Micro-200

SEMAINE 6a

Force internes dans les poutres non-déformées

PARTIE 1: (slide 4 - 14)
Intro sur les 4 prochaines semaines

Force internes dans les **poutres non-déformées**

PARTIE 2: (slide 15-49)
- Par méthode section

PARTIE 3: (slide 50-64)
- Par relation différentielles

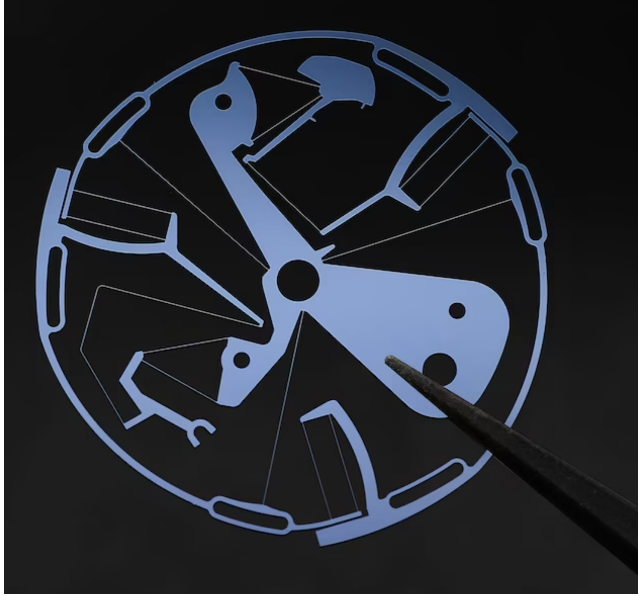
PARTIE 4: (slide 65-85)
- Pour les forces distribuées

v. 2025

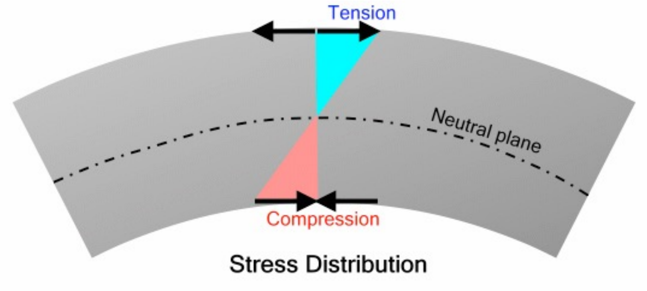
PROGRAMME DU COURS, semaines 6-10

6	14.10	Forces internes dans les poutres non-déformées	x	
6	16.10	$\varepsilon(y)$ et σ(y) en flexion pure. Moment d'intertie	x	Série 6
7	28.10	Poutres chargées axialement. Poutres composites	x	Série 6
7	30.10	Quiz + Session questions & réponses D. Briand		Série 1-5
8	04.11	Examen mi-semestre D. Briand		
8	06.11	Flèches des poutres	x	Série 7
9	11.11	Flèche pour guidage flexible	x	Série 8
9	13.11	Poutres statiquement indéterminées	x	Série 8
10	18.11	Poutres statiquement indéterminées. Flambage	x	Séries 9
10	20.11	Flambage	x	Série 10

Poutres



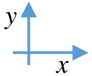
Defy-lab, Zenith



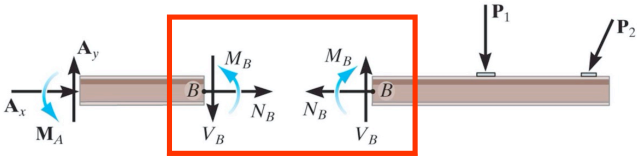
https://www.youtube.com/watch?v=lWiJ0AS7nlw


70

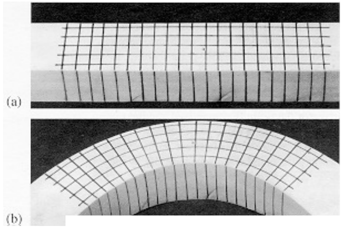
Poutres:
Sujets clés des 4 prochaines semaines 1/2

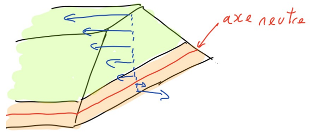


1. **Forces et Moment internes** dans les poutres soumises à des charges (mais *pas encore déformées*): $N(x), V(x), M(x)$

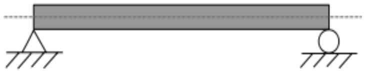


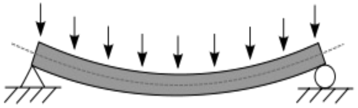
2. **La poutre est déformée**: trouver $\boldsymbol{\sigma_x(x,y)}$ **et** $\boldsymbol{\varepsilon_x(x,y)}$
   a) Poutre mono-matériel en flexion
   b) Poutre composite en flexion
   c) Poutres chargées axialement



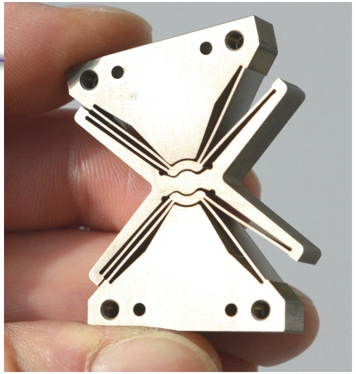


3. **Déflection des poutres (flèche):** comment se déforme l'axe neutre sous des charges? requiert $M(x)$ du point 1.



