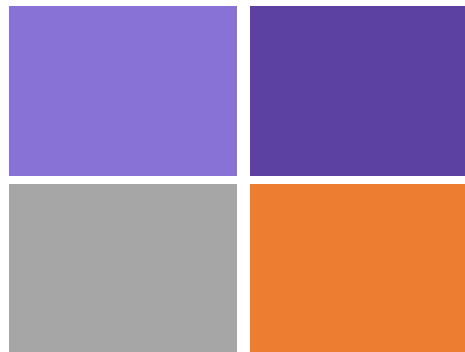


Semaine 7a

Charges axiales



PARTIE 1: (slide 6 - 18)
Poutres chargées axialement
(Chapitre 5.12 de Gere et Goodno)

PARTIE 2:
Poutres Composites
(Chapitre 6 de Gere et Goodno)

PROGRAMME DU COURS, semaines 6-10

| | | | | |
|----|-------|---|---|-----------|
| 6 | 14.10 | Forces internes dans les poutres non-déformées | x | |
| 6 | 16.10 | $\varepsilon(y)$ et $\sigma(y)$ en flexion pure. Moment d'inertie | x | Série 6 |
| 7 | 28.10 | Poutres chargées axialement. Poutres composites | x | Série 6 |
| 7 | 30.10 | Quiz + Session questions & réponses D. Briand | | Série 1-5 |
| 8 | 04.11 | Examen mi-semester D. Briand | | |
| 8 | 06.11 | Flèches des poutres | x | Série 7 |
| 9 | 11.11 | Flèche pour guidage flexible | x | Série 8 |
| 9 | 13.11 | Poutres statiquement indéterminées | x | Série 8 |
| 10 | 18.11 | Poutres statiquement indéterminées. Flambage | x | Séries 9 |
| 10 | 20.11 | Flambage | x | Série 10 |

Résumé chapitre précédent (semaine 6b)

Poutres en flexion pure ou avec forces en y (pas de force axiale)

■ Deformation Relative normale ε_x :

$$\varepsilon_x = -\frac{y - y_0}{\rho} = -\kappa(y - y_0)$$

- y_0 : Position de l'axe neutre
- ρ : Rayon de courbure
- $\kappa = \frac{1}{\rho}$: Courbure
- $y - y_0$: Distance de l'axe neutre
- $y_0 =$ Centroïde de la section transverse pour poutres mono-matériaux:

$$y_0 = \frac{\int_A y \, dydz}{\int_A \, dydz}$$

□ Contrainte normale:

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}}(y - y_0)$$

- I_{z,y_0} : Moment d'inertie de la section sur un axe parallèle à l'axe z passant par l'axe neutre
- $I_{z,y_0} = \int_A (y - y_0)^2 \, dydz$
- $M_z(x) = \frac{E}{\rho} I_{z,y_0}$

□ Contrainte normale maximum:

$$|\sigma_{x,max}(x)| = \frac{|M_z(x)|}{I_{z,y_0}} c = \frac{|M_z(x)|}{S}$$

- c : Distance maximale vers l'axe neutre
- $S = \frac{I_{z,y_0}}{c}$: Module d'inertie élastique

Poutres avec une charge axiale

- Contrainte normale pour poutre avec charge axiale et flexion:

$$\sigma_x = \frac{F_x}{A} - E \frac{y - y_0}{\rho}$$

- F_x : Charge axiale, A : section de la poutre
- y_0 : Position de l'axe neutre dans la poutre en flexion pure.
- Position de l'axe neutre y'_0 pour les poutres avec charge axiale :

$$y'_0 = \frac{F}{M_z(x)} \frac{I_{z,y_0}}{A} + y_0$$

Poutres composites

(sans force axiale)

- Contrainte normale pour les poutres composites:

$$\sigma_x(y) = -E(y) \frac{y - y_0}{\rho}$$

- Position de l'axe neutre pour les poutres composites: $y_0 = \frac{\sum_i E_i Q_i}{\sum_i E_i A_i}$

- $Q = \int_A y dA$

- Contrainte normale dans les poutres composites:

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{E(y) M_z(x)}{\langle EI_{z,y_0} \rangle} (y - y_0)$$

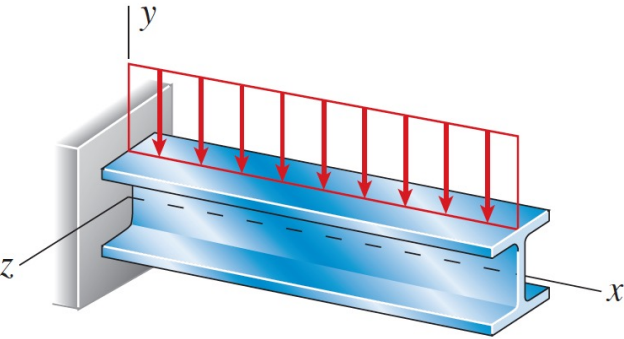
- $\langle EI_{z,y_0} \rangle = \sum_i E_i I_{z,y_0,i}$
- $M_z(x) = \frac{1}{\rho} \langle EI_{z,y_0} \rangle$

Semaine 7 – partie 1

Objectifs d'apprentissage de cette section

- Savoir utiliser la superposition pour trouver
 - le nouvel **axe neutre d'une poutre mono-matériau sous charge combinée en x et en y**
 - **Contrainte quand on combine charge axiale et flexion**

Que ce passe-t-il si une charge axiale (en x) est ajoutée à charge en y ?



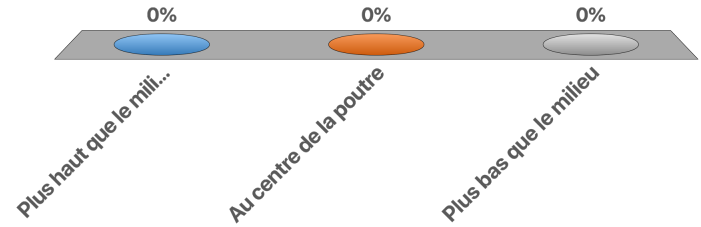
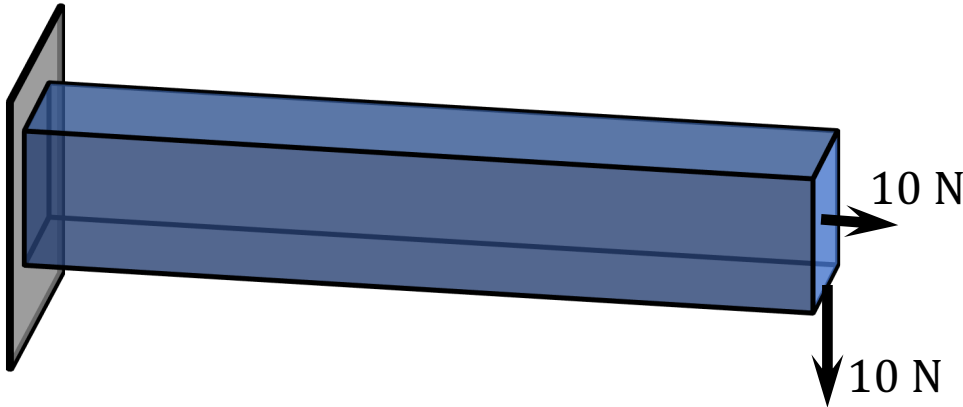
Semaine dernière
(que des moments purs
et des forces verticales)

Ces slides:
aussi des forces axiales

Question

Où se trouve l'axe neutre?

- A. Plus haut que le milieu
- B. Au centre de la poutre
- C. Plus bas que le milieu



Solution

Où se trouve l'axe neutre?

