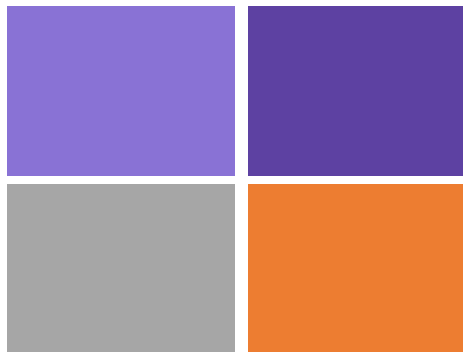


Semaine 9b

Poutres statiquement indéterminées



PARTIE 1: (slide 3-39)

Poutres statiquement indéterminées

(Chapitre 10 de Gere et Goodno)

PARTIE 2: (slide 40 - 52)

poutres avec supports élastiques

PROGRAMME DU COURS, semaines 6-10

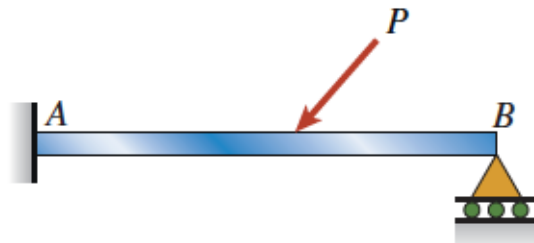
6	14.10	Forces internes dans les poutres non-déformées	x	
6	16.10	$\varepsilon(y)$ et $\sigma(y)$ en flexion pure. Moment d'inertie	x	Série 6
7	28.10	Poutres chargées axialement. Poutres composites	x	Série 6
7	30.10	Quiz + Session questions & réponses D. Briand		Série 1-5
8	04.11	Examen mi-semester D. Briand		
8	06.11	Flèches des poutres	x	Série 7
9	11.11	Flèche pour guidage flexible	x	Série 8
9	13.11	Poutres statiquement indéterminées	x	Série 8
10	18.11	Poutres statiquement indéterminées. Flambage	x	Séries 9
10	20.11	Flambage	x	Série 10

Semaine 9b –partie 1 (slides 4-39)

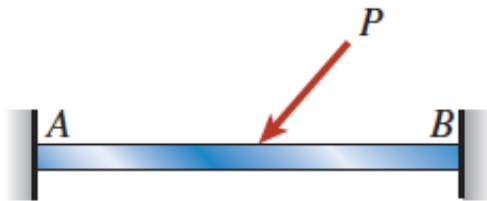
Objectifs d'apprentissage

- Identifier si un système est statiquement indéterminé
- Identifier les redondants
- «Libérer» les poutres
- Utiliser la superposition pour trouver la flèche de poutres statiquement indéterminées

Poutres statiquement indéterminées

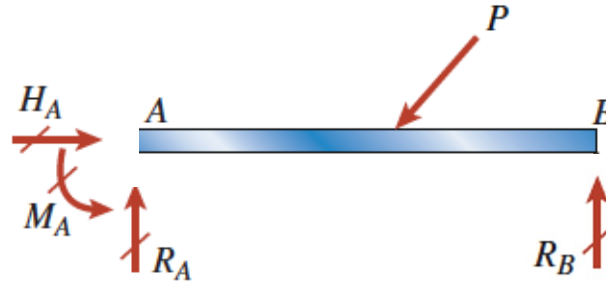
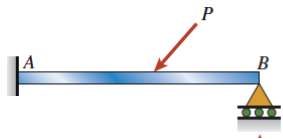


4 inconnues
mais 3 équations...

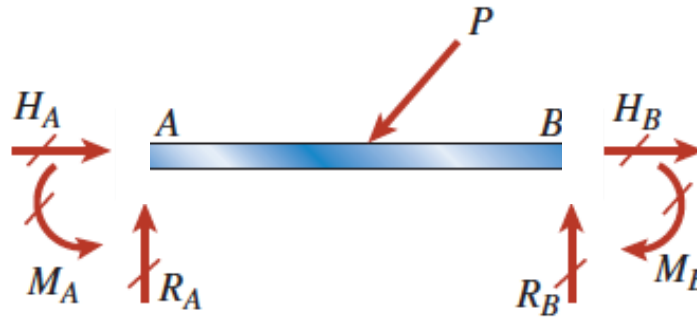
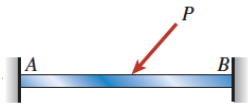


6 inconnues
mais 3 équations...

Poutres statiquement indéterminées

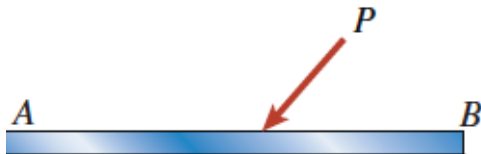


4 inconnues
mais 3 équations...



6 inconnues
mais 3 équations...

Poutres statiquement indéterminées

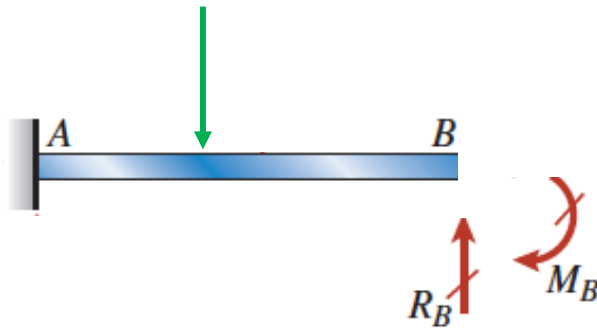
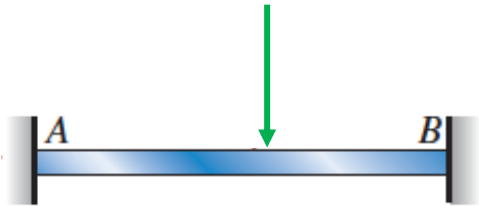


4 inconnues
mais 3 équations...



6 inconnues
mais 3 équations...

Aperçu de la Méthode de ce chapitre



0. J'enlève l'encastrement qui me gêne, et le remplace par une force R_B et un moment M_B (que je ne connais pas encore)

1. Je sais résoudre $w(x)$ par superposition, mais seulement en fonction de R_B et M_B (que je ne connais pas encore)

2. Je peux trouver R_B et M_B avec les conditions de compatibilité au support enlevé: $w(x = L) = 0$ et $w'(x = L) = 0$

3. Je connais donc $w(x)$

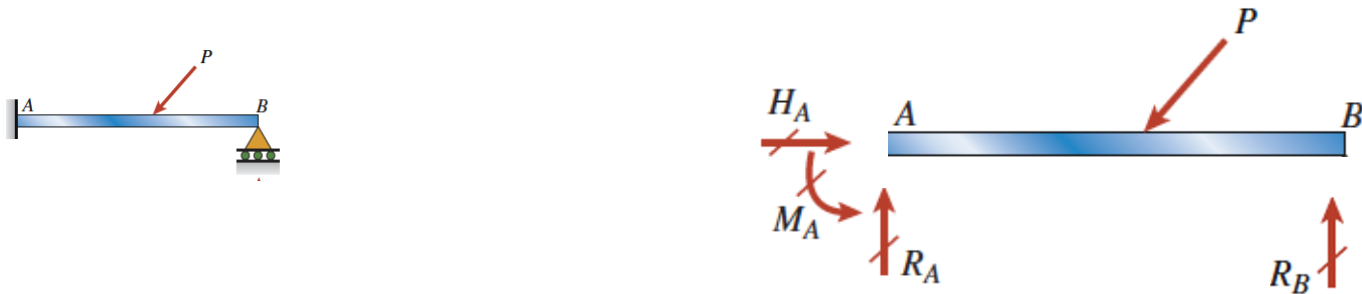
Les redondants

Exemple 1: avec 1 seul redondant

de redondants = (nombre d'inconnus) - (nombre d'équation de la statique)

ici 4 réactions inconnues (M_A, R_A, R_B, H_A), et 3 equ. de la statique ($\sum F_x = 0$ et $\sum F_y = 0$ et $\sum M_z = 0$)

Donc $4-3=1$ redondant (à choix parmi M_A, R_A, R_B, H_A)



- C'est **vous** qui choisissez le/les redondants parmi les forces et moments inconnus
- Il vaut mieux prendre ceux qui permettront de facilement « enlever » des supports.
Ici par exemple, R_B ou M_A

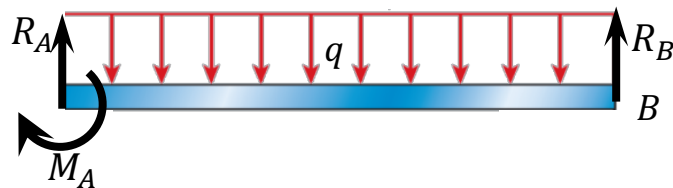
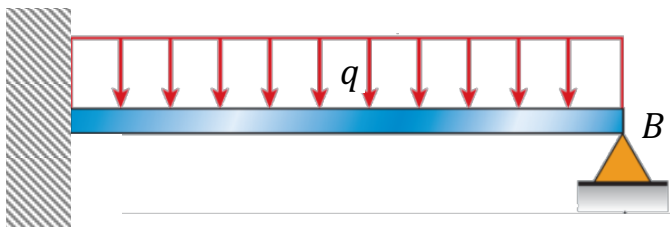
Les redondants