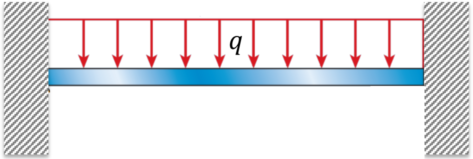


Poutres:
Sujets clés des 4 prochaines semaines 2/2

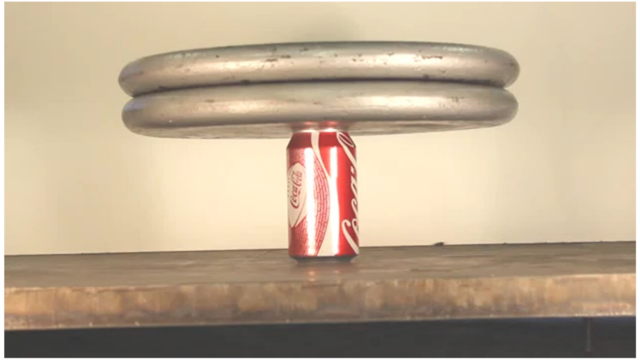


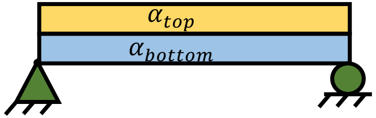
4. Intro guidage flexible

5. Poutre statiquement indéterminée



6. Flambage

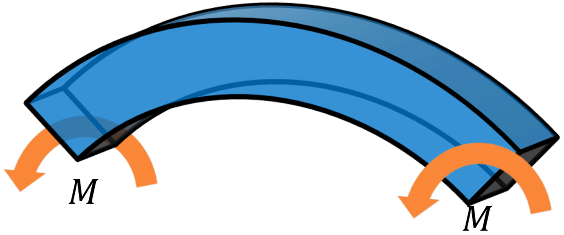




Dans cette partie du cours (semaine 7-10), pas de torsion

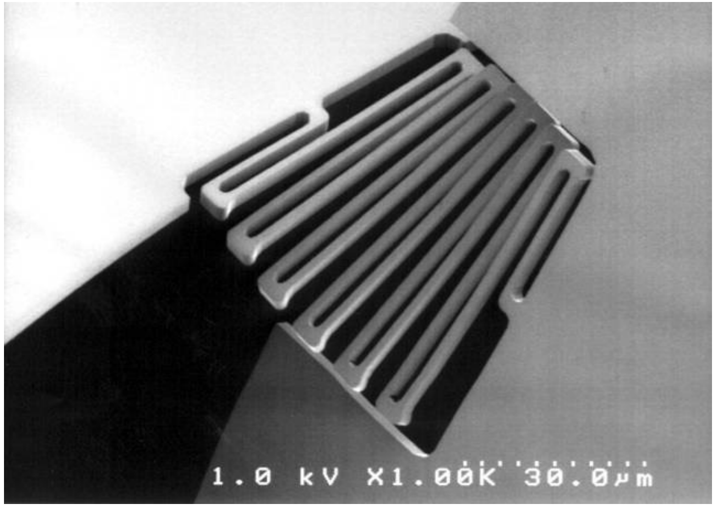
Déformation axiale

Torsion

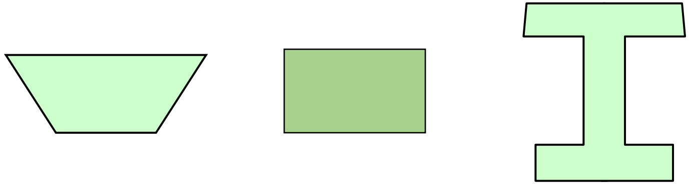


Déformation / flexion

Poutres: l’élément de base des structures

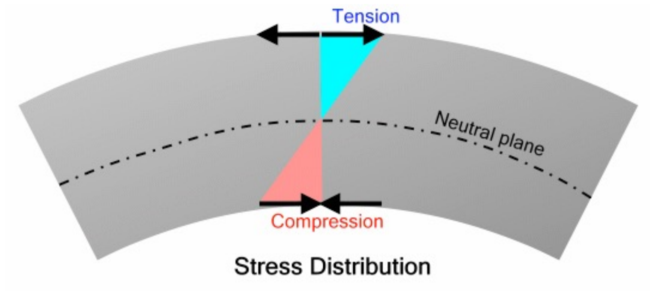


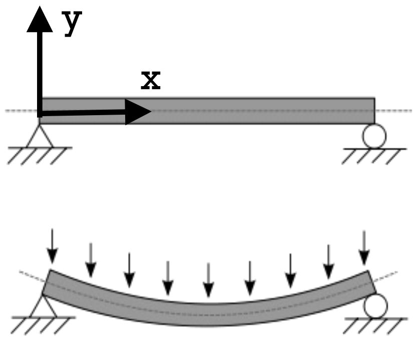
(Lucent Technologies)



Poutre: définitions

- Les poutres sont des éléments structurels qui ont une dimension beaucoup plus longue que les deux autres
- Une poutre est conçue pour résister à des charges, principalement en flexion (*bending*)
- Une poutre se déforme sous des charges (= des forces perpendiculaires à la poutre), à des forces axiales, et des moments externes de flexion.
- La déflection de la poutre (la flèche) est une fonction de la coordonnée selon la dimension la plus longue (pour nous: x). **Flèche** $= \ w(x)$
- La contraintes σ_x et la déformation relatives ε_x sont une fonction de x et y
  $\varepsilon_x(x, y) \qquad \sigma_x\,(x, y)$

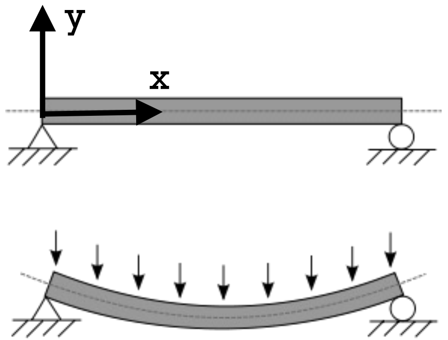


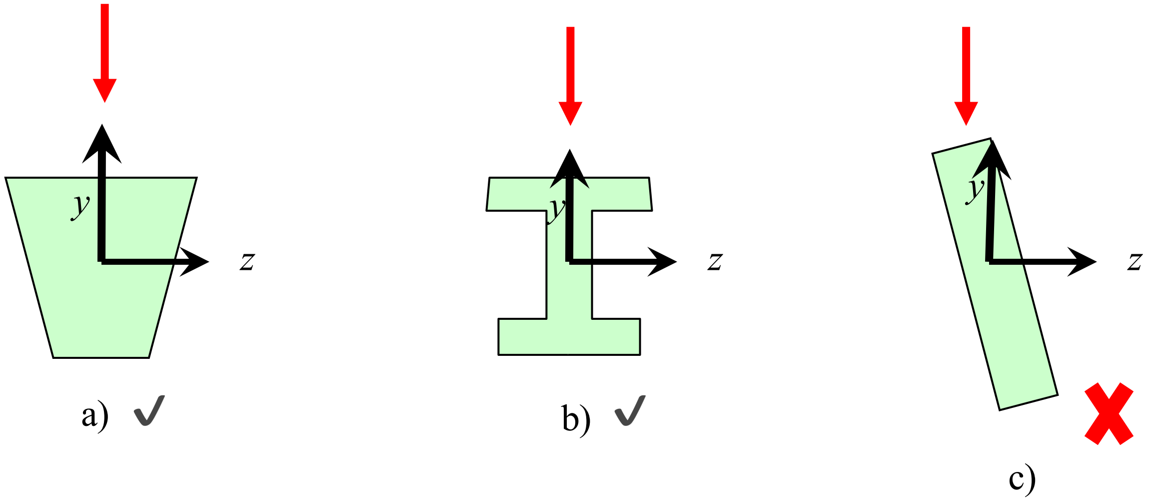


Poutres

Considérations

- Nous n'étudierons que des cas 2D
- L'axe *x* est selon la longueur de la poutre.
- fléchissement selon **y**.
- Moments sur l'axe **z**.
- Nous chercherons:
  - 1- contraintes (surtout la contrainte maximum pour savoir si la poutre se casse)
  - 2 - fléchissement de la poutre.



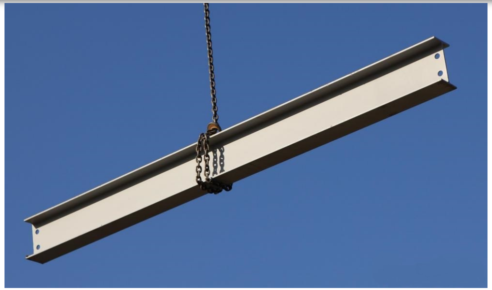


Charge en *y*, poutre longueur en *x*, vue en coupe d'une section de poutre plan *yz*

- Les sections de poutre a) et b) sont symétriques par rapport à *y*,
- La section de poutre c) est non-symétrique par rapport à *y*.
- Dans le cas 2c, charge en *y* et la flèche **ne sont plus coplanaires**.
- <u>Nous n'allons étudier pour le moment que les cas a) et b)</u>

Poutres

- Construction

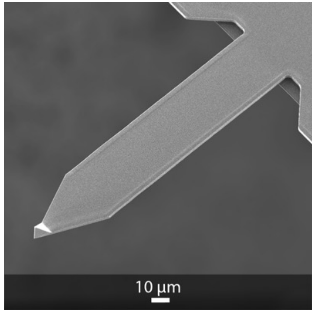


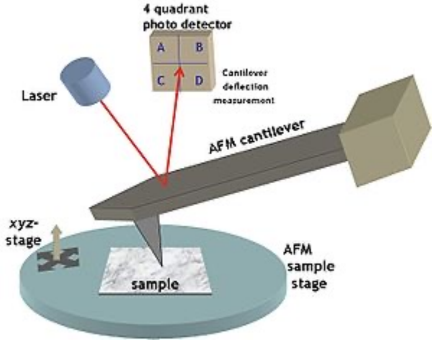
- Microtechnique?

Microsystèmes = Poutres micro-usinées (guidages flexibles, préhenseurs, pointe AFM…)

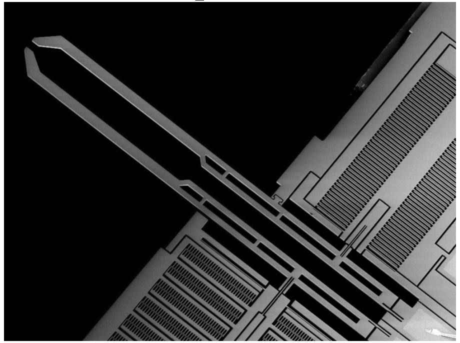
Atomic force microscope (AFM)

Manufacturer: OPUS by MikroMasch (www.opustips.com)



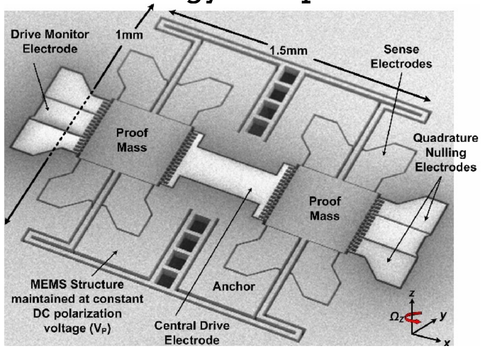


Micro-préhenseur



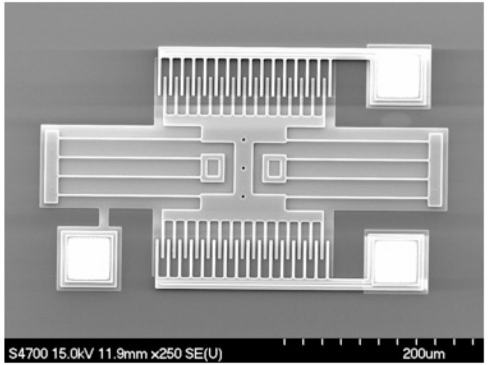
http://www.femtotools.com

gyroscope



Sharma, Ayush et al. 2008 IEEE 21st International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (2008): 6-9.