Contrainte des poutres mono-matériel sous charge axiale et transverse

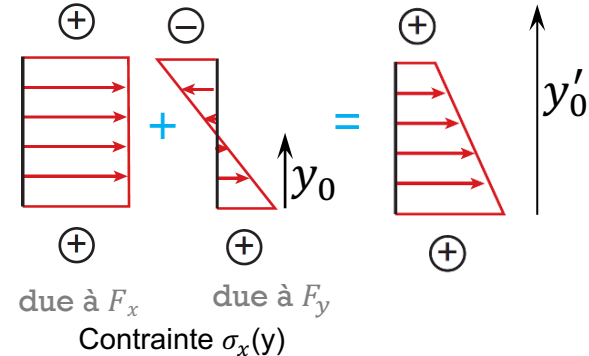
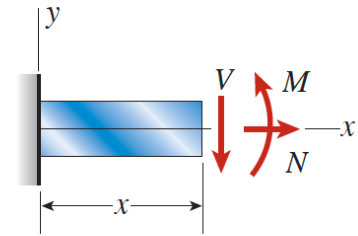
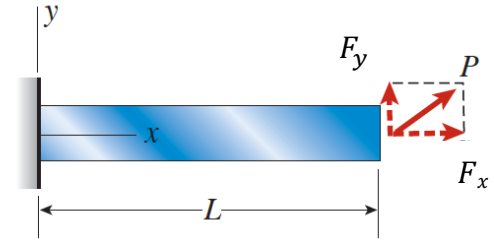
- Nous pouvons appliquer le principe de superposition et séparer le problème en:
 - Élongation pure (force normale F_x selon x)
 - Flexion pure (due par exemple à une F_y force selon y)

La contrainte normale (combinée) est alors:

$$\sigma_x = \frac{F_x}{A} - E \frac{y-y_0}{\rho} = \frac{F_x}{A} - \frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}} (y - y_0)$$

Attention y_0 est l'axe neutre en flexion pure

- rappel: axe neutre, c'est l'axe où $\sigma_x(y'_0) = 0$
- **l'axe neutre y_0 calculé pour la « flexion pure » n'est plus le « vrai » axe neutre y'_0 !**



Contrainte des poutres sous charge axiale et transverse

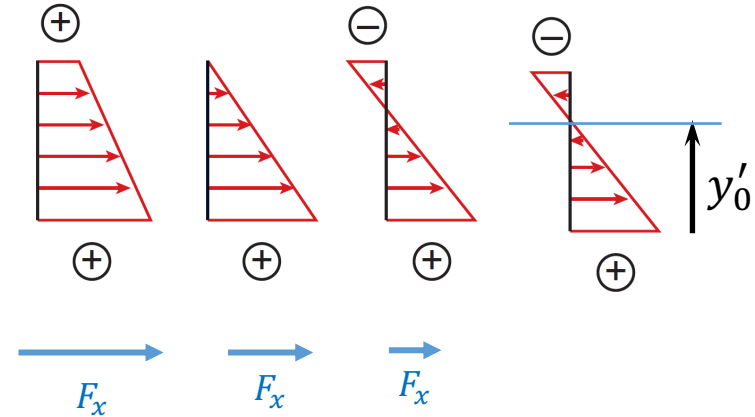
- Pour calculer la position du nouvel axe neutre y'_0 (le y où $\sigma_x(y) = 0$):

$$\sigma_x(y = y'_0) = 0 = \frac{F_x}{A} - E \frac{y'_0 - y_0}{\rho}$$

$$y'_0 = \frac{F_x}{AE} \rho + y_0$$

$$y'_0 = \frac{F_x}{AE} \frac{EI_{z,y_0}}{M_z(x)} + y_0$$

$$y'_0 = \frac{F_x}{M_z(x)} \frac{I_{z,y_0}}{A} + y_0$$

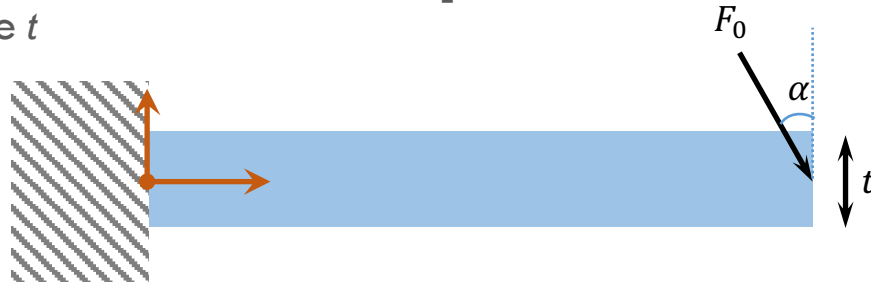


- y'_0 peut être à l'extérieur de la poutre !

Exemple

Charge inclinée

- Calculer la position de l'axe neutre en fonction de α pour une poutre de section carrée t



- Nous appliquons la superposition et divisons le problème en deux :

- Une force verticale appliquée à l'extrémité
 $F_{vert} = F_0 \cos(\alpha)$
- Une force horizontale appliquée à l'extrémité
 $F_{horiz} = F_0 \sin(\alpha)$



Exemple

Charge inclinée

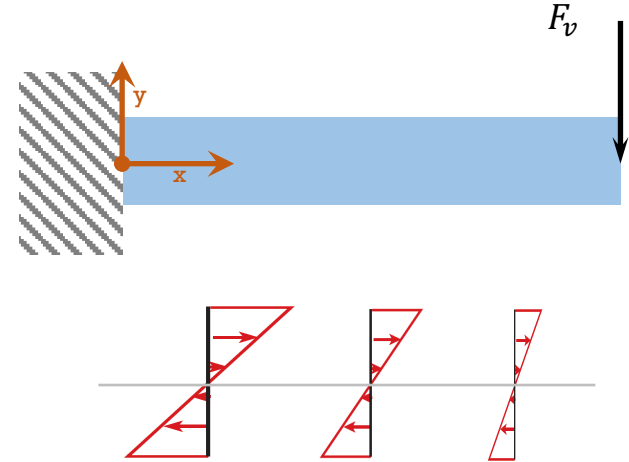
Premier problème : que la force verticale

- Force de cisaillement: $V(x) = F_v$
- Moment de flexion: $M_z(x) = F_v(x - L)$
- Distribution de la contrainte
 - l'origine est située au milieu de la barre. Ici $y_0 = 0$

$$\square \sigma_{x,Fvert}(x, y) = -\frac{M_z(x)}{I_{z,y_0}} y$$

$$\sigma_{x,Fvert}(x, y) = -\frac{F_v(x - L)}{\frac{t^4}{12}} y$$

$$\sigma_{x,Fvert}(x, y) = = -\frac{12F_0 \cos(\alpha)}{t^4} (x - L)y$$

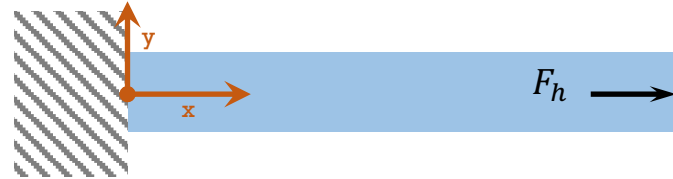


- La valeur de la contrainte à la *surface* de la poutre dépend de x
- L'axe neutre reste à $y = 0$