Exemple 2: avec 1 seul redondant

de redondants = (nombre d'inconnues) - (nombre d'équation de la statique)

ici 3 réactions inconnues (M_A, R_A, R_B), et 2 eq de la statique ($\sum F_y = 0$ et $\sum M_z = 0$)

Donc 1 **redondant** (à choix parmi M_A, R_A, R_B)



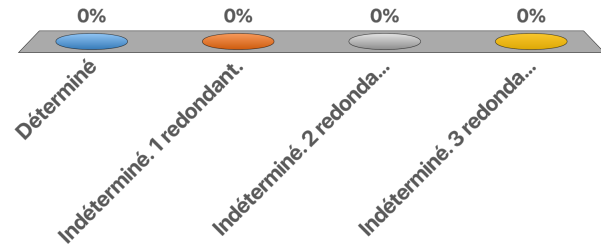
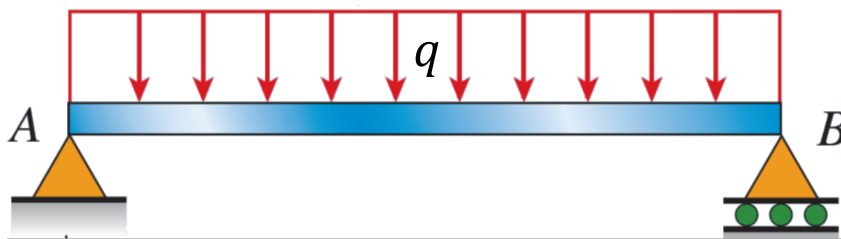
On a simplifié le problème, car pas de forces en x

C'est vous qui choisissez le/les redondants. Vaut mieux prendre ceux qui permettent de facilement enlever des supports. Ici par exemple, R_B ou M_A

Déterminé/Indéterminé? Combien de redondants ?

Question

- A. Déterminé
- B. Indéterminé. 1 redondant.
- C. Indéterminé. 2 redondants.
- D. Indéterminé. 3 redondants

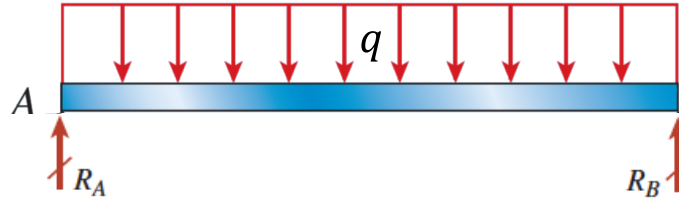


Quiz session: micro200

Solution

Déterminé/Indéterminé?

Combien de redondants ?



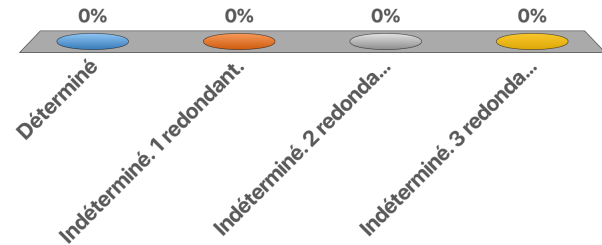
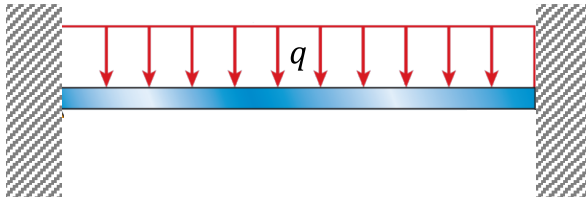
2 eq.
2 inconnue

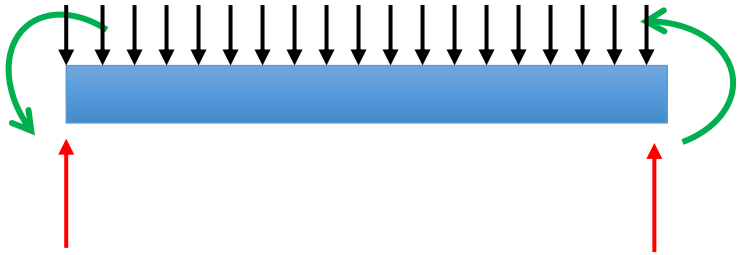
Pareil si on a un R_x en \bar{A} ,

Déterminé / Indéterminé? Combien de redondants ?

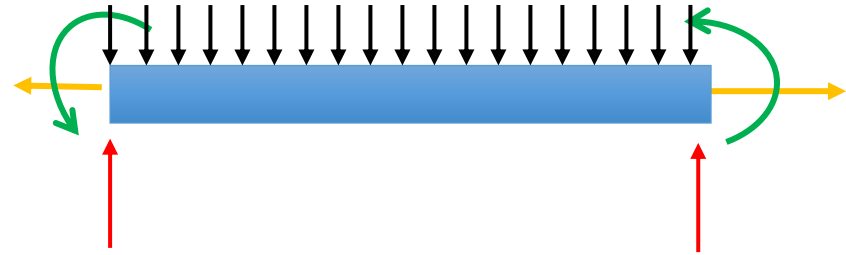
Question

- A. Déterminé
- B. Indéterminé. 1 redondant.
- C. Indéterminé. 2 redondants.
- D. Indéterminé. 3 redondants

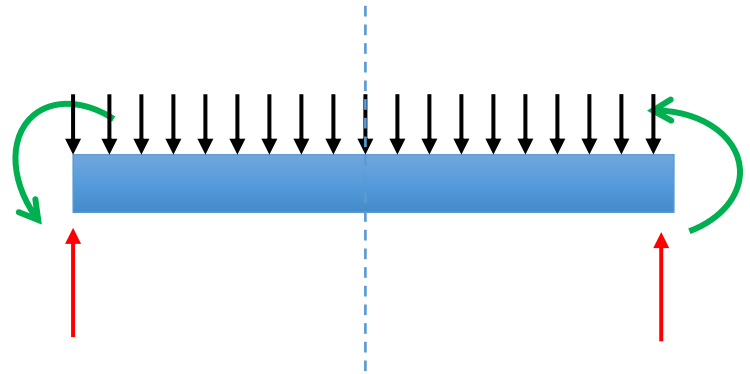




4 inconnus, 2 eqs = 2 redondants.



6 inconn, 3 eqs = 3 redondants.



Ou symétrie, et 0 redondants...

Quiz session: micro200

Solution

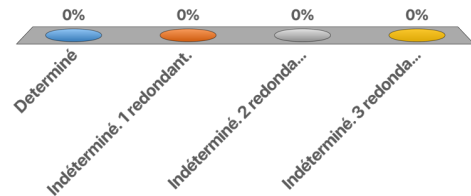
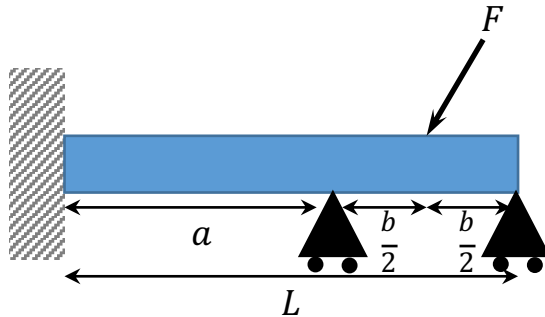
Déterminé / Indéterminé?

Combien de redondants ?

Question

**Déterminé / Indéterminé?
Combien de redondants ?**

- A. Déterminé
- B. Indéterminé. 1 redondant.
- C. Indéterminé. 2 redondants.
- D. Indéterminé. 3 redondants.