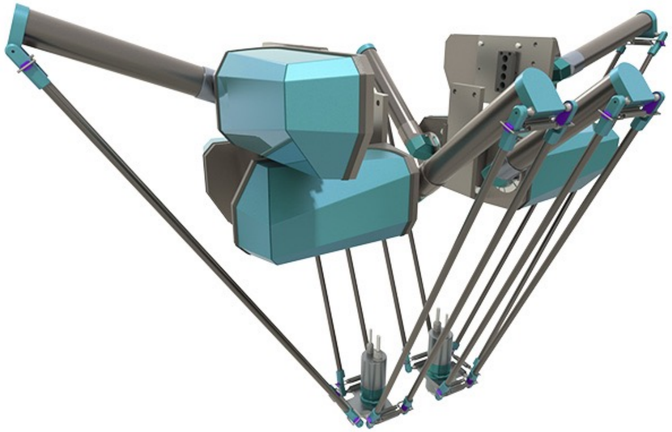
résonateur

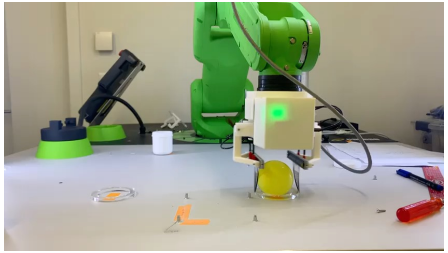


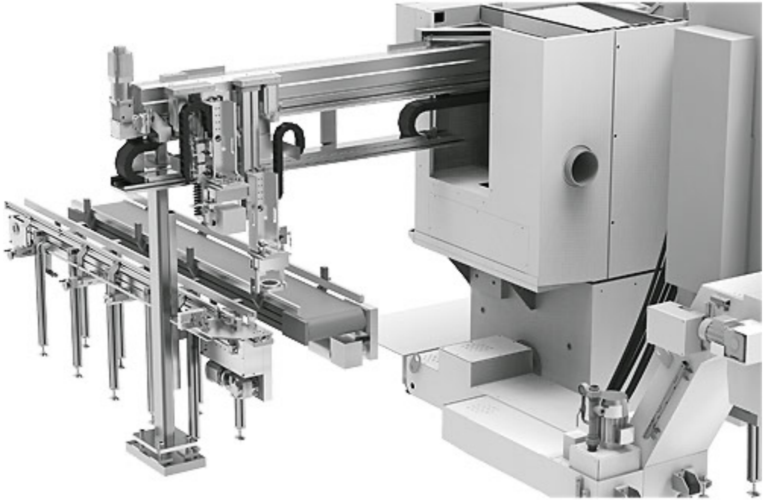
Oscillateur de montre

Defy-lab, Zenith

Exemples de Poutres en robotique







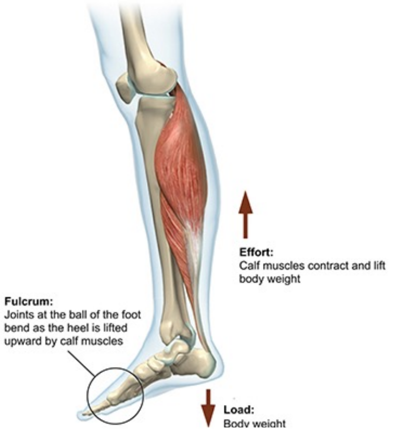
festo.com

Quiz session: micro200

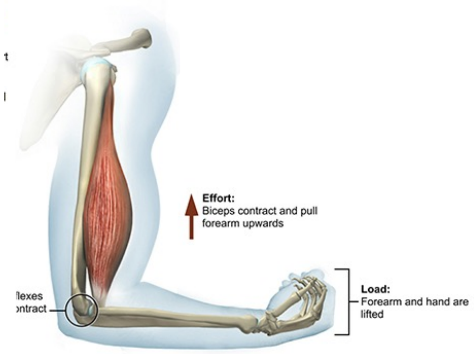
Question

Exemples de Poutres en biomécanique

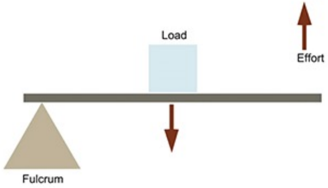
Human foot



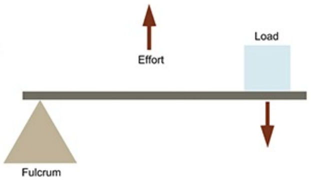
Human arm



1.



2.

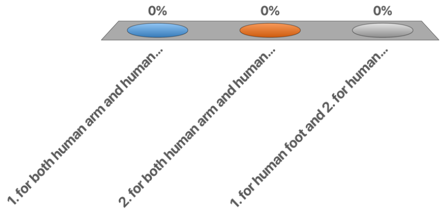


https://www.visiblebody.com/blog/biomechanics-lever-systems-in-the-body

A. 1. for both human arm and human foot

B. 2. for both human arm and human foot

C. 1. for human foot and 2. for human arm



Quiz session: micro200

Solution

Exemples de Poutres en biomécanique

Semaine 6a- partie 2

Forces internes dans une poutre: méthode des sections

!! Ici, la poutre ne se déforme pas

Chapitre 4 de Geere & Goodno

Objectifs d'apprentissage, partie 2 de semaine 6a

- en 2D, savoir calculer et comprendre les forces et moments internes $N(x), V(x)$ et $M(x)$ pour une poutre soumise à des charges

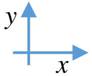
- Maitriser la méthode des sections pour calculer $N(x), V(x)$ et $M(x)$

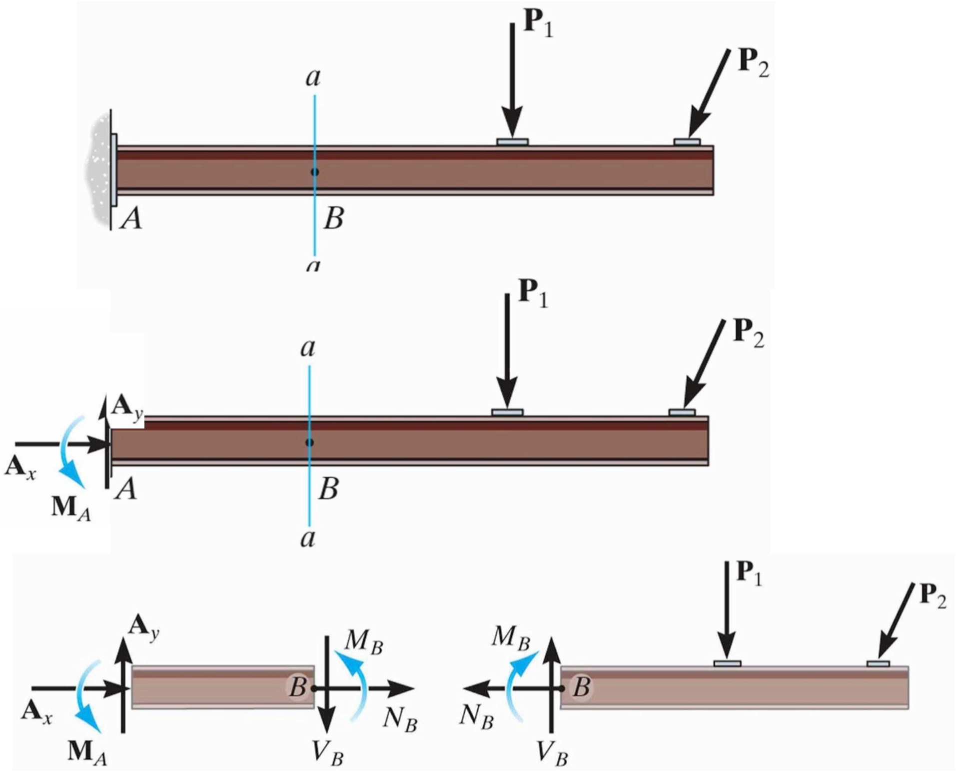
- Savoir utiliser les conditions aux supports ou aux bords pour vérifier la cohérence de vos calculs

C'est fort sympa, mais à quoi ça sert?
Entre autres:

- prédire déformation de la poutre , car $\text{flèche} = \iint \overrightarrow{M(x)}$
- Prédire si la poutre va casser (ou connaitre la marge de sécurité)

FORCES INTERNES



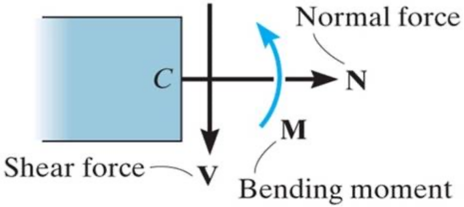


Nous cherchons: $V(x), N(x)$ **et** $M(x)$

(poutres magiques sans masse)