Exemple

Charge inclinée

2^{ième} problème : que la force horizontale



- Force interne: $N(x) = F_h$

- Répartition de la contrainte

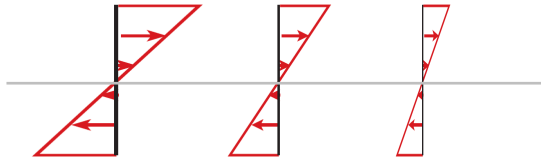
$$\sigma_{x,Fhoriz}(x, y) = \frac{F_h}{A}$$

$$\sigma_{x,Fhoriz}(x, y) = \frac{F_h}{A} = \frac{F_0 \sin(\alpha)}{t^2}$$

On combine (superposition) les deux contraintes

$$\sigma_{xFvert}(x, y) = -\frac{12F}{t^4}(x - L)y$$

$$\sigma_{x,Fhoriz}(x, y) = \frac{F_0 \sin(\alpha)}{t^2}$$

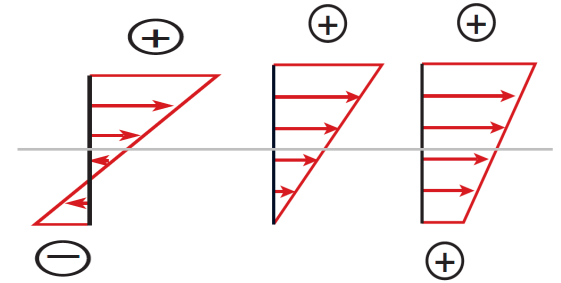


Contrainte due à F_v
(l'axe neutre est au centre)

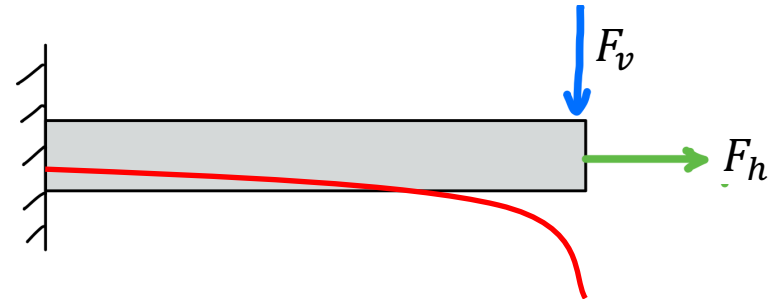


Contrainte due à F_h
(constante partout)

=



Contrainte totale



Exemple

Charge inclinée



■ Combinons:

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{12F_0 \cos(\alpha)}{t^4} (x - L)y + \frac{F_0 \sin(\alpha)}{t^2}$$

■ La position à laquelle le contrainte (et la déformation relative) valent zéro est $y = y_o'$:

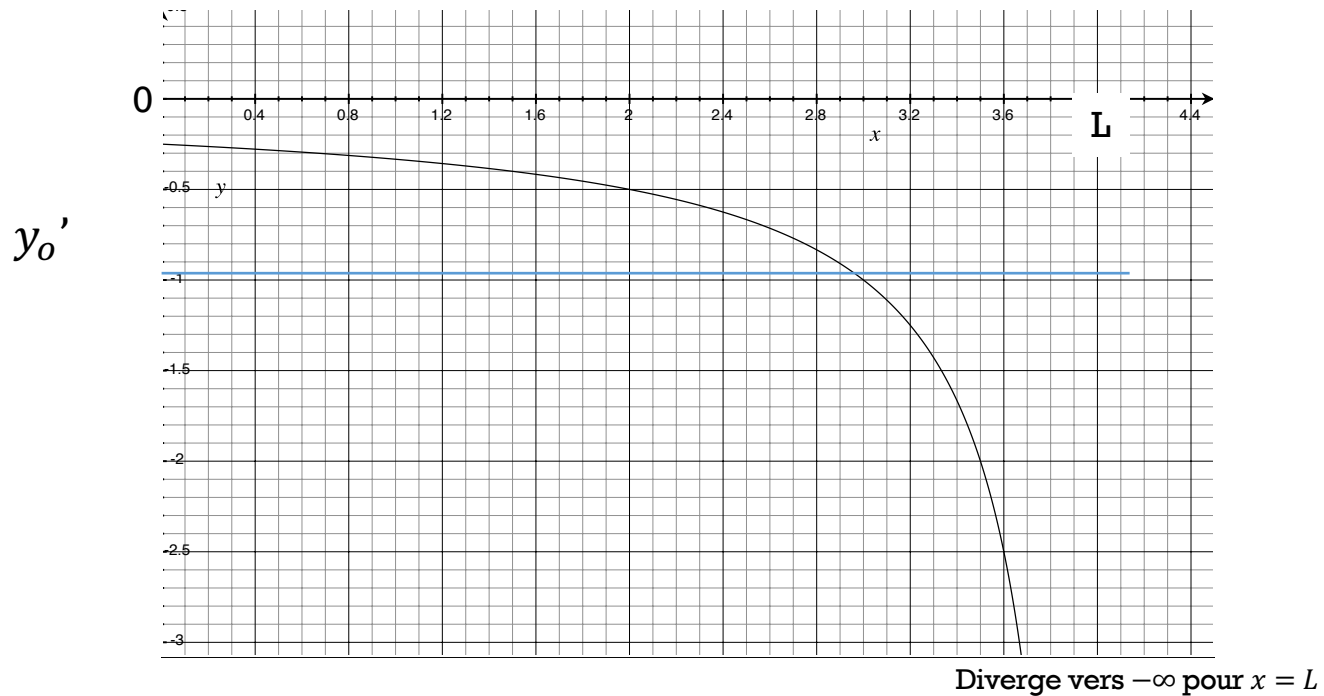
$$\sigma_x(x, y_o') = 0$$

$$-\frac{12F_0 \cos(\alpha)}{t^4} (x - L)y_o' + \frac{F_0 \sin(\alpha)}{t^2} = 0$$

$$y_o' = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \frac{t^2}{12} \frac{1}{x - L} = \frac{t^2}{12} \frac{\tan(\alpha)}{x - L}$$

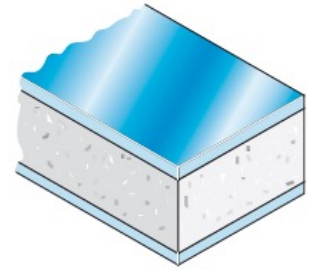
■ La position de l'axe neutre (où $\sigma_x(x) = 0$) n'est pas constante le long de la poutre!

Position axe neutre en fonction de x



Semaine 7 – partie 2

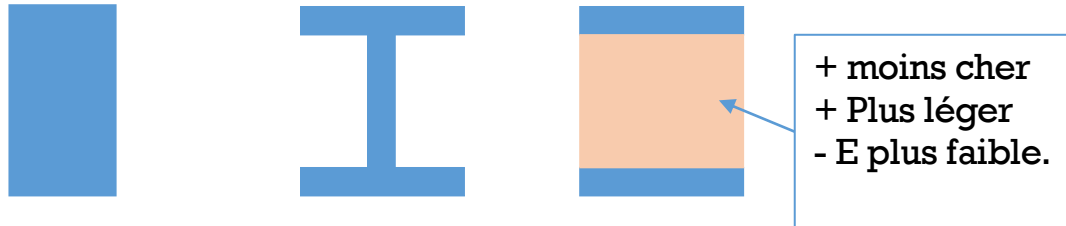
Objectifs d'apprentissage



- **Pour des poutres composites:**
 - Exprimer la déformation relative $\varepsilon_x(x, y)$ dans les différentes couches
 - savoir que $\varepsilon_x(x, y)$ est continue
 - Exprimer les contraintes $\sigma_x(x, y)$ dans les différentes couches
 - savoir que $\sigma_x(x, y)$ est **discontinue**
 - Calculer l'axe neutre d'une poutre composite
 - Formule flexion pour poutres composites

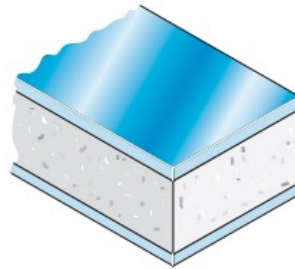
Poutres composites

- Jusqu'à maintenant, les poutres ont été homogènes, faites d'un seul matériau.
- Nous avons vu que certaines sections sont plus efficaces que d'autres; elles peuvent mieux résister aux charges (moment d'inertie I_z)
- nous pouvons faire (beaucoup) mieux avec des poutres composites
 - comprendre la distribution des contraintes et déformations permet de concevoir des poutres plus performantes, plus légères, moins chères, plus efficaces

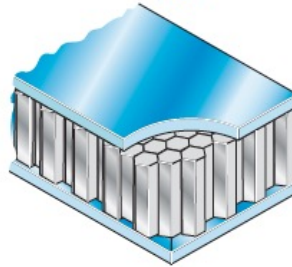


On met à l'extérieur de la poutre le matériau "costaud" car c'est là que les contraintes sont élevées.