Solution

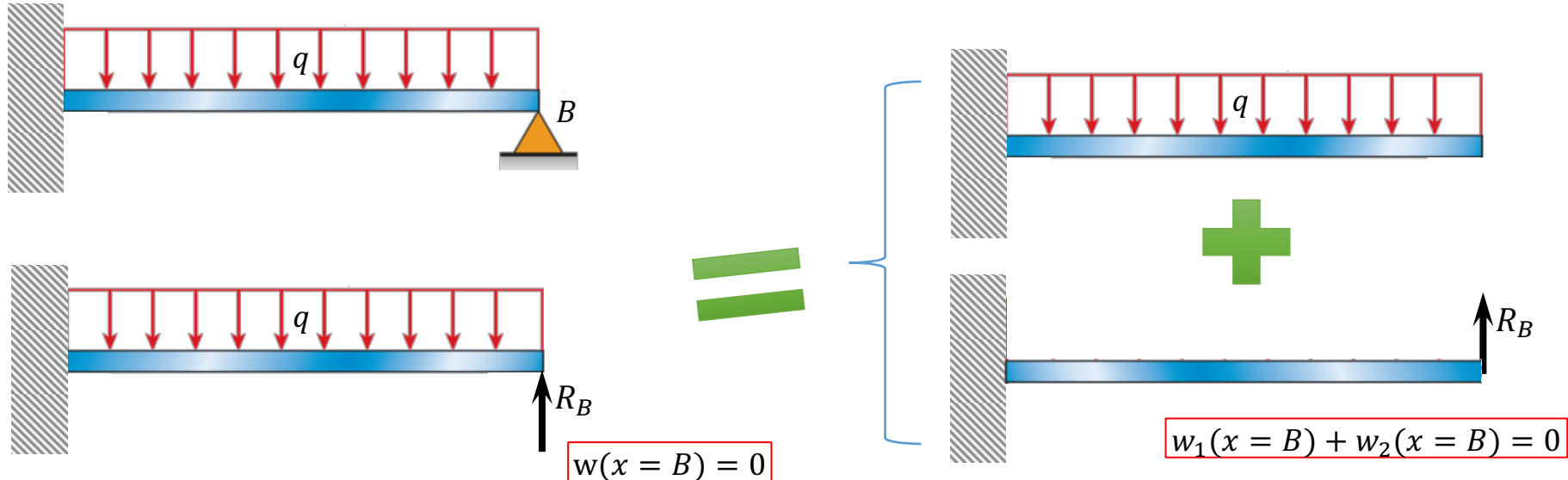
**Déterminé / Indéterminé?
Combien de redondants ?**

Poutres statiquement indéterminées

Résolution par méthode force-flexibilité = **superposition**

■ Résumé de la méthode

1. décomposer en systèmes additionnels en enlevant les redondants,
2. calculer la flèche de chaque système,
3. puis utiliser les équations de compatibilité pour trouver la flèche (et aussi les redondants)



Poutres statiquement indéterminées

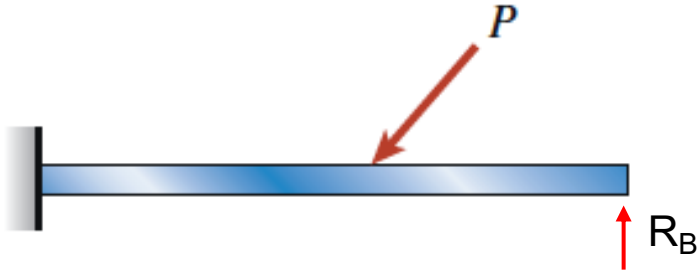
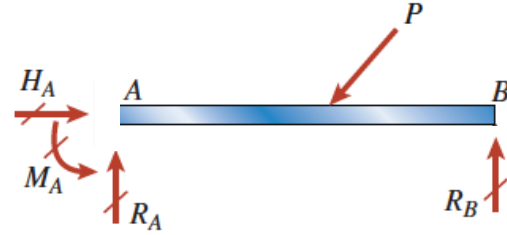
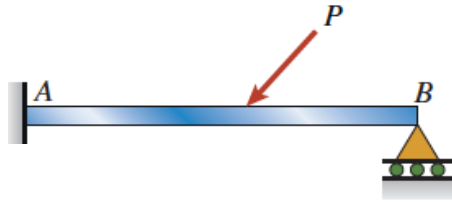
Résolution par méthode force-flexibilité = **superposition**

- Nous ajoutons aux équations d'équilibre autant **d'équations de compatibilité** que nous avons des réactions redondantes
- 1. Trouver le nombre de redondants = (nombre d'inconnues) - (nombre d'équation de la statique)
- 2. Choisir les redondants
- 3. Utiliser les équations d'équilibre ($\sum F = 0, \sum M = 0$) pour exprimer les forces et moments de réaction en fonction des redondants
- 4. " **Libérer la structure** " (supprimer les réactions redondantes, ce qui revient à supprimer les supports qui génèrent les réactions redondantes). Ceci nous donnera des systèmes que nous savons résoudre.
- 5. **Trouver la flèche sans les redondants, mais avec les charges**
- 6. **Enlever les charges et **calculer la flèche due seulement aux redondants** (un à la fois, donc à répéter pour chaque redondant)**
- 7. au point/s où le/s redondants sont appliqués, la somme des flèches des points 5 et 6 doit être nulle (ou une valeur fixe donné par le problème, ou c'est l'angle de la flèche qui a une valeur connue). Ceci permet de déduire les **équations de compatibilité** (la flèche et l'angle de la flèche, en fonction du problème)
- 8. Résoudre l'ensemble des équations pour **les forces de réaction redondantes** et autres forces, ainsi **que la flèche**.

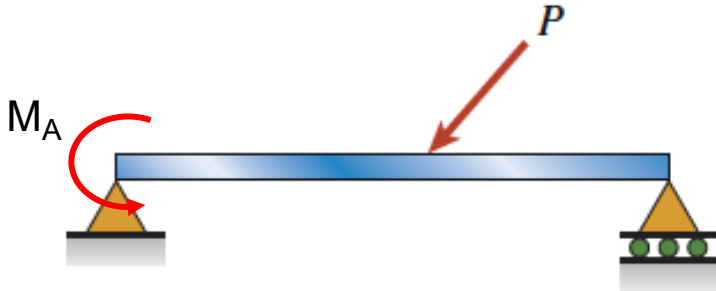
Exemples de “libérer” un poutre

Choisir les redondants puis enlever les supports

exemple 1: avec 1 seul redondant.



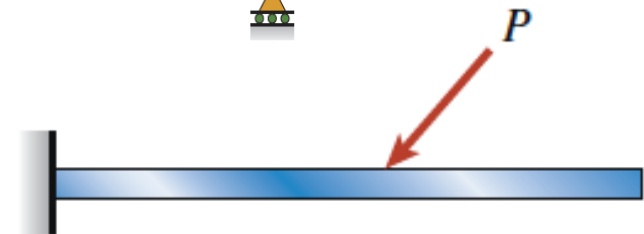
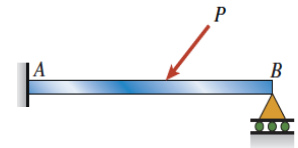
Option 1: poutre libérée avec R_B choisi comme redondant **et** $w(L) = 0$
(réfléchir : qu'est-ce qui cause R_B ?)



Option 2: poutre libérée avec M_A choisi comme redondant **et** $w'(0) = 0$
(réfléchir : qu'est-ce qui cause M_A ?)

On choisit le redondant, puis on « libère » la poutre pour n'avoir que des cas non-hyperstatiques: ceci implique « changer » les supports

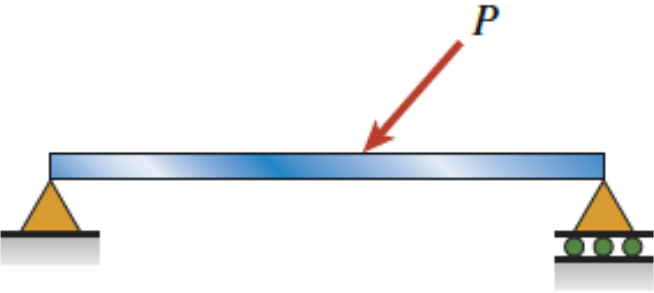
exemple 1: avec 1 redondant.



option 1: poutre libérée avec R_B choisie comme redondant

$w_{total}(x=L) = 0$

OU

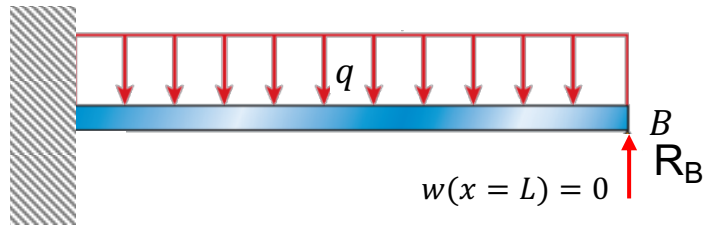
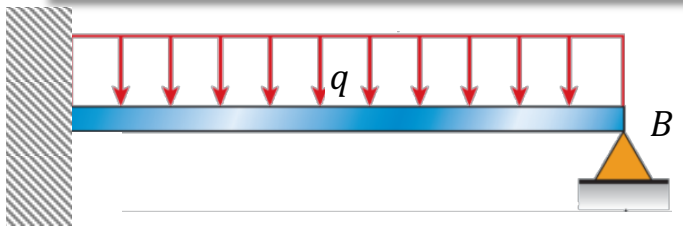


$w'(x=0) = 0$

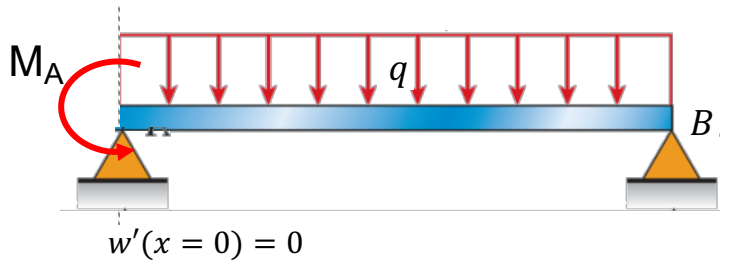
option 2: poutre libérée avec M_A choisi comme redondant

Mais: R_B ou M_A , on ne les connaît pas...