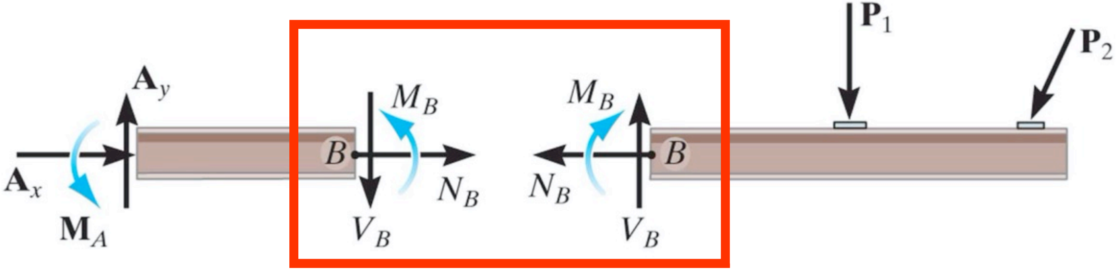
Aujourd'hui, nous allons négliger les dépendances en *y* des forces internes (ça changera au prochain cours)

FORCES INTERNES en 2D



En 2D (plan) les forces internes sont:

- Force axiale de Traction (*normal force*) $\vec{N}$
- Force de Cisaillement (*shear force*) $\vec{V}$
- Moment de Flexion (*bending moment*) $\vec{M}$



- Les forces et moments sur les coupes gauche et droite ont la même norme, mais de sens opposé
- quand on « assemble » les 2 morceaux, les forces et les moments doivent s'annuler.

FORCES INTERNES en 3D

- 3 forces et 3 moments internes
  - 1 force axiale

$$N = N(x)$$

  - 2 forces de cisaillement

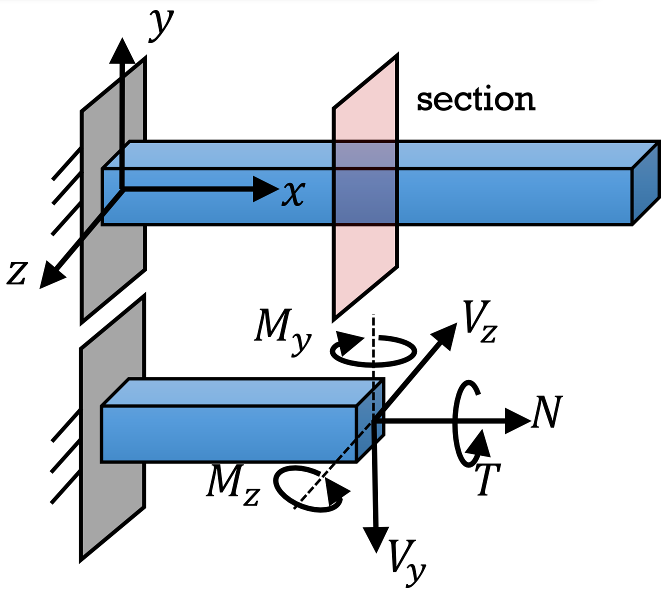
$$V_y = V_y(x), V_z = V_z(x)$$

  - moment de torsion

$$T = T(x)$$

  - 2 moment de flexion

$$M_z = M_z(x), M_y = M_y\,(x)$$



- Pour les semaines 7-10, nous allons rester en 2D.

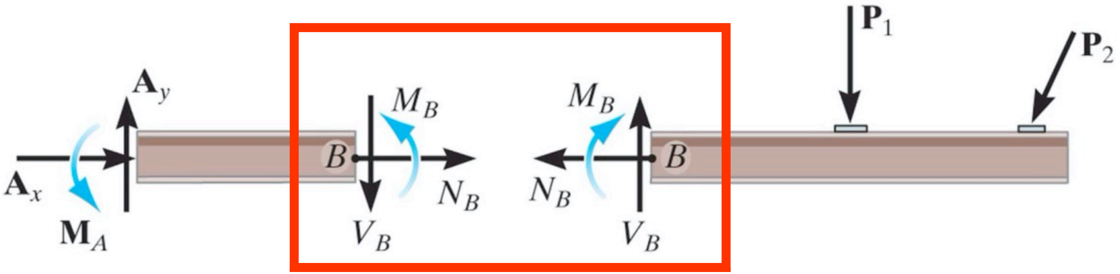
Pourquoi des conventions de signes?

- pour simplifier la vie pour interpréter (par exemple compression vs. traction en fonction du signe de N)
- pour avoir le bon signe dans relations différentielles entre la charge $q(x)$, $V(x)$, et $M(x)$
- (pour une méthode systématique)

Conventions pour sens des forces internes

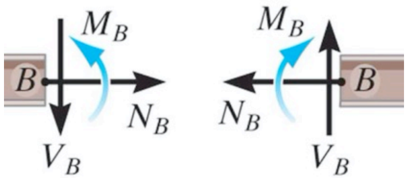
- Réactions aux supports: dessinez les dans les sens que vous préférez, ou avec votre intuition physique

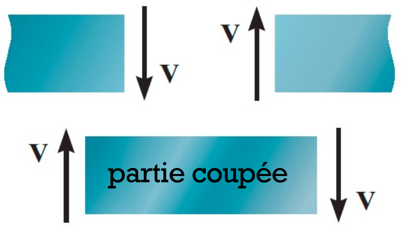
- Mais pour les force internes: **respectez svp cette convention:**



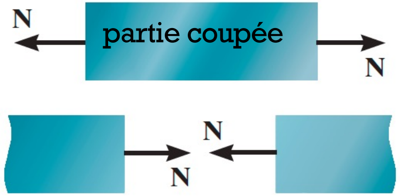
1. force normale: sort de la face de chaque coupe
2. force de cisaillement: vers le bas à gauche, vers le haut à droite
3. moment de flexion: + à gauche, - à droite

action – réaction: si vous choisissez la direction d'une force d'un côté de la coupe, vous n'avez plus le choix de l'autre côté!