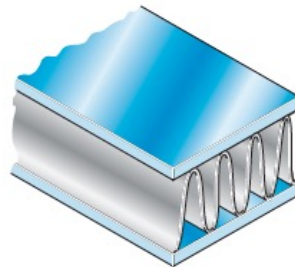
Au centre, peu de contraintes, on peut utiliser un matériau léger et « faible ».



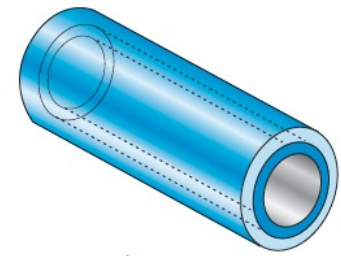
(a)



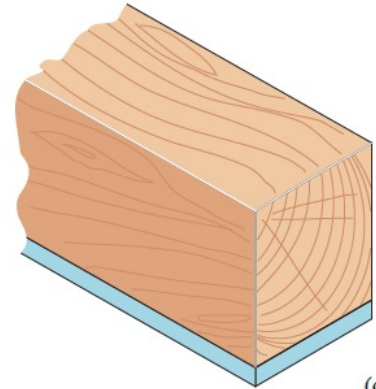
(b)



(c)



(b)

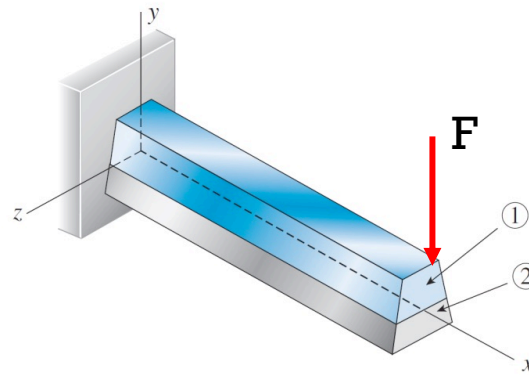


(c)



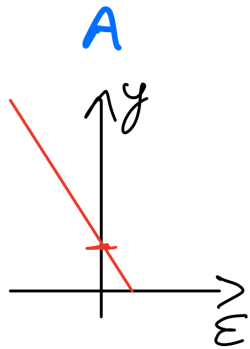
Question

Déformation relative ϵ_x dans une poutre composite: quel graphe est juste?



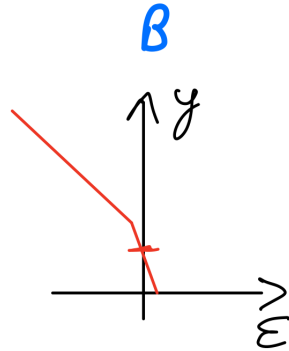
A.
B.
C.

A
B
C



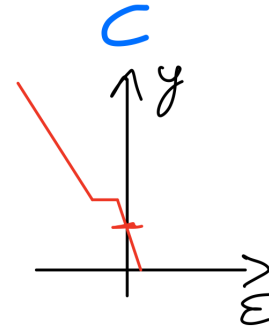
$$\epsilon_x \propto (y - y_0)$$

Pour tous les matériaux (même pente)



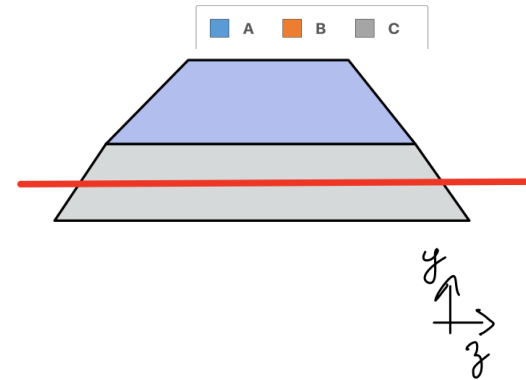
$$\epsilon_x \propto (y - y_0)$$

Pour chaque matériau (pente différente)



$$\epsilon_x \propto (y - y_0)$$

Pour chaque matériau et discontinuité à l'interface

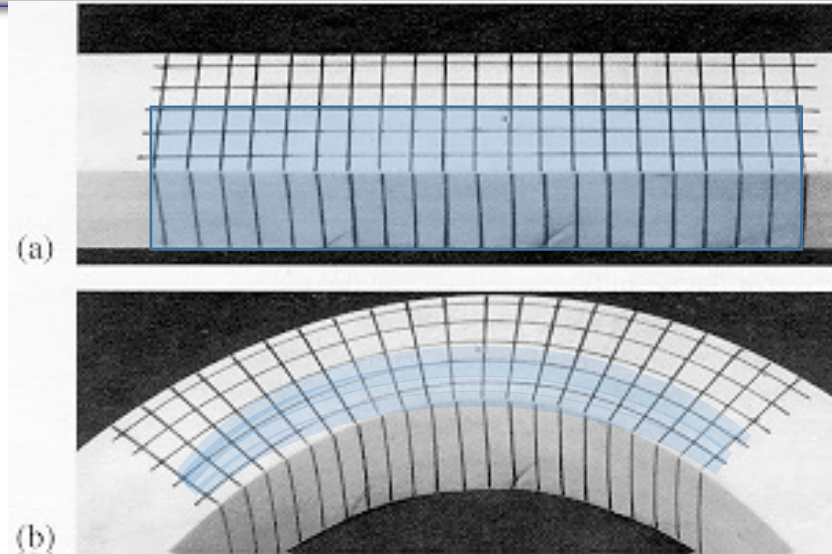


Solution

**Déformation relative ε_x dans
une poutre composite:
quel graphe est juste?**

Pour une courbure donnée, la déformation de la poutre ne dépend pas de sa composition

$$\epsilon_x = -\frac{y - y_0}{\rho}$$



Hypothèse: les plans normaux à l'axe de la poutre avant la flexion resteront plans après fléchissement

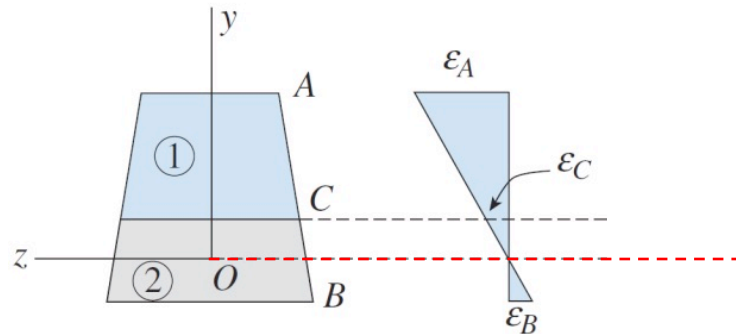
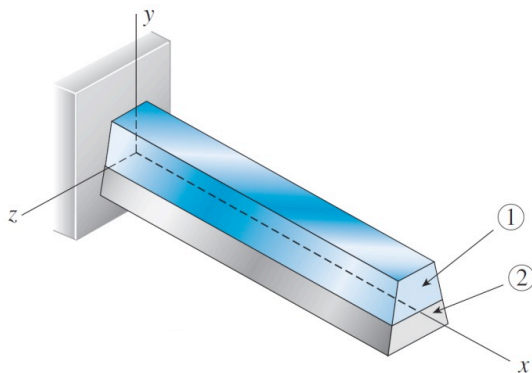
Déformation relative ε_x dans une poutre Composite en flexion pure

