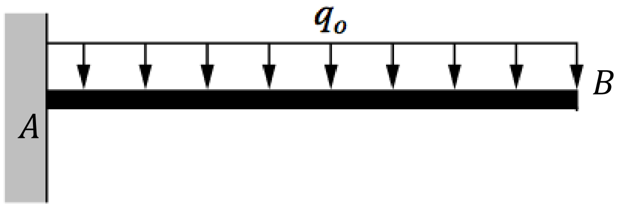


Exemple E1

Trouver la flèche de la poutre et la force du ressort



1.- **Enlever le support élastique et trouver $w(x)$ due à q_0**

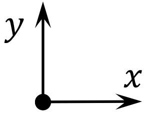


$$w_{q_0}(x) = -\frac{q_0 L^4}{24EI}\left(6\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4\right)$$

2.- **Appliquer uniquement la force provenant du support élastique (pas de charge) et calculer $w(x)$.**

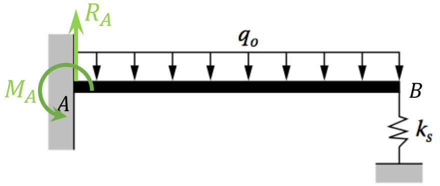
Attention, $F_{ressort}$ est encore inconnue!

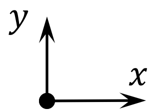
$$w_{ressort}(x) = \frac{F_{ressort} L^3}{6EI}\left(3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right)$$



Exemple E1

Support élastique, ressort





3.- Sommer les deux flèches

$$w_{Total}(x) = w_{q_0}(x) + w_{ressort}(x) =$$

$$\frac{L^3}{6EI}\left(-\frac{q_0 L}{4}\left(6\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4\right) + F_{ressort}\left(3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right)\right)$$

4.- Appliquer la condition de compatibilité pour trouver $F_{ressort}$

$$F_{ressort} = -k_s\, w_{Total}(L)$$

$$\mathrm{F}_{ressort} = -k_s \frac{L^3}{6EI}\left(-\frac{3q_0 L}{4} + 2F_{ressort}\right) \rightarrow \qquad F_{ressort} = \frac{q_0 L^4 k_s}{8EI\left(1 + \frac{k_s L^3}{3EI}\right)}$$

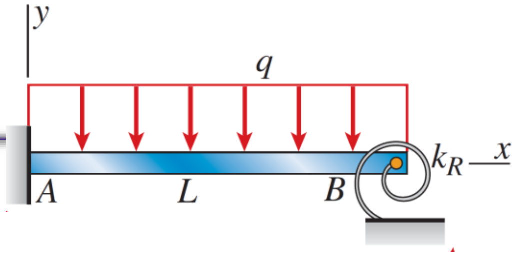
5. **Une fois la force $F_{ressort}$ connue, nous pouvons donner l'expression complète pour $w(x)$ et aussi calculer les réactions en A**

$$R_A = q_0 L - F_s \qquad M_A = \frac{q_0 L^2}{2} - F_s L$$

$\Sigma F_s = 0$ $\qquad$ $\Sigma M = 0$

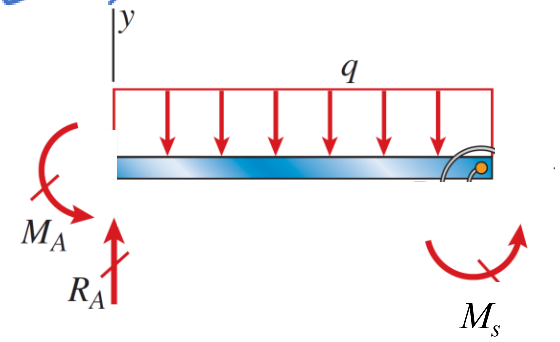
Exemple E2

Support élastique, ressort en spirale (génère un moment)



- but: Calculer flèche et réactions.
- Le ressort génère un moment M_s sur la poutre:
  $M_S = -k_R \cdot \theta_B = -k_R \cdot w'(L)$

$\theta_B = w_L'(L)$



  - 1.- Calculer la flèche $w_q(x)$ sans le support élastique
  - 2.- Calculer la flèche $w_s(x)$ du au ressort, mais sans la charge
  - 3.- Sommer les deux flèches
  - 4- Appliquer la condition de compatibilité en B

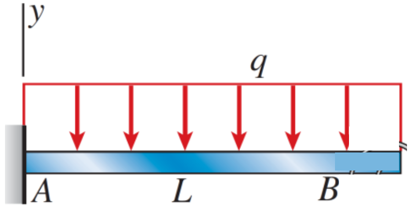
$$\boldsymbol{M_s = -k_R \cdot w'_{Total}(L)}$$

Exemple E2

Support élastique, ressort en spirale

- 1.- Calculer la flèche $w_q(x)$ sans le support élastique

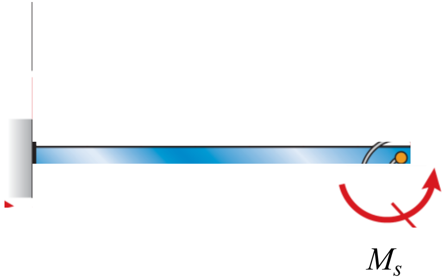
$$w_q(x) = -\frac{qL^4}{24EI}\left(6\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4\right)$$



- 2.- Calculer la flèche $w_s(x)$ du au ressort (moment M_S appliqué à l'extrémité de la poutre), sans la charge q

$$w_s(x) = \frac{M_s\, x^2}{2EI}$$

(mais nous ne connaissons pas M_s)



3.Sommer les deux flèches, ce qui donne $w(x)$

$$w_{Total}(x) = w_q(x) + w_s(x) = -\frac{q_0L^4}{24EI}\left(6\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4\right) + \frac{M_sx^2}{2EI}$$

Example E2

ressort en spirale

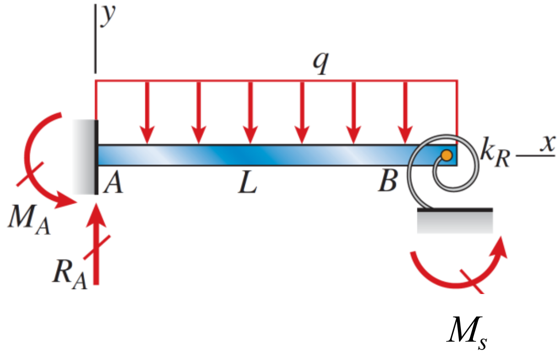
$$w_{Total}(x) = -\frac{q_0 L^4}{24EI}\left(6\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4\right) + \frac{M_s x^2}{2EI}$$

$$w'_{Total}(x) = -\frac{q_0 L^4}{24EI}\left(12x/L^2 - 12x^2/L^3 + 4x^3/L^4\right) + \frac{M_s x}{EI}$$

- 4.- Appliquer la condition de compatibilité en B

$$\boldsymbol{M_s = -k_R \cdot w'_{Total}(L)} = -k_R\left(-\frac{q_0 L^3}{6EI} + \frac{M_s L}{EI}\right)$$

$$\rightarrow M_s = \frac{k_R q_0 L^3}{6EI\left(1 + \frac{k_R L}{EI}\right)}$$



- et donc nous avons une expression pour $w_{total}(x)$

$$\boxed{w_{Total}(x) = -\frac{q_0 L^4}{24EI}\left(6\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4\right) + \frac{k_R q_0 L^3}{6EI\left(1 + \frac{k_R L}{EI}\right)}\frac{x^2}{2EI}}$$