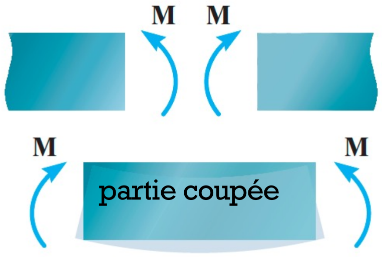




Positive shear



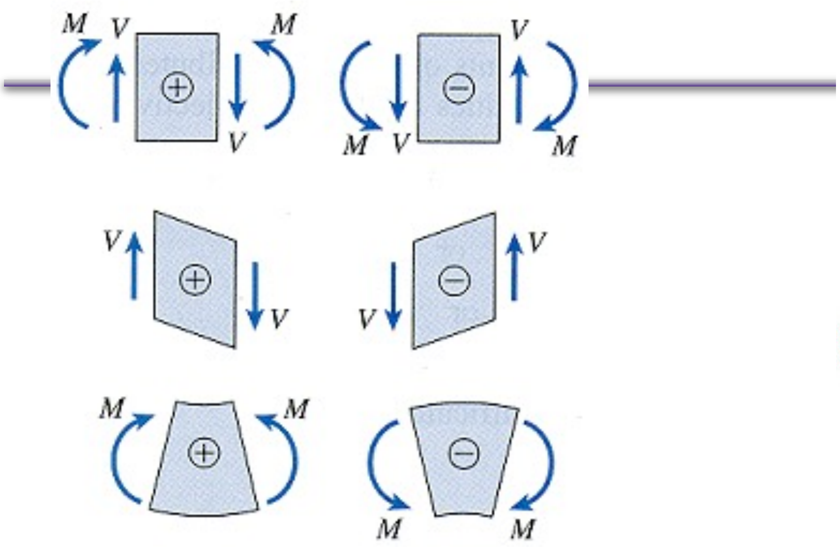
Positive normal force

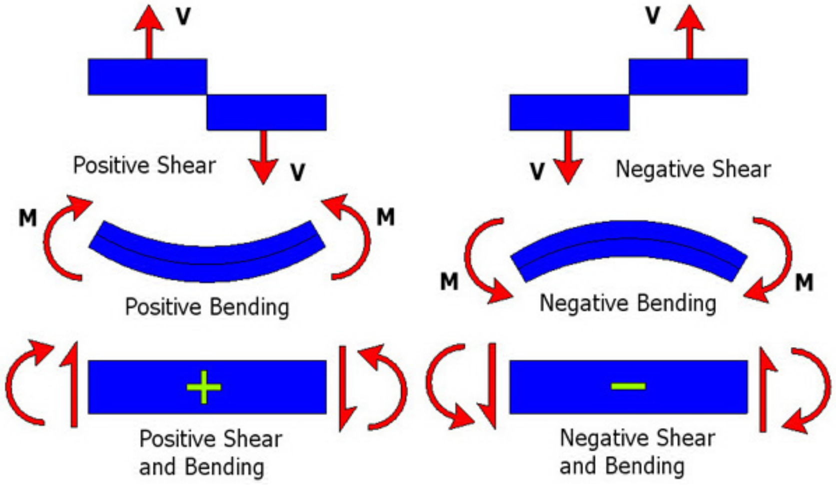


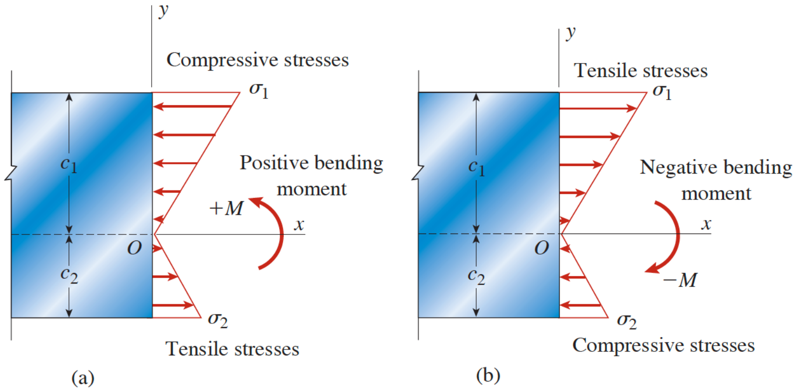
Positive moment

Convention de signes:

- Traction N positif si met en tension
- Cisaillement V positif si crée une rotation sens horaire
- Moment de flexion M positif si crée forme concave vers le haut: M positif si fibres du bas sont en traction, et fibres du dessus en compression







Convention de signes:

- Traction N positif si met en tension
- Cisaillement V positif si crée une rotation sens horaire
- Moment de flexion M positif si crée forme concave vers le haut: M positif si fibres du bas sont en traction, et fibres du dessus en compression

Comment résoudre les problèmes de contraintes? (=trouver les forces et moments internes dans les poutres)

2 méthodes valables:

1. **Méthode Section: « couper » en sous-systèmes et utiliser**
   $$\Sigma F = 0 \qquad \Sigma M = 0$$

OU

2. **Méthode Différentielle: Utiliser les relations différentielles entre charge $q(x), V(x), M(x)$ ainsi que les conditions au bord.**

Dans les deux cas, il faut tout d'abord :

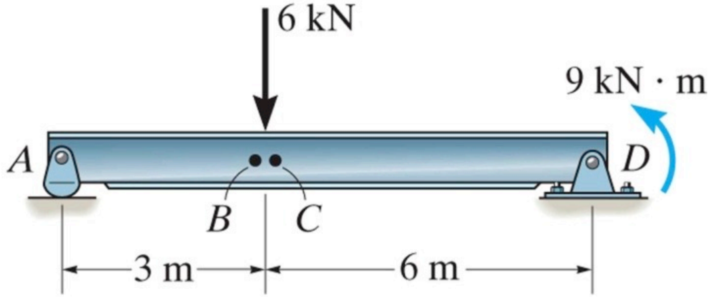
1. Diagramme des forces du système complet
2. Calcul des forces de réaction

- Méthode Sections: donne $N(x), V(x)$ et $M(x)$
- Méthode Différentielle: ne donne que $V(x)$ et $M(x)$
- On peut combiner les méthodes
  - Par exemple, trouver $V(x)$ par section, puis $M(x)$ par intégration de $V(x)$
  - On peut utiliser une méthode pour vérifier l'autre

Méthode des sections (*N, V, M*)

6 étapes:

1. Dessiner le diagramme des forces du système complet
2. Calculer les réactions au supports
3. Faire les coupes virtuelles de la poutre pour faire apparaitre ces forces + moments internes.
   I. *Il faut une coupe par « zone » de forces externes constante.*
   II. *Ne pas couper sur une force ponctuelle*
4. Introduire forces et moments externes au sous-systèmes (force de traction, force de cisaillement, moment de flexion)
5. Pour chaque section , utiliser les conditions d'équilibre: $\Sigma F = 0$, $\Sigma M = 0$
   - Choisir le sous-système (droite ou gauche) pour lequel c'est le plus facile!
   - Répéter en fonction du nombre de sous-systèmes
6. Représenter et interpréter



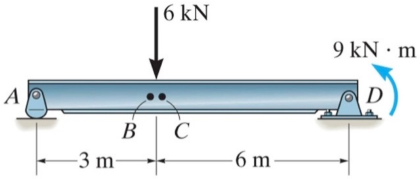
Exemple: Calculer les contraintes internes (force et moments) le long de cette poutre

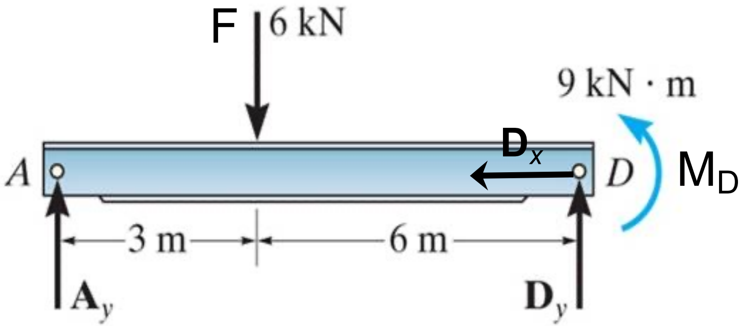
nous imposons:

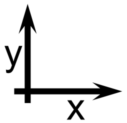
- un Moment (couple) d'un moteur en D de 9 kN.m (dans le sens indiqué)
- une Force externe de 6 kN (dans le sens indiqué)

nous négligerons la masse de la poutre

Étape 1 + 2: Calculer les réactions aux supports







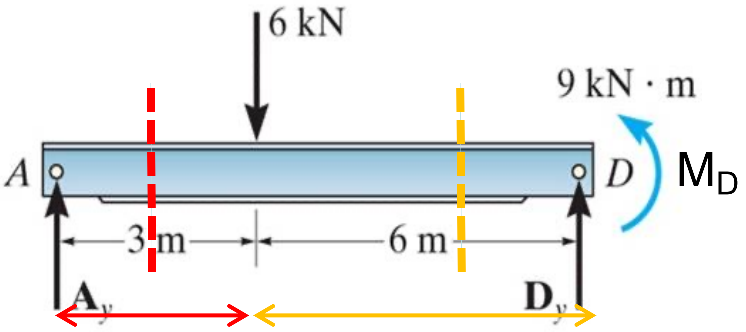
3 inconnus: $D_x, A_y,$ et D_y. 3 équations

$$\sum F_x = 0$$
$$D_x = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M}_{\text{point D}} = 0$$
$$M_D + 6F - 9A_y = 0$$
$$A_y = \frac{1}{9}(M_D + 6F) = 5\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0$$
$$A_y + D_y = F$$
$$D_y = F - A_y = 1\text{ kN}$$

(rappel. Ici, M_D n'est pas une réaction du support: c'est un moment pur imposé par un moteur)

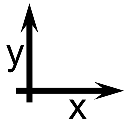


- Où couper la poutre pour faire apparaitre les force et moments internes ?
- Combien de coupes?

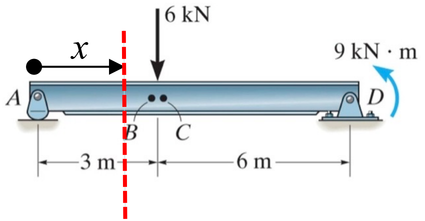
- Nous aurons une expression $N_1(x), V_1(x)$, et $M_1(x)$ entre A et B
- Nous aurons une expression $N_2(x), V_2(x)$, et $M_2(x)$ entre B et D