- Les plans normaux à l'axe de la poutre avant la flexion restent plans après fléchissement
- Après déformation, l'axe neutre garde la même longueur
- Mais pour toute autre ligne parallèle à l'axe neutre:

$$ds = (\rho - (y - y_0)) d\theta = ds_0 - (y - y_0) \frac{ds_0}{\rho} \rightarrow$$

$$\varepsilon_x = -\frac{y - y_0}{\rho}$$

comme pour une poutre mono-matériau, raisonnement identique



- Dans cette figure, $y = 0$ a été placé à l'axe neutre
- attention: **l'axe neutre d'un composite n'est pas situé au centroïde de l'objet!**

Contraintes normales σ_x dans poutre Composite

Flexion pure - Contrainte normale σ_x en fonction de y

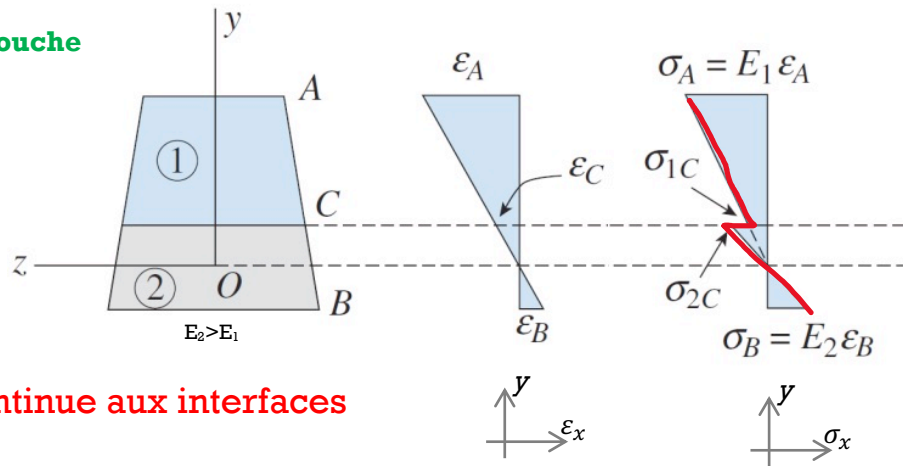
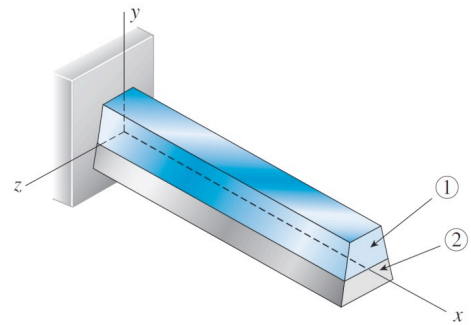
- $\epsilon_x = -\frac{y-y_0}{\rho}$
- le calcul de la contrainte σ_x est différent que dans une poutre mono-matériau
- Utiliser la loi de Hooke?

~~$$\sigma_x = E\epsilon_x = -E\frac{y-y_0}{\rho}$$~~

Oui, mais **pas de façon globale**: il faut Hooke **couche par couche**

$$\sigma_A = E_1\epsilon_A \quad \sigma_B = E_2\epsilon_B$$

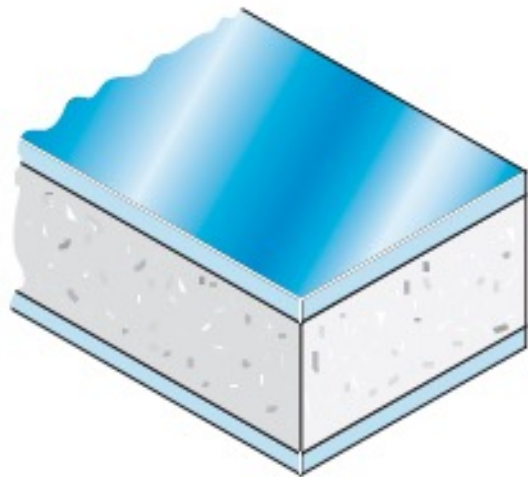
$$\sigma_{x,i} = E_i\epsilon_x = -E_i\frac{y-y_0}{\rho}$$



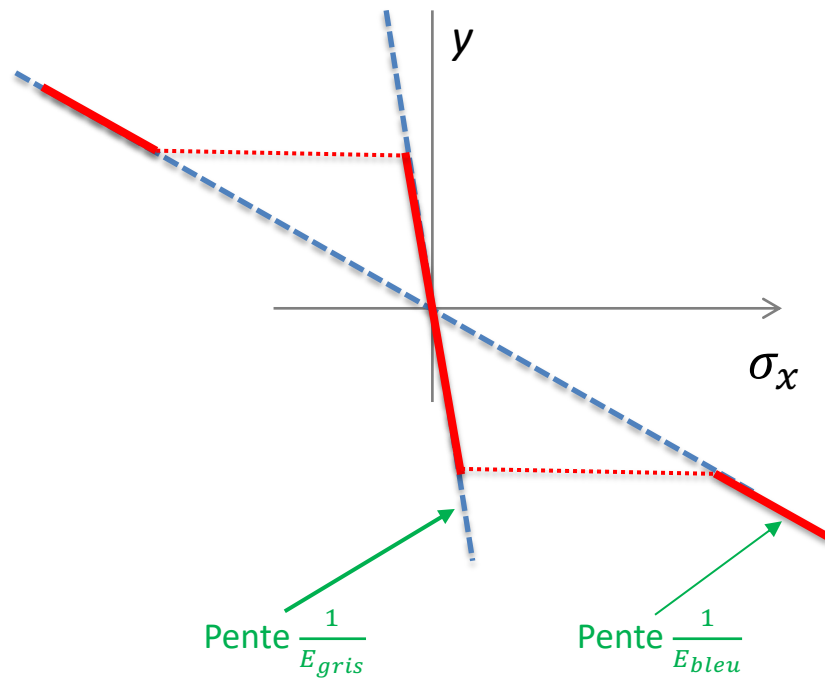
$\epsilon(y)$ est continue, mais $\sigma(y)$ peut être discontinue aux interfaces

$\varepsilon_x(\mathbf{y})$ est continue partout

$\sigma_x(\mathbf{y})$ n'est pas continue aux interfaces!

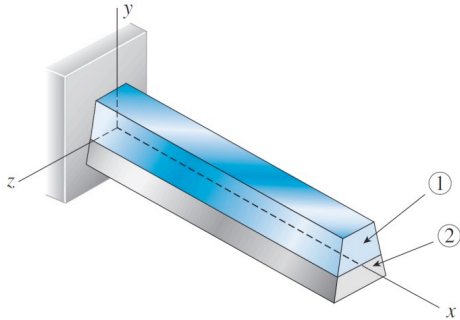


$$E_{bleu} > E_{gris}$$



Question Est-ce qu'on peut déplacer la zone de contrainte max en tirant sur une poutre **composite**?

- A. True
- B. False



Solution Est-ce qu'on peut déplacer la zone de contrainte max en tirant sur une poutre **composite**?