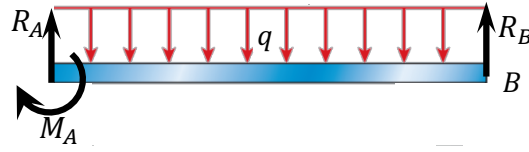
On choisit le redondant, puis on « libère » la poutre pour n'avoir que des cas non-hyperstatiques: ceci implique « changer » les supports
exemple 2: avec 1 seul redondant



Option 1: poutre libérée avec R_B choisie comme redondant



Option 2: poutre libérée avec M_A choisi comme redondant



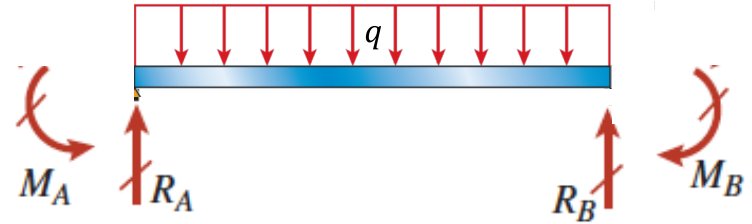
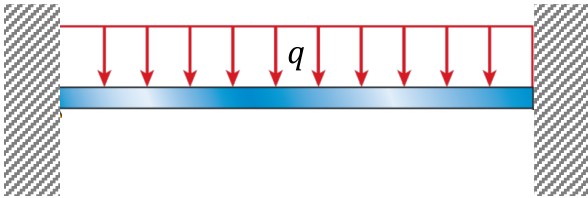
on ne connaît pas encore R_B ou M_A

Exemple avec 2 redondants

Ici 4 réactions inconnues (M_A, R_A, R_B, M_B), et 2 eq de la statique ($\sum F_y = 0$ et $\sum M_z = 0$)

Donc $4-2=2$ **redondants** (à choix parmi M_A, R_A, R_B, M_B)

(Ou, si on prend des forces de réaction aussi en x , alors 6 inconnues et 3 eq de la statique, et 3 redondants)

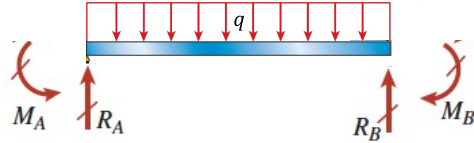
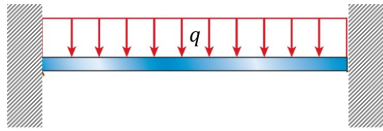


2 eq.
4 inconnues

C'est vous qui choisissez les redondants. Vaut mieux prendre ceux qui permettent de facilement enlever des supports. Ici par exemple, R_B et M_B

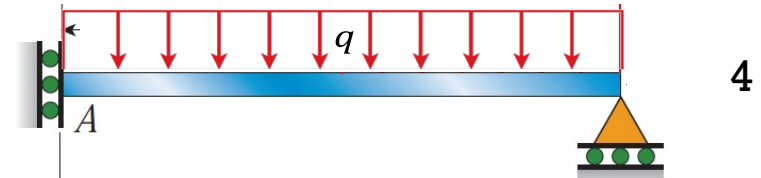
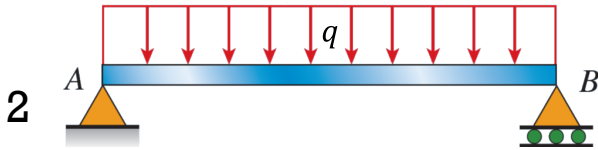
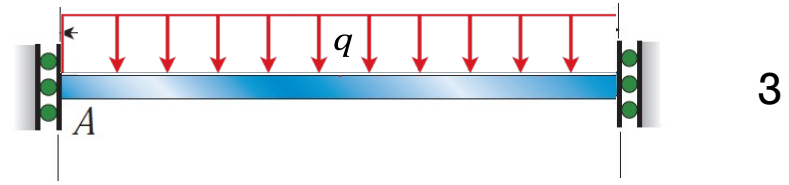
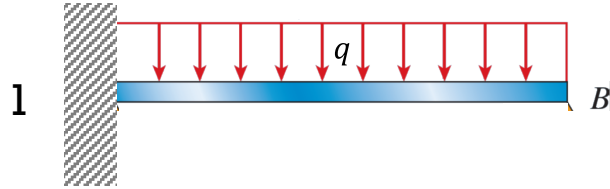
Quel/quels dessins libèrent correctement la poutre? (enlèvent 2 redondants)

Question



<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> Tous	<input type="checkbox"/> aucun		

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. Tous
- F. aucun

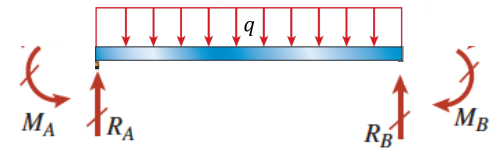


Quiz session: micro200

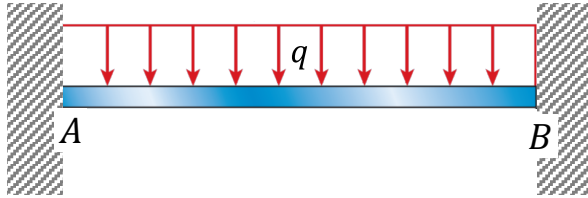
Solution

Quel/quels dessins libèrent correctement la poutre? (enlèvent 2 redondants)

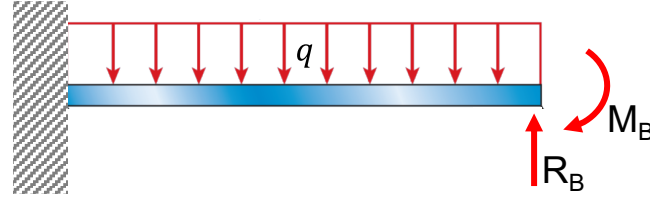
exemple 3: avec 2 redondants



Option 1: je choisis R_B et M_B comme redondants. J'enlève donc l'encastrement en B



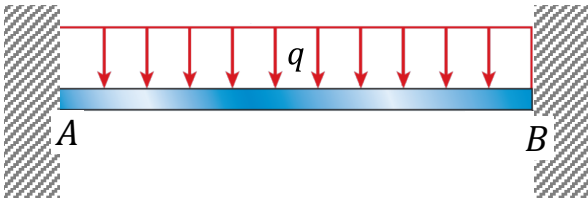
(je ne sais pas résoudre par $\sum F_y = 0$ et $\sum M_z = 0$)



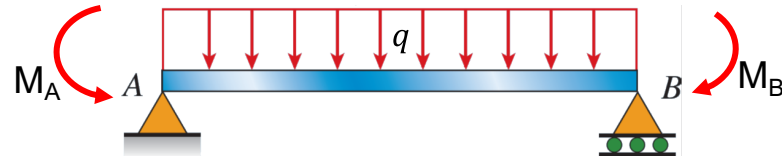
(je sais résoudre par $\sum F_y = 0$ et $\sum M_z = 0$)

Il faudra donc ajouter R_B et M_B "à la main", et je ne les connais pas encore ...

Option 2: je choisis M_A et M_B comme redondants. Je remplace les deux encastres par des pivots



(je ne sais pas résoudre par $\sum F_y = 0$ et $\sum M_z = 0$)



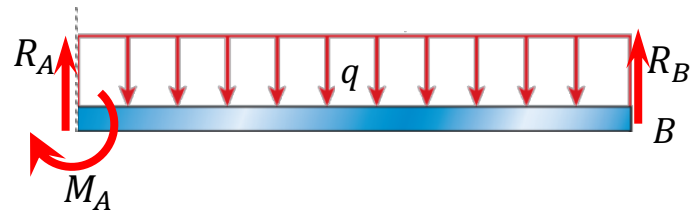
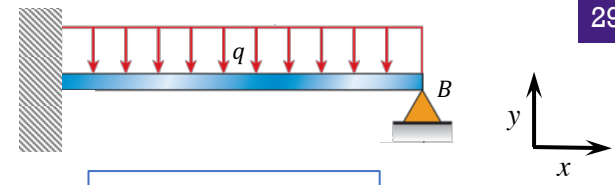
(je sais résoudre par $\sum F_y = 0$ et $\sum M_z = 0$)

(voir quizz du slide précédent: il y au moins 3 autres possibilités)

Il faudra donc ajouter M_A et M_B "à la main", et en plus je ne les connais pas encore ...