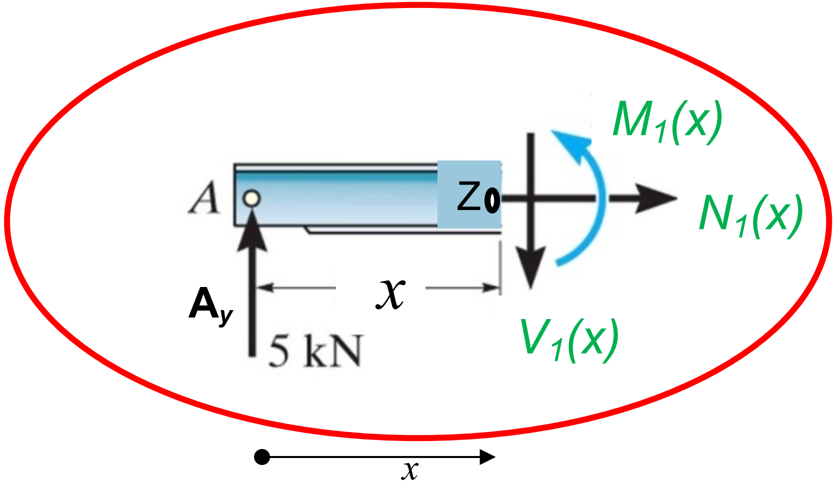
Voir Q1 de la série 6a

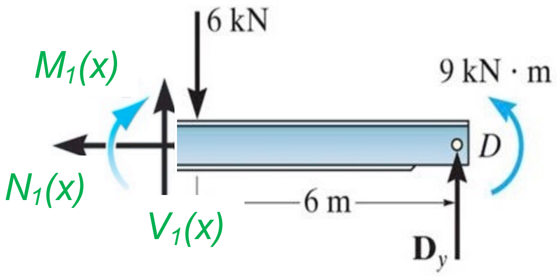
étape 2a: Isoler un sous-système,
étape 3a. introduire **forces & moments «internes»**



2a) Première coupe: entre A et B
Nous cherchons $N_1(x), V_1(x)$, et $M_1(x)$



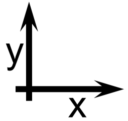




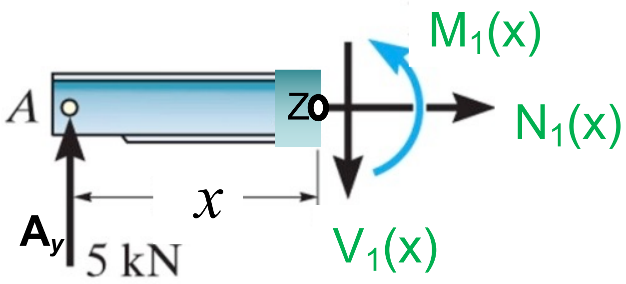
Résultats valables que pour $0 < x < 3$!!!

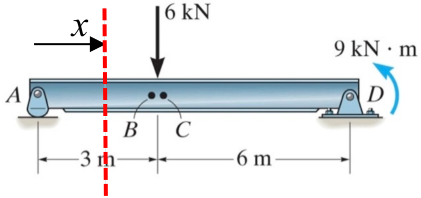
On peut résoudre le système de gauche, ou de droite. Ça donnera le même résultat.
On choisit donc le côté le plus simple pour les calculs

Étape 4a. Equilibre pour les sous-systèmes, coupe 1



a) Première coupe entre A et B (distance *x* de A)





Résultats valables que pour $0 < x < 3$!!!

$$\sum F_x = 0$$
$$N_1(x) = 0$$

$$\sum F_y = 0$$
$$A_y - V_1(x) = 0$$
$$V_1(x) = A_y$$

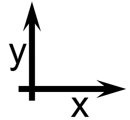
$$\sum \overrightarrow{M}_{\text{point Z}} = 0$$
$$M_1(x) - xA_y = 0$$
$$M_1(x) = xA_y$$

ou

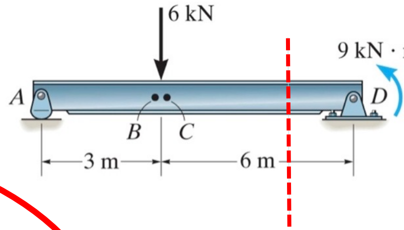
$$\sum \overrightarrow{M}_{\text{point A}} = 0$$
$$M_1(x) - xV_1 = 0$$
$$M_1(x) = xA_y$$

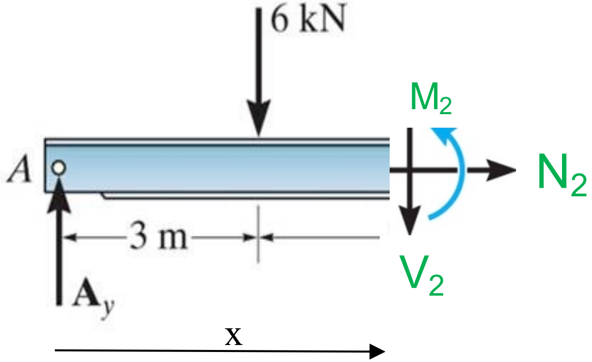
Libre choix du point où vous calculez le moment (un seul par dessin)

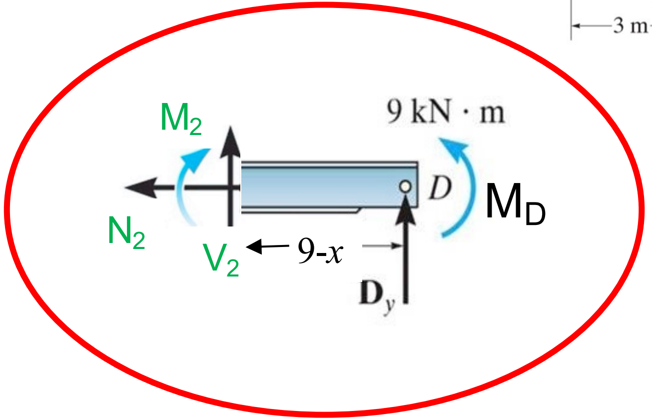
Étape 4b. Equilibre pour les sous-systèmes, coupe 2



b) Deuxième coupe: entre C et D







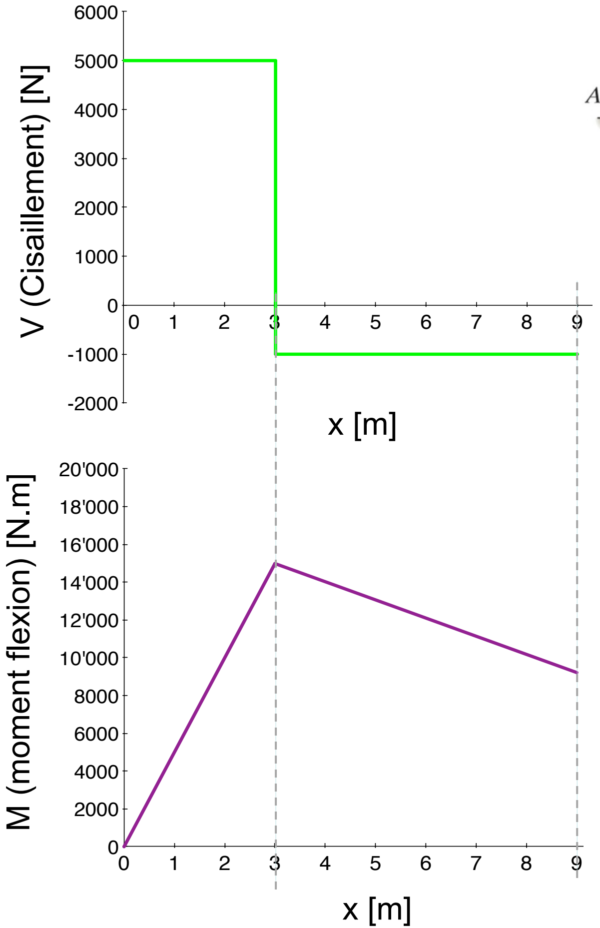
$$\sum F_x = 0$$
$$N_2(x) = 0$$

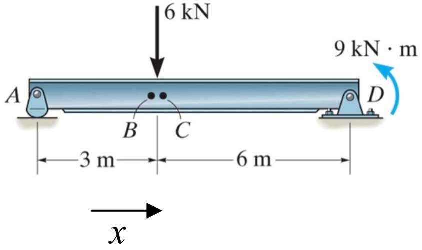
$$\sum F_y = 0$$
$$D_y + V_2(x) = 0$$
$$V_2(x) = -D_y$$

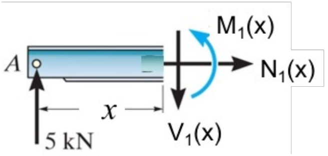
$$\sum M_{\text{point D}} = 0$$
$$M_D - (9-x)V_2(x) - M_2(x) = 0$$
$$M_2(x) = M_D + (9-x)D_y$$

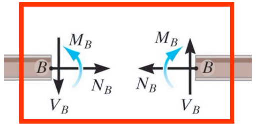
Résultats valables que pour $3 < x < 9$!!!