Calcul de l'axe neutre pour une poutre composite

Sans forces axiales, exemple poutre 2 matériaux

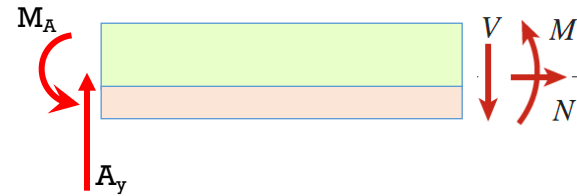
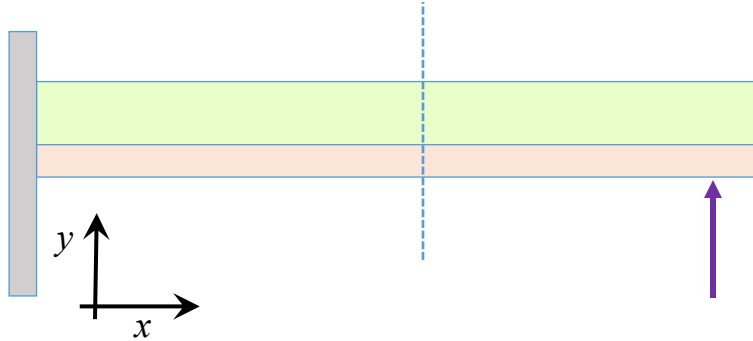
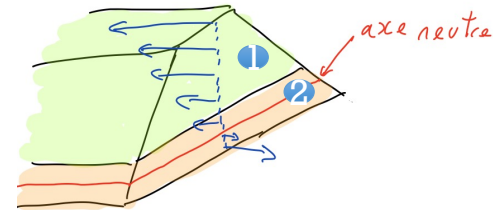


Diagramme des forces de la Poutre
avec forces *sans déflexion*

Nous « coupons » (méthode des sections)

Comme zéro force axiale externe, l'équilibre
des forces en x donne $N(x) = 0$:

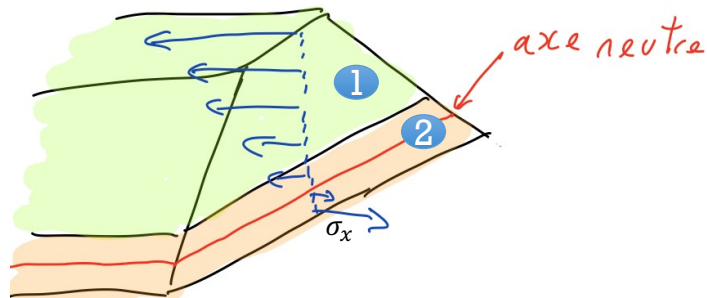
$$\sum F_x = N = 0$$



Même poutre avec forces *avec déflexion*
Les contraintes en x dépendent de y

Calcul de l'axe neutre pour une poutre composite

Sans forces axiales, exemple poutre 2 matériaux



$$N = 0 = \iint \sigma_x dA$$

$$N = 0 = \iint_{\text{section1}} \sigma_{x1} dA + \iint_{\text{section2}} \sigma_{x2} dA$$

$$\sigma_{x,i} = -E_i \frac{y - y_0}{\rho}$$

$$E_1 \iint_{\text{section1}} (y - y_0) dydz + E_2 \iint_{\text{section2}} (y - y_0) dydz = 0$$

$$y_0 = \frac{E_1 \iint_1 y dydz + E_2 \iint_2 y dydz}{E_1 \iint_1 dydz + E_2 \iint_2 dydz}$$

~ Moyenne pondérée

Attention au choix de l'origine pour les intégrales

Calcul de l'axe neutre pour une poutre composite

Sans forces axiales

- Plus généralement, pour une poutre avec n régions différentes dans la section

$$0 = N = \iint \sigma_x(x, y) dy dz = \sum_i \iint E_i \varepsilon_x(x, z) dy dz = - \sum_i E_i \iint_{\text{zone } i} \frac{(y - y_0)}{\rho} dy dz = 0$$

chaque intégrale est seulement sur la section yz du matériau i :

$$y_0 = \frac{\sum_i \int E_i \frac{y}{\rho} dA_i}{\sum_i \int \frac{E_i}{\rho} dA_i} = \frac{\sum_i \int E_i y dA_i}{\sum_i \int E_i dA_i} = \frac{\sum_i E_i \int_{\text{mat-}i} y dy dz}{\sum_i E_i \int_{\text{mat-}i} dy dz} = \frac{\sum_i E_i Q_i}{\sum_i E_i A_i} = y_0$$

C'est un centroïde pondéré par le module de Young

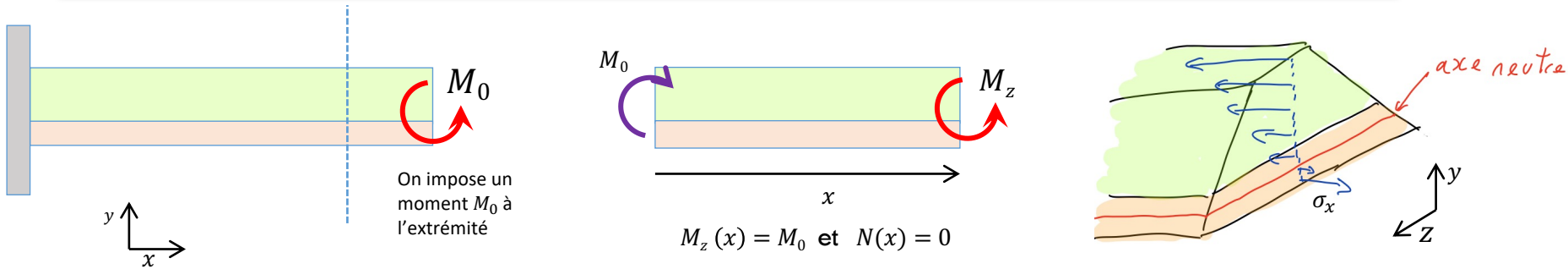
$$Q_i = \int_{\text{matériau } i} y dy dz$$

$$A_i = \int_{\text{matériau } i} dy dz$$

intégrales dans plan yz

Contraintes normales dans une poutre Composite

Lien entre Moment de flexion $M_z(x)$ et Contraintes normales $\sigma_x(x, y)$



Statique donc $\sum M = 0$ pour chaque section du plan yz

$$M_z(x) + \iint \sigma_x(x, y)(y - y_0) dA = 0$$

Moment des forces $\sigma_x(x, y)$ à partir de l'axe neutre

Contraintes normales dans une poutre Composite

Lien entre Moment de flexion $M_z(x)$ et Contraintes normales $\sigma_x(x, y)$

Nous pouvons calculer le moment créé par les contraintes normales (par rapport à l'axe neutre)

$$M_z(x) = - \iint \sigma_x(x, y)(y - y_0) dA = \sum_i \iint E_i \frac{(y - y_0)^2}{\rho} dA$$

$$M_z(x) = \frac{1}{\rho} \langle EI_{z,y_0} \rangle$$

avec $\langle EI_{z,y_0} \rangle = \sum_i E_i \iint (y - y_0)^2 dA = \sum_i E_i I_{z,y_0,i}$

Rigidité en flexion

$$\sigma_x(x, y) = - \frac{E(y)M_z(x)}{\langle EI_{z,y_0} \rangle} (y - y_0)$$

Formule flexion
pour poutres
composites

- Note: Si l'origine est prise sur l'axe neutre: $y_0 = 0$

$I_{z,y_0,i}$ = moment d'inertie de l'objet "i" par rapport à l'axe neutre y_0 du composite (pas par rapport à l'axe neutre de l'objet i !)

Exemple composite.