Calcul de la flèche d'une poutre statiquement indéterminée

Exemple S1: Calculer la flèche de cette poutre (charge distribuée q).

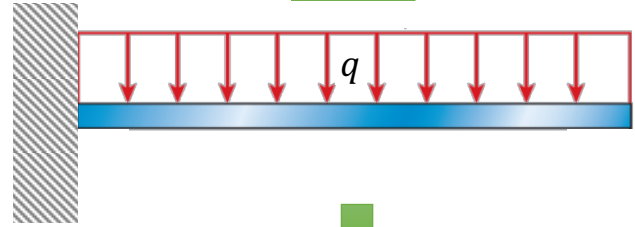


$$\begin{aligned}
 w(x = A) &= 0 \\
 w'(x = A) &= 0 \\
 \\
 w(x = B) &= 0 \\
 \\
 R_B &= qL - R_A \\
 \\
 M_A &= \frac{qL^2}{2} - R_B L
 \end{aligned}$$

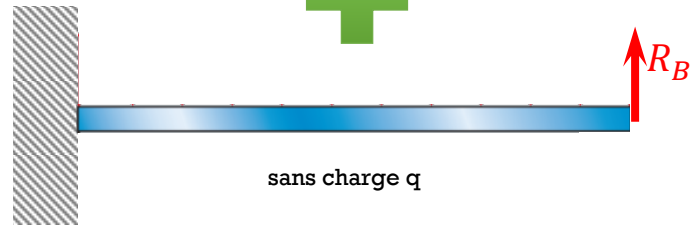
Système complet

Choix de R_B comme redondant

Sans le support redondant, mais avec la charge



Sans la charge, mais avec une force ou moment pour remplacer un support redondant



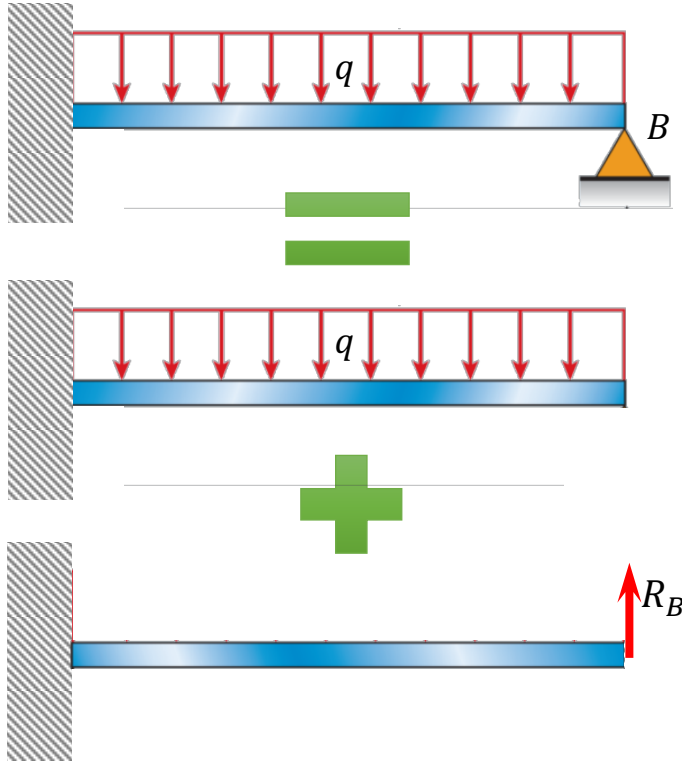
$$w(x) = w_1(x) + w_2(x)$$

Et Compatibilité au point où supports ont été changés:

$$w_1(x = B) + w_2(x = B) = 0$$

(rappel: R_B est encore une inconnue)

on calcule les flèches avec les “formules utiles” de l’annexe G/H de Gere et Goodno, ou autre recueil de formules de poutres (voir moodle)



$$w_1(x) = -\frac{qL^4}{24EI} \left(6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \left(\frac{x}{L} \right)^4 \right)$$

$$w_2(x) = \frac{R_B L^3}{6EI} \left(3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right)$$



$w_2(x)$ dépend de R_B !
Et on ne connaît pas encore R_B

$$w(x) = w_1(x) + w_2(x)$$

Equation de compatibilité au point où le redondant est appliqué. Ici, c'est $w(x = B) = 0$. donc $w_1(x = B) + w_2(x = B) = 0$

$$w_1(x = B) = -\frac{qL^4}{8EI}$$

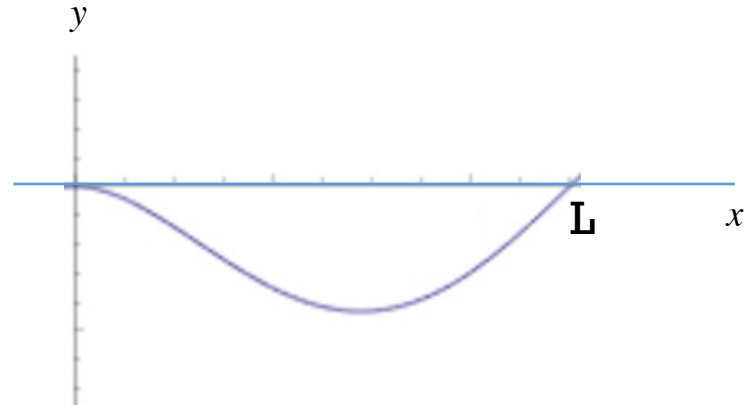
$$w_1(x = B) + w_2(x = B) = 0 \quad -\frac{qL^4}{8EI} + \frac{R_B L^3}{3EI} = 0$$

$$\rightarrow R_B = \frac{3}{8}qL$$

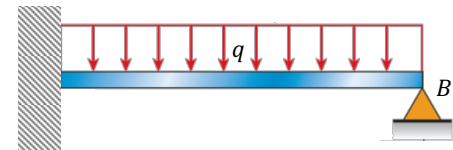
$$w_2(x = B) = \frac{R_B L^3}{3EI}$$

$$w(x) = w_1(x) + w_2(x)$$

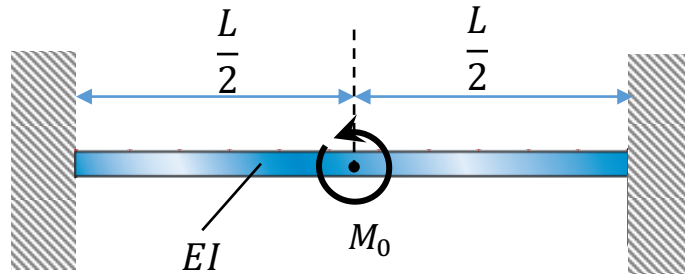
$$w(x) = \frac{qL^4}{8EI} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \frac{5}{6} \left(\frac{x}{L} \right)^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{L} \right)^4 \right)$$



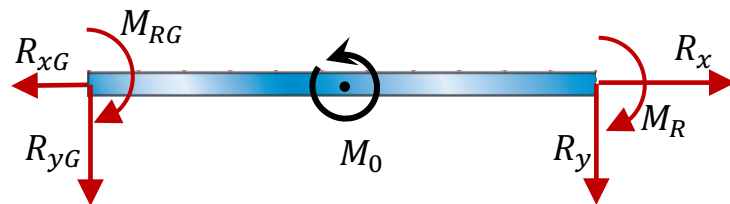
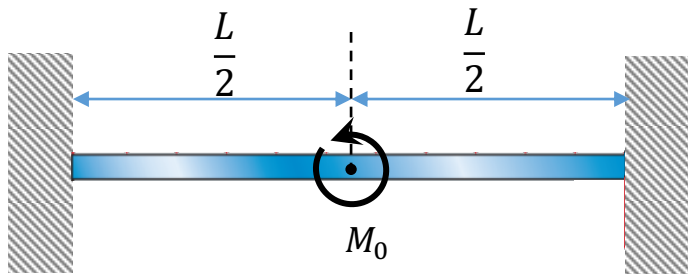
Une fois qu'on connaît R_B , on peut aussi trouver R_A et M_A avec les équations de la statique



Exemple S2: Calculer la flèche de cette poutre (moment externe M_0).