Étape 5: Représentation des contraintes en fonction de *x*









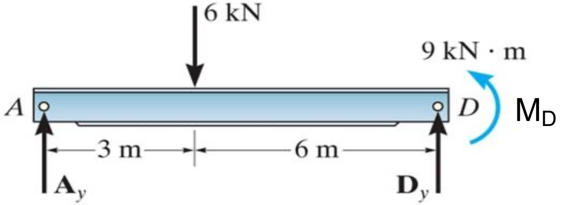
$N_1(x) = N_2(x) = 0$

$V_1(x) = 5000$ [N]
$V_2(x) = -1000$ [N]

$M_1(x) = 5000\,x$ [N.m]
$M_2(x) = 9000 + 1000\,(9-x)$ [N.m]

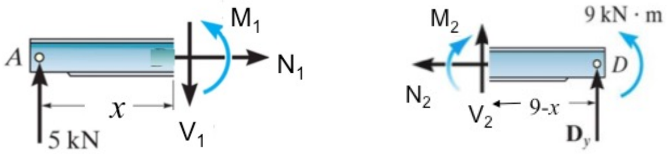
Attention aux signes et aux conventions !

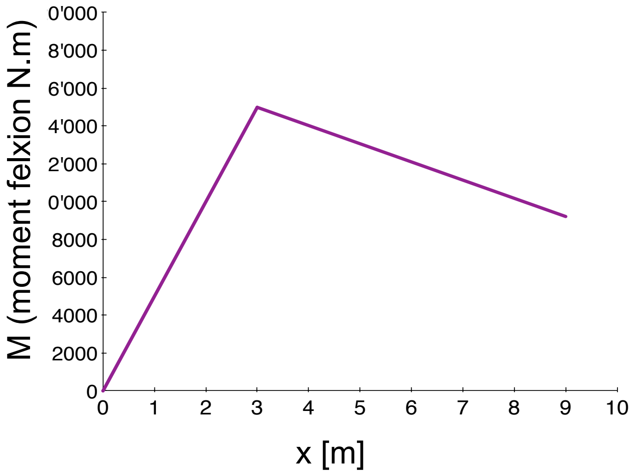
Les conditions aux bords servent de contrôle:
Ils doivent être égales aux forces/moments de support!



Que se passe-t-il quand x tends vers 0 ou vers 9 m?

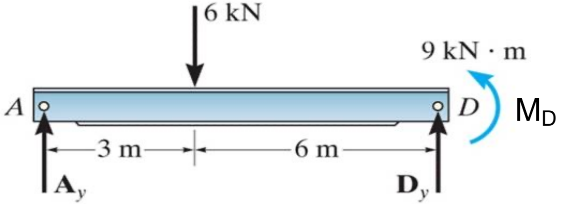
M_A (x=0) = 0
M_D (x=9) = 9 kN.m



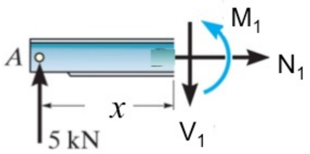


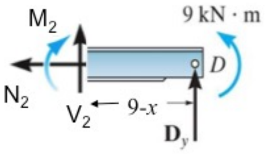
$$M_1(x = 0) = 0 \qquad M_2(x = 9) \;=\; M_D$$

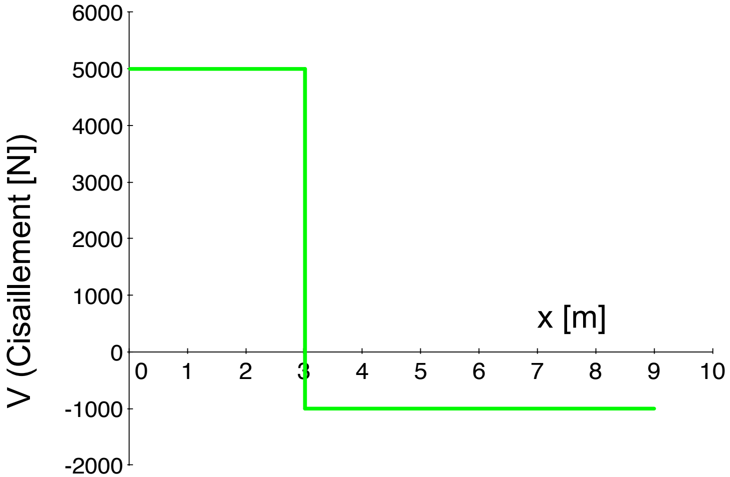
Les conditions aux bords servent de contrôle:
Elles doivent être égales aux forces de support!



A_y = 5 kN
D_y = 1 kN





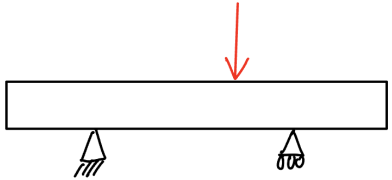


$V_1(x = 0) = A_y$

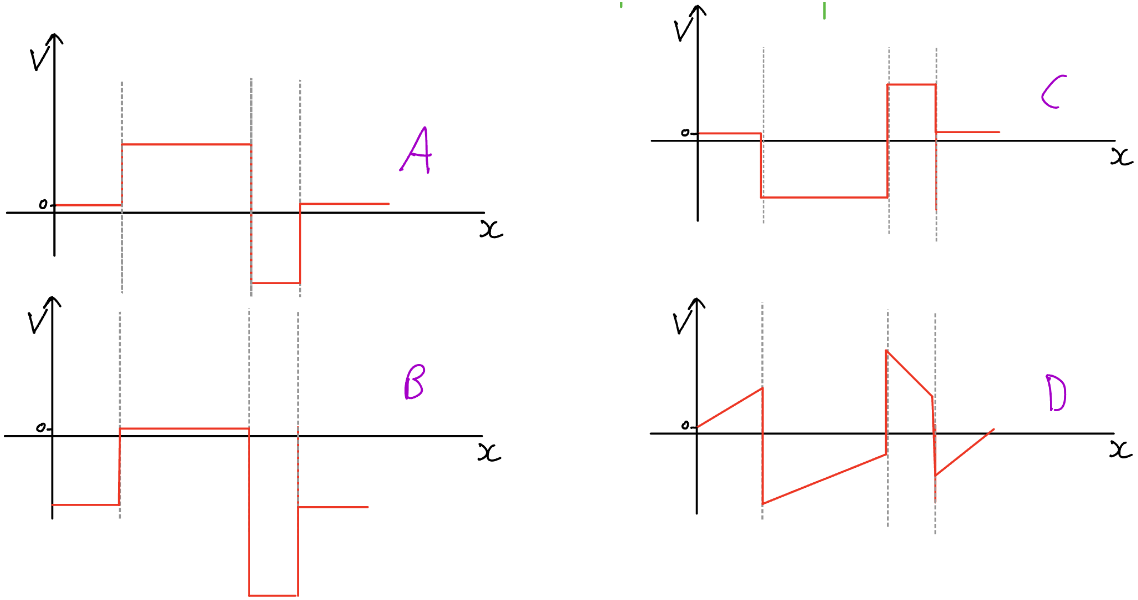
$V_2(x = 9) = -D_y$

Quiz session: micro200

Question



Quel dessin est juste pour V(x) avec nos conventions ?



A. A

B. B

C. C

D. D

Quiz session: micro200

Solution

Mais où “couper” ?

- **But: Couper afin d’avoir un système d’équations pour N(x), V(x), et M(x), valable sur une zone bien définie**

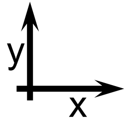
- **Ne JAMAIS couper au point d’application d’une force ponctuelle!**
- **Ne JAMAIS couper où il y a un changement abrupt de forces**

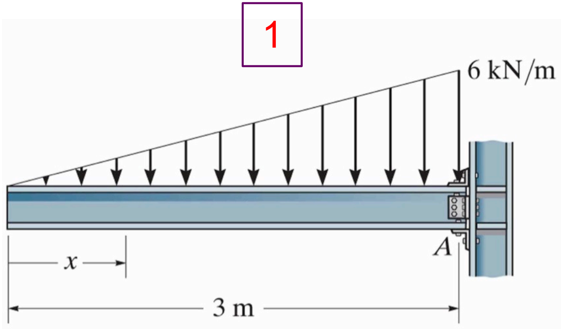
Couper le moins possible! (chaque coupe = forces à calculer).