Poutre composite avec 2 charges ponctuelles selon y

- Trouver les coordonnées x et y des points où la contrainte normale sera maximum

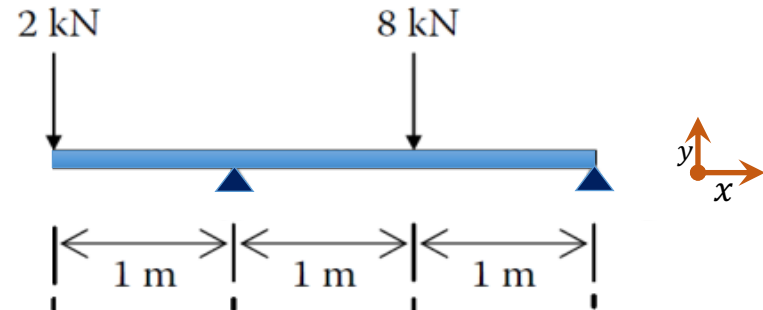
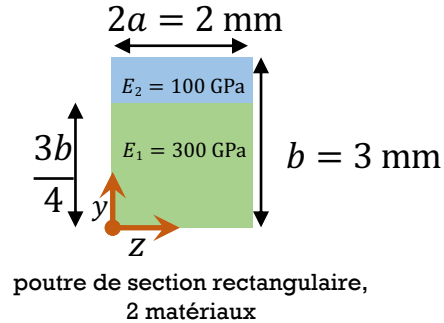
$$\sigma_x(x, y) = -\frac{E(y)M_z(x)}{\langle EI_{z,y_0} \rangle} (y - y_0)$$

- Pour maximiser σ_x nous devons:

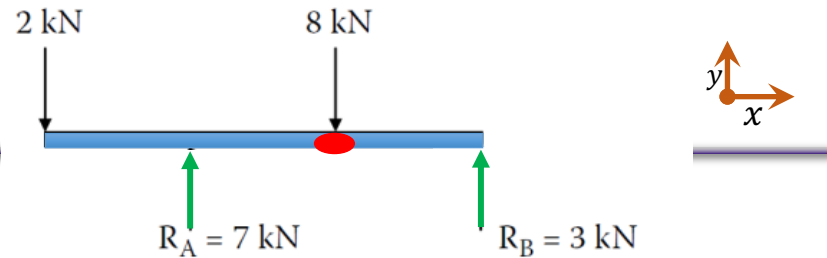
1. Trouver x pour lequel $M_z(x)$ est maximum
2. Trouver y pour lequel $E(y)(y - y_0)$ est maximum
3. Calculer $\langle EI_{z,y_0} \rangle$

$$E_1 = 300 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 100 \text{ GPa}$$



Exemple composite

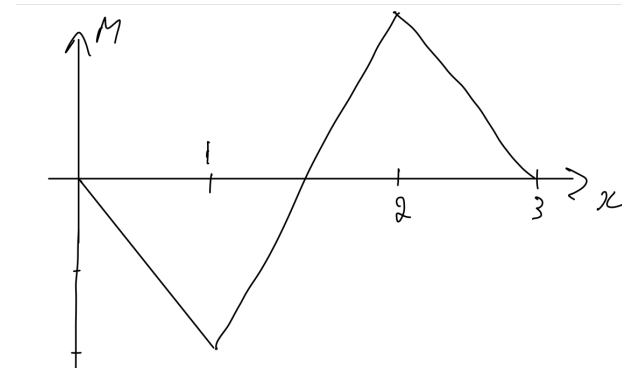


■ Partie 1:

- Calculer (puis maximiser) $M_z(x)$

$$V(x) = \begin{cases} -2 \text{ kN} & 0 \leq x \leq 1 \\ 5 \text{ kN} & 1 \leq x \leq 2 \\ -3 \text{ kN} & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$M_z(x) = \begin{cases} -2x \text{ kN.m} & 0 \leq x \leq 1 \\ 5x - 7 \text{ kN.m} & 1 \leq x \leq 2 \\ -3x + 9 \text{ kN.m} & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



- $M_z(x)$ est maximum pour $x = 2$ m;

$$M_z(x = 2 \text{ m}) = 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Exemple composite

■ Partie 2

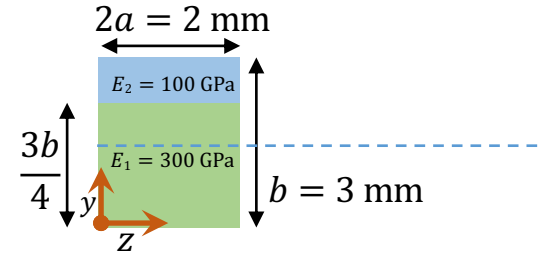
- Maximiser $E(y)(y - y_0)$
- Nous calculons d'abord la position de l'axe neutre:

$$y_0 = \frac{\sum_i \int E_i y dA}{\sum_i \int E_i dA}$$

$$y_0 = \frac{E_1 \int_{z=0}^{z=2a} dz \int_{\frac{3b}{4}}^{\frac{3b}{4}} y dy + E_2 \int_{z=0}^{z=2a} dz \int_{\frac{3b}{4}}^b y dy}{E_1 \int_{z=0}^{z=2a} dz \int_{\frac{3b}{4}}^{\frac{3b}{4}} dy + E_2 \int_{z=0}^{z=2a} dz \int_{\frac{3b}{4}}^b dy}$$

$$= \frac{300 \text{ GPa} \cdot 2a \cdot \int_{\frac{3b}{4}}^{\frac{3b}{4}} y dy + 100 \text{ GPa} \cdot 2a \cdot \int_{\frac{3b}{4}}^b y dy}{300 \text{ GPa} \cdot 2a \cdot \frac{3b}{4} + 100 \text{ GPa} \cdot 2a \cdot \frac{b}{4}}$$

$$y_0 = \frac{17}{40} b = 0.425b$$



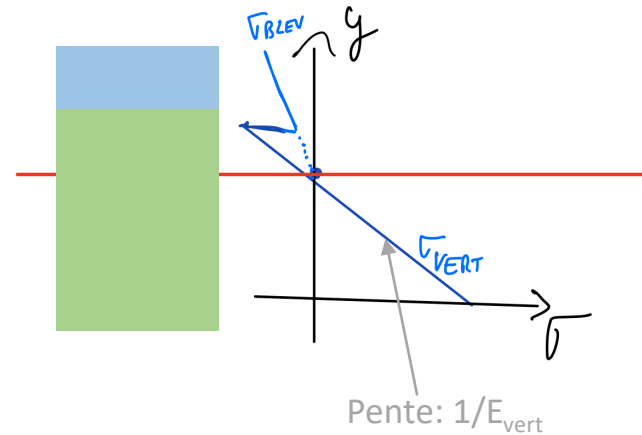
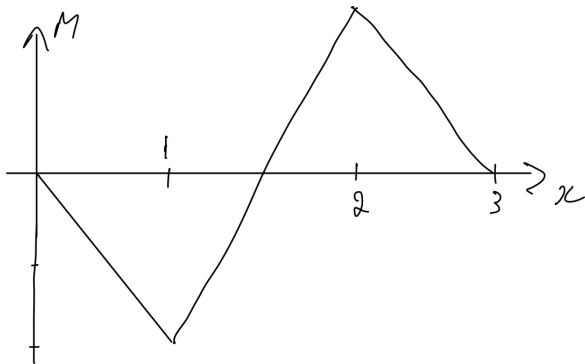
notez que

$y_0 < 0.5b$ car $E_1 > E_2$

$y_0 > \frac{3}{8}b$ car la partie bleue existe

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_z(x)}{\langle EI_{z, y_0} \rangle} E(y)(y - y_0)$$

$$M_z(x) = \begin{cases} -2x \text{ kN.m} & 0 \leq x \leq 1 \\ 5x - 7 \text{ kN.m} & 1 \leq x \leq 2 \\ -3x + 9 \text{ kN.m} & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