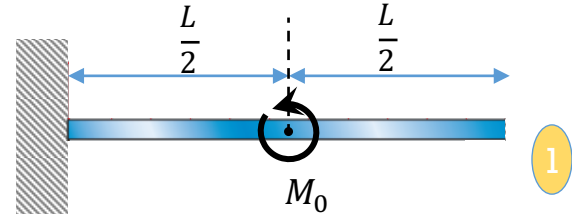
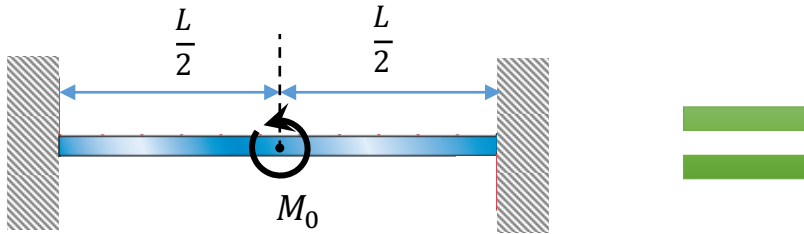
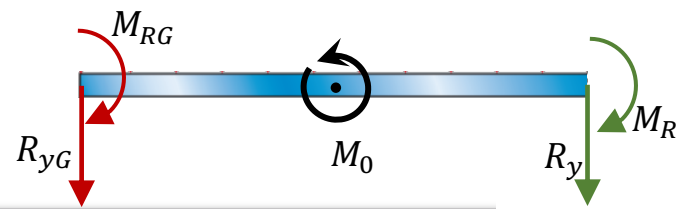


- nous allons:
 1. décomposer en systèmes additionnels en enlevant les redondants,
 2. calculer la flèche de chaque système,
 3. puis utiliser les équations de compatibilité pour trouver la flèche (et les redondants)

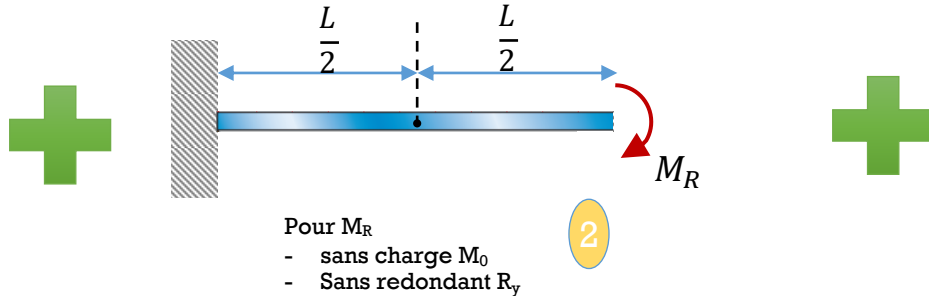


- Nombre de redondants: 3 si on considère x
- hypothèse de $R_x = 0$ car pas de force axiale.
- **2 redondants à trouver (je choisis M_R et R_y)**
- **il nous faudra 2 eq. de compatibilité au point où nous enlevons les redondants**

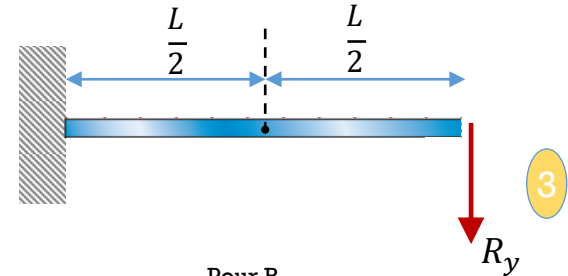
Solution (superposition en 3 systèmes)



avec charge M_0 , sans les deux redondants M_R et R_y
(donc sans le mur)



Pour M_R
- sans charge M_0
- Sans redondant R_y

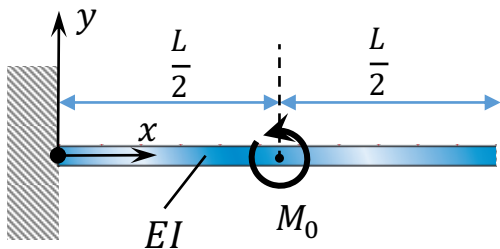


Pour R_y
- sans charge M_0
- Sans redondant M_R

+ 2 eq de compatibilité

Solution (partie 1)

1



$$M_z(x) = \begin{cases} M_0; & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 0; & x \geq \frac{L}{2} \end{cases}$$

$$w_1'(x) = \begin{cases} \frac{M_0}{EI} x & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{M_0 L}{2EI} & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

$$w_1(x) = \begin{cases} \frac{M_0}{2EI} x^2 & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{M_0 L}{2EI} \left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{M_0 L^2}{8EI} & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

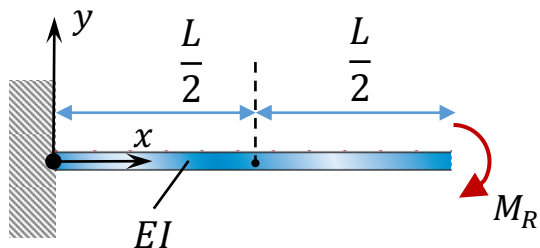
$$w_1'(L) = \frac{M_0 L}{2EI}$$

$$w_1(L) = \frac{3M_0 L^2}{8EI}$$

Pour trouver les constantes d'intégration, nous avons utilisé $w_1(x=0) = 0$ et $w_1'(x=0) = 0$
Et aussi continuité de $w_1'(x=L/2)$ et de $w_1(x=L/2)$

Solution (partie 2)

2



$$M_z(x) = -M_R \quad \text{Sur toute la poutre}$$

$$w_2'(x) = -\frac{M_R}{EI} x$$

$$w_2(x) = -\frac{M_R}{2EI} x^2 \quad 0 \leq x \leq L$$

$$w_2'(L) = -\frac{M_R L}{EI}$$

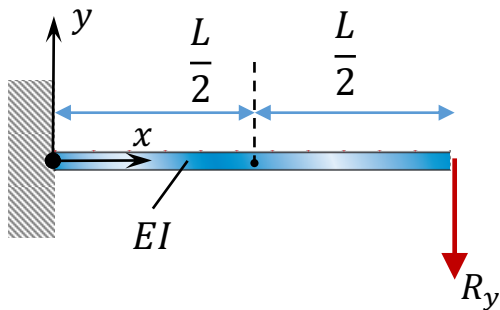
$$w_2(L) = -\frac{M_R L^2}{2EI}$$

Attention: nous ne connaissons pas encore M_R

Pour trouver les constantes d'intégration, nous avons utilisé $w_2(x=0) = 0$ et $w_2'(x=0) = 0$

Solution (partie 3)

3



$$w'_3(L) = -\frac{R_y L^2}{2EI}$$

$$M_z(x) = -R_y(L - x) \quad \text{Sur toute la poutre}$$

$$w'_3(x) = -\frac{R_y L^2}{2EI} \left(2\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right)$$

$$w_3(x) = -\frac{R_y L^3}{6EI} \left(3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right) \quad 0 \leq x \leq L$$

$$w_3(L) = -\frac{R_y L^3}{3EI}$$

Attention: nous ne connaissons pas encore R_y

Pour trouver les constantes d'intégration, nous avons utilisé que $w_3(x=0) = 0$ et $w'_3(x=0) = 0$

Solution (Équations de Compatibilité pour trouver R_y et M_R)

2 équations de **compatibilité** au point où nous avons enlevé

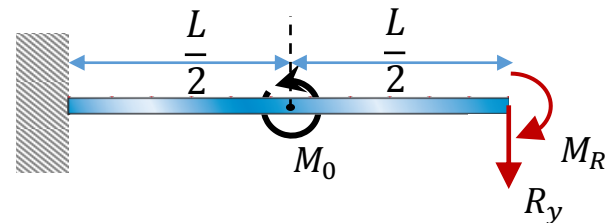
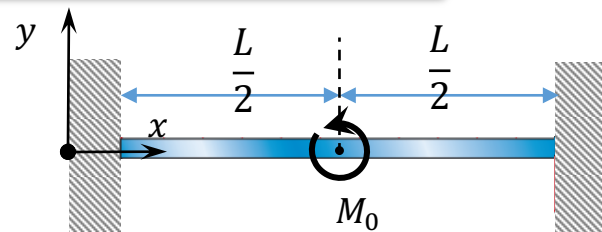
les redondants:

flèche en $x = L$ et angle en $x = L$

(car poutre encastree en $x = L$)

$$w_1'(L) + w_2'(L) + w_3'(L) = 0$$

$$w_1(L) + w_2(L) + w_3(L) = 0$$



$$\sum w'(L) = 0$$

$$M_0 - 2M_R - R_y L = 0$$

$$\sum w(L) = 0$$

$$3M_0 - 4M_R - \frac{8L}{3}R_y = 0$$

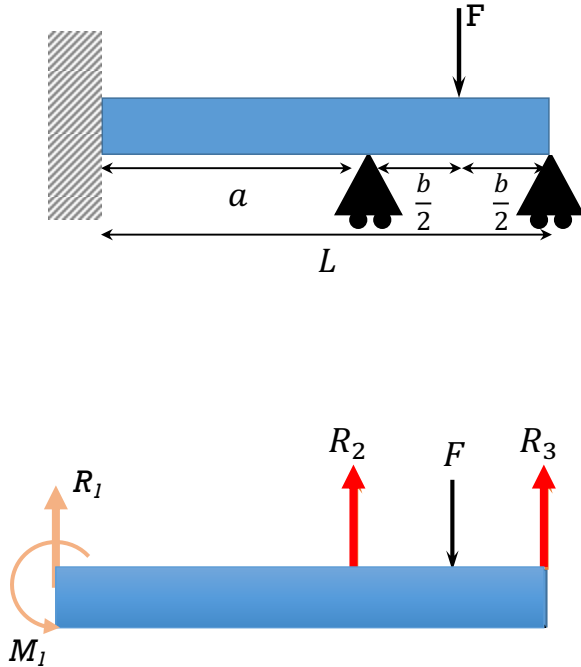
$$M_R = -\frac{M_0}{4}$$

$$R_y = \frac{3M_0}{2L}$$

$$w(x) = w_1(x) + w_2(x) + w_3(x) = \begin{cases} \frac{M_0 L^2}{8EI} \left(2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right); & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{M_0 L^2}{8EI} \left(-1 + 4 \left(\frac{x}{L} \right) - 5 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right); & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

Exemple S3

Calculer la déflexion d'une Poutre avec 3 supports



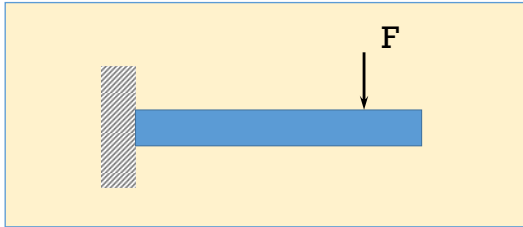
- 2 redondants
- Je choisis R_2 et R_3
- Il faudra donc des équations de compatibilité aux 2 supports que je vais enlever

- $w(x = a) = 0$

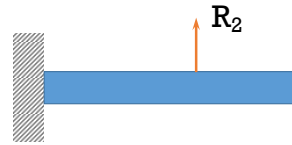
- $w(x = L) = 0$

Exemple S3

Calculer la déflexion d'une poutre avec 3 supports



avec charge F , sans les deux redondants R_2 et R_3



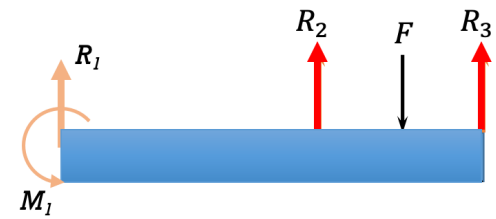
Pour R_2

- sans charge F
- Sans redondant R_3



Pour R_3

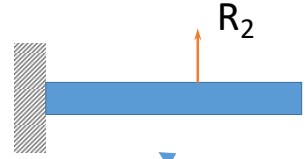
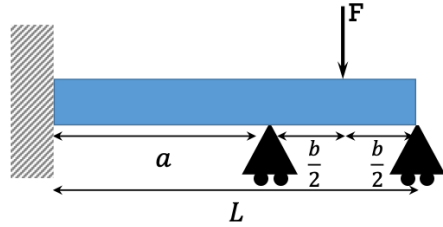
- sans charge F
- Sans redondant R_2



- Nous avons enlevé les supports « gênants » (2 redondants, R_2 et R_3) et divisé le problème en trois poutres encastées avec des forces ponctuelles:
 1. Nous utilisons les formules des poutres encastées (annexe G/H de Gere et Goodno) pour calculer la flèche
 2. Nous ne connaissons pas nos redondants R_2 et R_3
 3. Flèche = somme des flèches des 3 poutres
 4. Nous appliquons des conditions de compatibilité aux supports que nous avons « enlevés » pour trouver R_2 et R_3

Pour chaque poutre, nous avons $w(x=0) = 0$ et $w'(x=0) = 0$ car dans tous les 3 cas la poutre encastée en $x = 0$

Exemple S3



Rappel: nous ne
connaissons pas
encore R_3

Rappel: nous ne
connaissons pas
encore R_2

$$w_3(x) = \frac{R_3 x^2}{6EI} (3L - x) \quad 0 \leq x \leq L$$

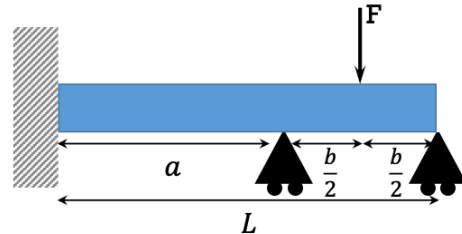
$$w_1(x) = \begin{cases} \frac{-F}{6EI} x^2 \left(3 \left(a + \frac{b}{2} \right) - x \right) & x \leq a + \frac{b}{2} \\ \frac{-F}{6EI} \left(a + \frac{b}{2} \right)^2 \left(3x - \left(a + \frac{b}{2} \right) \right) & a + \frac{b}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

$$w_2(x) = \begin{cases} \frac{R_2}{6EI} x^2 (3a - x) & x \leq a \\ \frac{R_2}{6EI} a^2 (3x - a) & a \leq x \leq L \end{cases}$$

$$w_{Total}(x) = w_1(x) + w_2(x) + w_3(x)$$

Exemple S3

conditions de compatibilité (pour R_2 et R_3)



Les conditions de compatibilité aux deux supports « enlevés » :

La flèche est 0 en $x = a$ et en $x = L$. Nous n'avons pas de conditions sur $w'(a)$ ou $w'(L)$

$$w_{Total}(x = a) = 0 = w_1(a) + w_2(a) + w_3(a)$$

$$0 = \frac{R_2}{3EI} a^3 - \frac{F}{6EI} a^2 \left(2a + \frac{3b}{2} \right) + \frac{R_3 a^2}{6EI} (3L - a)$$

$$\rightarrow R_2 = F \left(1 + \frac{3b}{4a} \right) - R_3 \left(1 + \frac{3b}{2a} \right)$$

$$w_{Total}(x = L) = 0 = w_1(L) + w_2(L) + w_3(L)$$

$$0 = \frac{R_2}{6EI} a^2 (3L - a) - \frac{F}{6EI} \left(a + \frac{b}{2} \right)^2 \left(2a + \frac{5b}{2} \right) + \frac{R_3 L^3}{3EI} \rightarrow$$

$$R_3 = \frac{6a + 5b}{4(3a + 4b)} F$$

$$R_2 = \frac{12a^2 + 22ab + 9b^2}{8a(3a + 4b)} F$$

Avec les résultats du slide précédent, nous pouvons alors écrire $w(x)$ pour cette poutre...

Semaine 9b – partie 2

Objectifs d'apprentissage

- Savoir appliquer la méthode des poutres indéterminées aux cas où un support est ***élastique***
- Trouver la flèche de poutres avec des supports élastiques



Poutres avec
Supports élastiques

Supports élastiques



<https://vsl.com/home/technologies/bearings/>



Supports élastiques

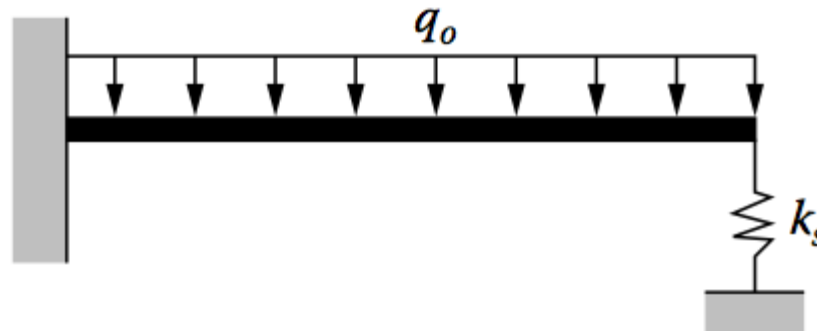


<https://www.youtube.com/watch?v=lyJcR9chLSQ>

Nano-indenter

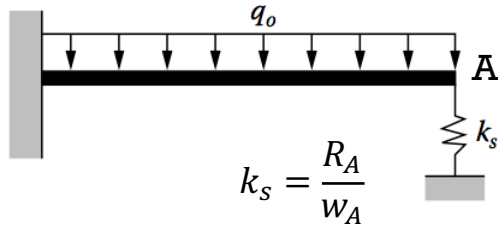
Poutre avec des supports élastiques

- Les supports ne sont pas parfaitement rigides.
 - Structure : les câbles de suspension sont élastiques, la poutre repose sur une structure en bois qui peut être comprimée, etc...
 - Fonctionnel : Utilisation de poutres pour mesurer des propriétés mécaniques (par exemple nano-indentation)
- Dans ces cas, il faut examiner la relation entre la force de réaction et le déplacement.