Pour un x donné

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_z(x)}{\langle EI_{z, y_0} \rangle} E(y)(y - y_0)$$

■ Partie 2: Maximiser $E(y)(y - y_0)$

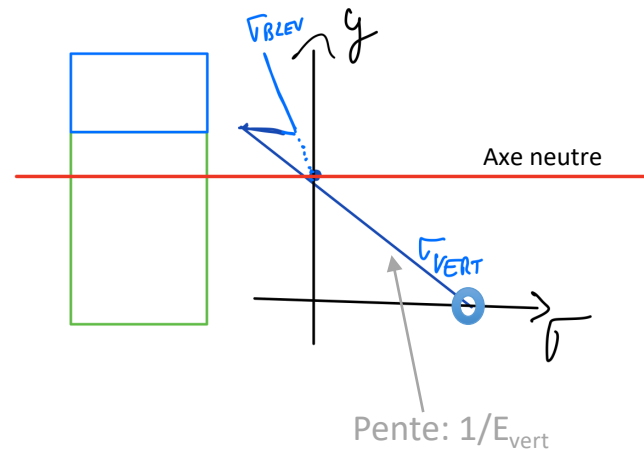
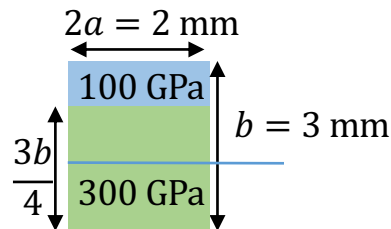
□ Nous avons trouvé l'axe neutre: $y_0 = \frac{17}{40}b$

□ Nous comparons $E_i(y - y_0)$ sur la surface supérieure et la surface inférieure de la poutre, car c'est à ces endroits que $(y - y_0)$ est le plus grand.

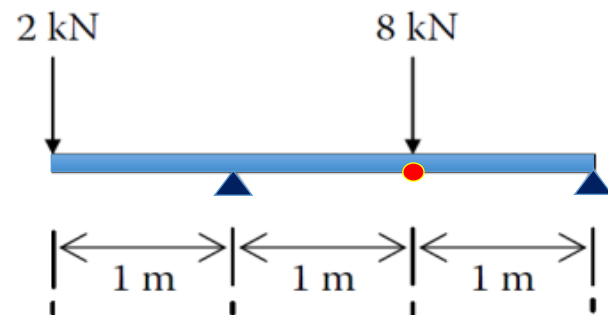
$$\bullet E(y_{top})|y_{top} - y_0| = E(y = b) \left| b - \frac{17}{40}b \right| = 100\text{GPa} \cdot \frac{23}{40}b = 57.5 \text{ GPa} b$$

$$\bullet E(y_{bot})|y_{bot} - y_0| = E(y = 0) \left| 0 - \frac{17}{40}b \right| = 300\text{GPa} \cdot \frac{17}{40}b = 127.5 \text{ GPa} b$$

□ Le maximum de $E(y)(y - y_0)$ est donc tout en bas de la poutre à $y = 0$



La contrainte est maximum à $x=2$ m et $y=0$ m



Exemple composite

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{E(y)M_z(x)}{\langle EI_{z,y_0} \rangle} (y - y_0)$$

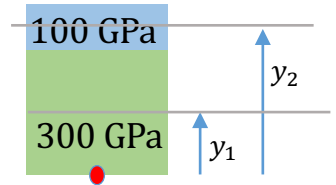
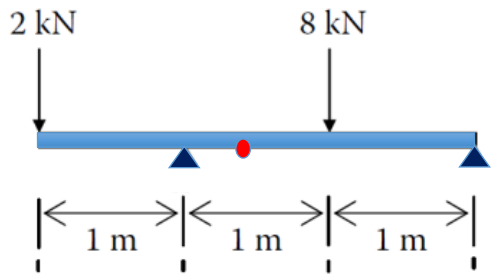
■ Partie 3: Calcul de $\langle EI_{z,y_0} \rangle$

$$\langle EI_{z,y_0} \rangle = E_1 I_{1,y_0} + E_2 I_{2,y_0} =$$

$$= E_1 (I_{1,y_1} + A_1 (y_1 - y_0)^2) + E_2 (I_{2,y_2} + A_2 (y_2 - y_0)^2)$$

(utiliser Steiner pour décaler les axes pour le calcul des I_i, y_0)

$$I_{1,y_1} = \frac{(2a)(3b/4)^3}{12} \quad I_{2,y_2} = \frac{(2a)(b/4)^3}{12}$$



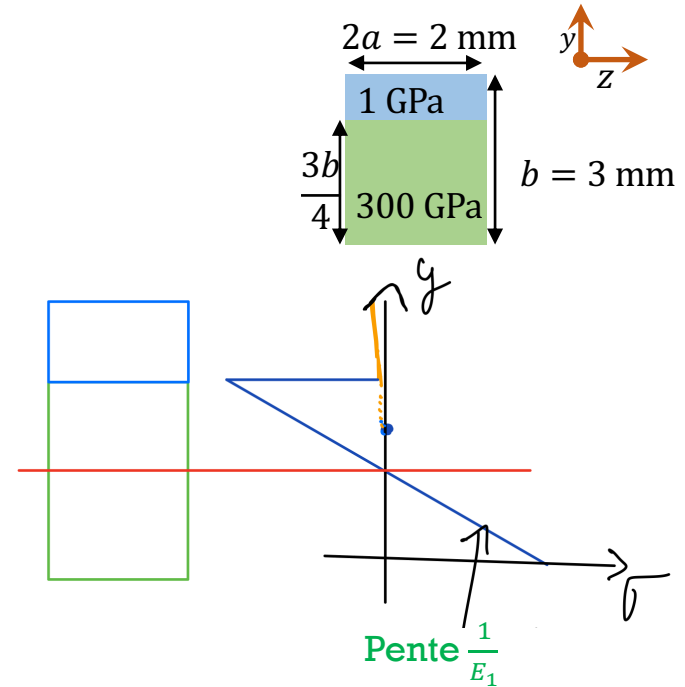
$$y_1 = \frac{3b}{8}$$

$$y_2 = \frac{b}{8} + \frac{b}{2}$$

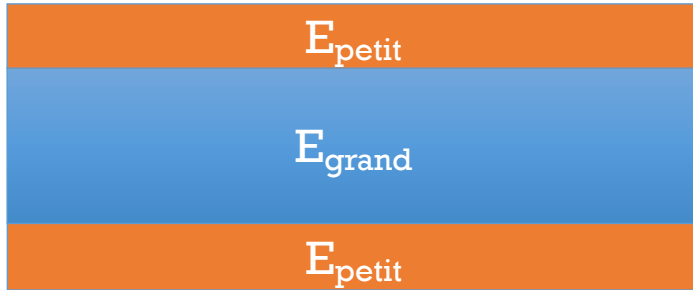
Puis un peu d'algèbre pour trouver $\langle EI_{z,y_0} \rangle \dots$

Est-ce que le maximum de $E(y)(y - y_0)$ aurait pu être à l'interface?
 Par exemple, si la partie bleu est souple, eg $E_{\text{bleu}} = 1 \text{ GPa}$?

- Dans ce cas, les contraintes à $y = 0$ (en bas) et à $y = 3b/4$ (l'interface) seront quasi-égales, et toutes 2 beaucoup plus grandes qu'à $y=b$ (le dessus)
- Mais toujours contrainte bas $>$ contrainte à interface, car y_0 sera toujours juste un poil plus haut que $3b/8$, car la partie molle bleue décalera toujours l'axe neutre vers le haut.



Ici, à 3 couches, la contrainte max est aux interfaces



Dans ce cas, la contrainte peut être maximum aux interfaces plutôt qu'aux bords de la poutre