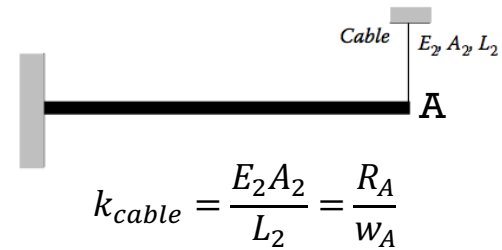


4 types de supports élastiques

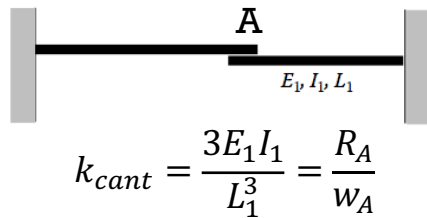
Ressort



câble



Poutres



Ressort spirale



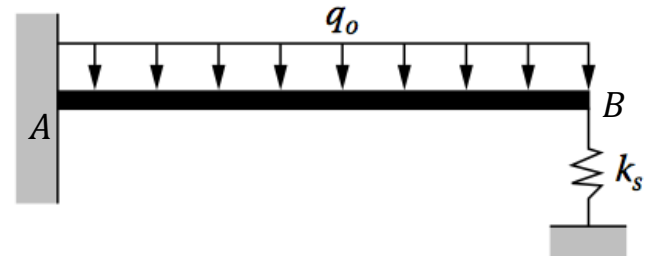
$$k_R = M_s / w'(L)$$

Poutres avec des supports élastiques

Ce sont tous des cas indéterminés!

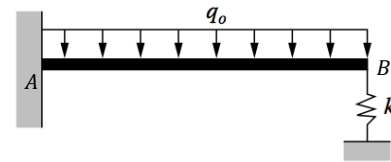
- Nous allons donc appliquer le principe de superposition, comme précédemment dans ce chapitre. **Nous traiterons la force élastique comme un redondant.**
- étapes (méthode):
 - a. Trouver la **flèche sans la force de réaction du support élastique**
 - b. Trouver la **flèche sans la charge, mais avec la force de réaction du support élastique**
 - c. Calculer la **déflexion au support élastique (en fonction de la force de réaction)**
 - d. Appliquer la **condition de compatibilité aux supports élastiques** (attention, ici les flèches ne seront pas zéro): Nous utilisons $F = \pm kx$ pour trouver force de réaction et puis la flèche de la poutre

$$w(L) = w_{charge}(L) + w_{support}(L) = \frac{R_{support}}{k_{support}}$$



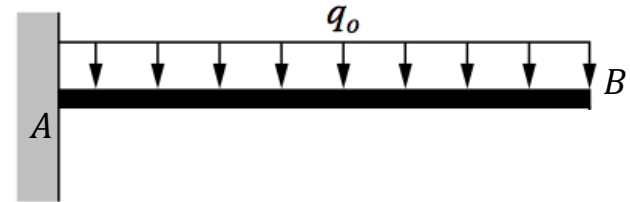
Exemple E1

Trouver la flèche de la poutre et la force du ressort



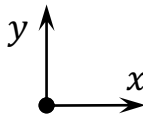
1.- Enlever le support élastique et trouver $w(x)$ due à q_0

$$w_{q_0}(x) = -\frac{q_0 L^4}{24EI} \left(6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \left(\frac{x}{L} \right)^4 \right)$$



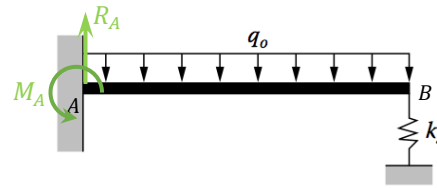
2.- Appliquer uniquement la force provenant du support élastique (pas de charge) et calculer $w(x)$.
Attention, F_{ressort} est encore inconnue!

$$w_{\text{ressort}}(x) = \frac{F_{\text{ressort}} L^3}{6EI} \left(3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right)$$



Exemple E1

Support élastique, ressort



3.- Sommer les deux flèches

$$w_{Total}(x) = w_{q_0}(x) + w_{ressort}(x) =$$

$$\frac{L^3}{6EI} \left(-\frac{q_0 L}{4} \left(6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \left(\frac{x}{L} \right)^4 \right) + F_{ressort} \left(3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right) \right)$$

4.- Appliquer la condition de compatibilité pour trouver $F_{ressort}$

$$F_{ressort} = -k_s w_{Total}(L) \quad F_{ressort} = -k_s \frac{L^3}{6EI} \left(-\frac{3q_0 L}{4} + 2F_{ressort} \right) \rightarrow F_{ressort} = \frac{q_0 L^4 k_s}{8EI \left(1 + \frac{k_s L^3}{3EI} \right)}$$

5. Une fois la force $F_{ressort}$ connue, nous pouvons donner l'expression complète pour $w(x)$ et aussi calculer les réactions en A

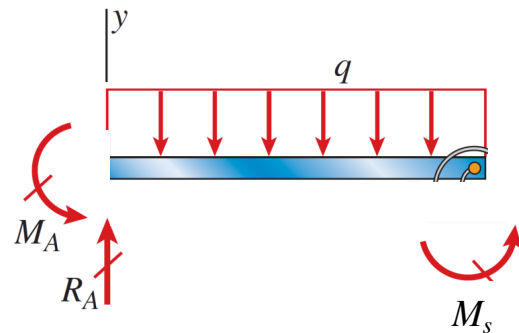
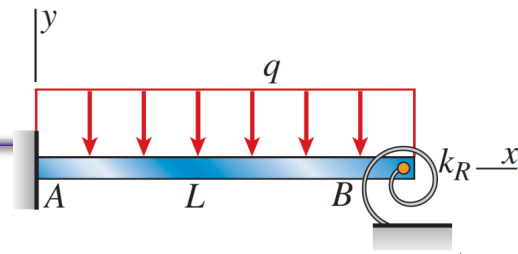
$$R_A = q_0 L - F_s \quad M_A = \frac{q_0 L^2}{2} - F_s L$$

Exemple E2

Support élastique, ressort en spirale
(génère un moment)

- but: Calculer flèche et réactions.
- Le ressort génère un moment M_s sur la poutre:
 - 1.- Calculer la flèche $w_q(x)$ sans le support élastique
 - 2.- Calculer la flèche $w_s(x)$ du au ressort, mais sans la charge
 - 3.- Sommer les deux flèches
 - 4- Appliquer la condition de compatibilité en B

$$M_s = -k_R \cdot w'_{Total}(L)$$

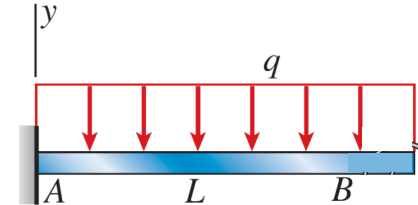


Exemple E2

Support élastique, ressort en spirale

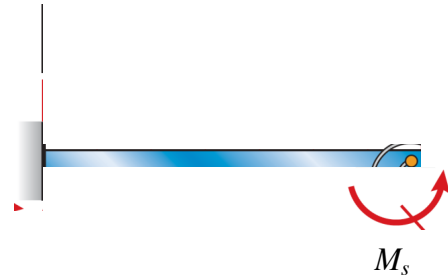
- 1.- Calculer la flèche $w_q(x)$ sans le support élastique

$$w_q(x) = -\frac{qL^4}{24EI} \left(6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \left(\frac{x}{L} \right)^4 \right)$$



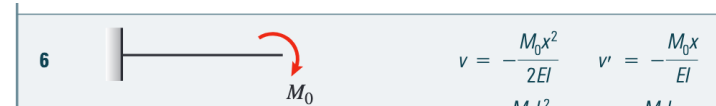
- 2.- Calculer la flèche $w_s(x)$ due au ressort (moment M_s appliqué à l'extrémité de la poutre), sans la charge q

$$w_s(x) = \frac{M_s x^2}{2EI} \quad (\text{mais nous ne connaissons pas } M_s)$$



3. Sommer les deux flèches, ce qui donne $w(x)$

$$w_{Total}(x) = w_q(x) + w_s(x) = -\frac{q_0 L^4}{24EI} \left(6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \left(\frac{x}{L} \right)^4 \right) + \frac{M_s x^2}{2EI}$$



Example E2

ressort en spirale

$$w_{Total}(x) = -\frac{q_0 L^4}{24EI} \left(6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \left(\frac{x}{L} \right)^4 \right) + \frac{M_s x^2}{2EI}$$

$$w'_{Total}(x) = -\frac{q_0 L^4}{24EI} \left(12x/L^2 - 12x^2/L^3 + 4x^3/L^4 \right) + \frac{M_s x}{EI}$$

- 4.- Appliquer la condition de compatibilité en B

$$M_s = -k_R \cdot w'_{Total}(L) = -k_R \left(-\frac{q_0 L^3}{6EI} + \frac{M_s L}{EI} \right)$$

$$\rightarrow M_s = \frac{k_R q_0 L^3}{6EI \left(1 + \frac{k_R L}{EI} \right)}$$

- et donc nous avons une expression pour $w_{total}(x)$

$$w_{Total}(x) = -\frac{q_0 L^4}{24EI} \left(6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \left(\frac{x}{L} \right)^4 \right) + \frac{k_R q_0 L^3}{6EI \left(1 + \frac{k_R L}{EI} \right)} \frac{x^2}{2EI}$$