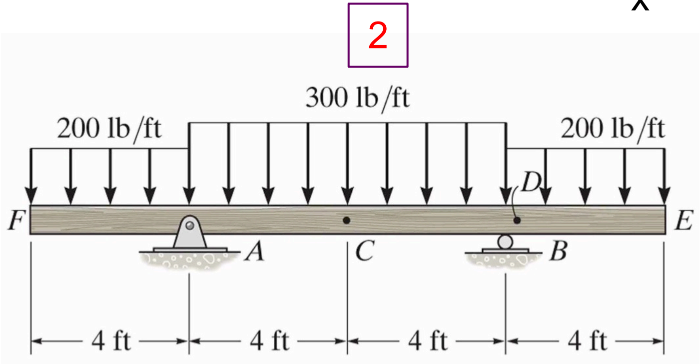
Donc:
- Couper entre les forces, pour les forces ponctuelles
- Couper dans une zone où la force distribuée change de façon continue (sans changement abrupte)

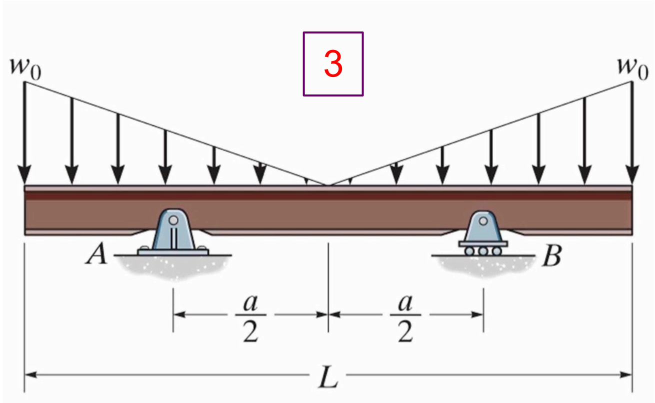
Ne couper que si la coupe change le diagramme des forces

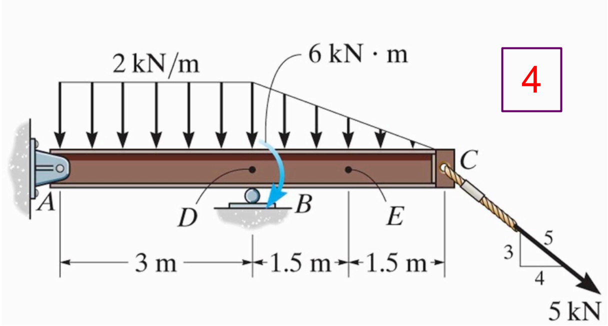
Où “couper”?

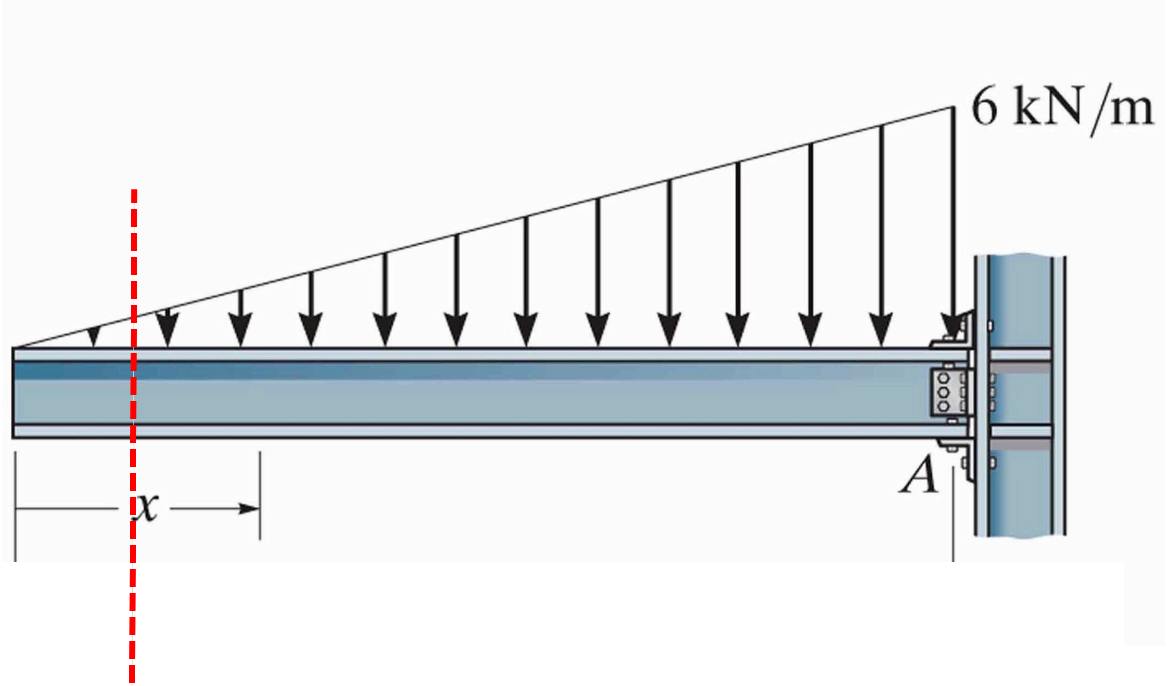

y
x

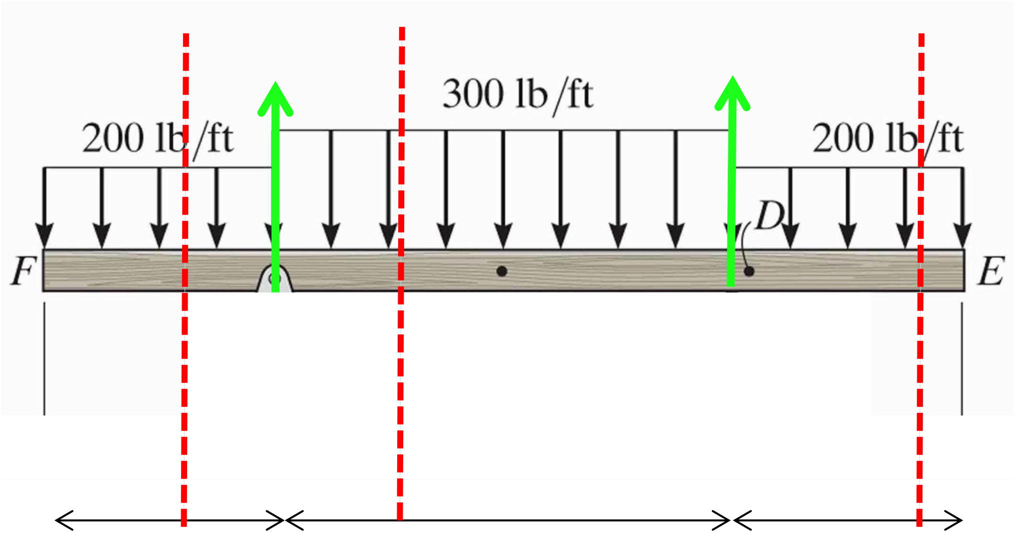

1
6 kN/m
A
x
3 m


2
300 lb/ft
200 lb/ft
200 lb/ft
D
F
E
A
C
B
4 ft
4 ft
4 ft
4 ft


3
w_0
w_0
A
B
$\frac{a}{2}$
$\frac{a}{2}$
L

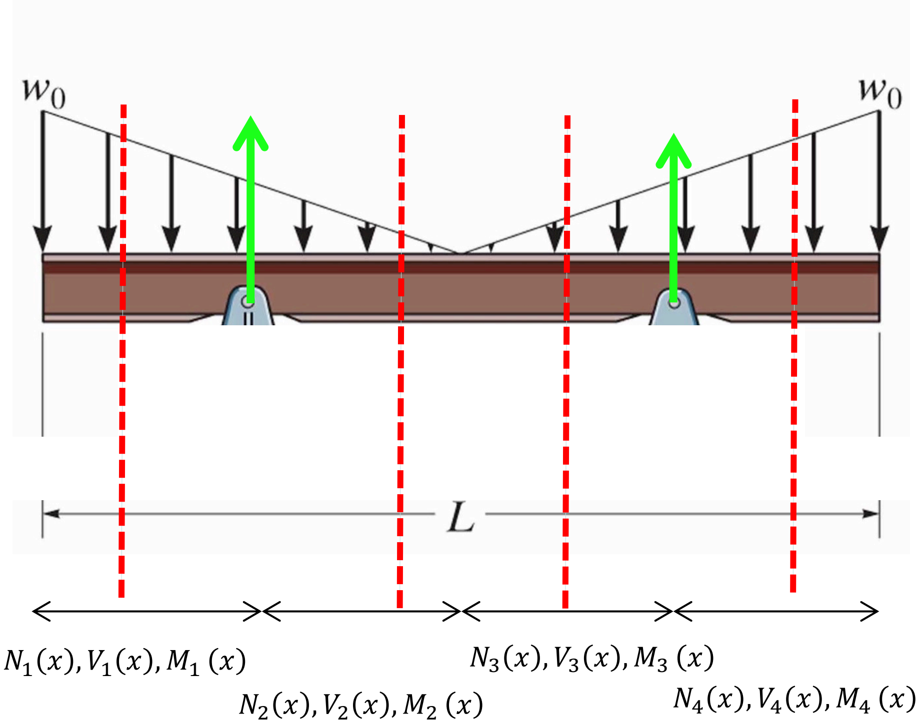

2 kN/m
6 kN · m
4
C
A
D
B
E
3 m
1.5 m
1.5 m
5
3
4
5 kN


6 kN/m
x
A

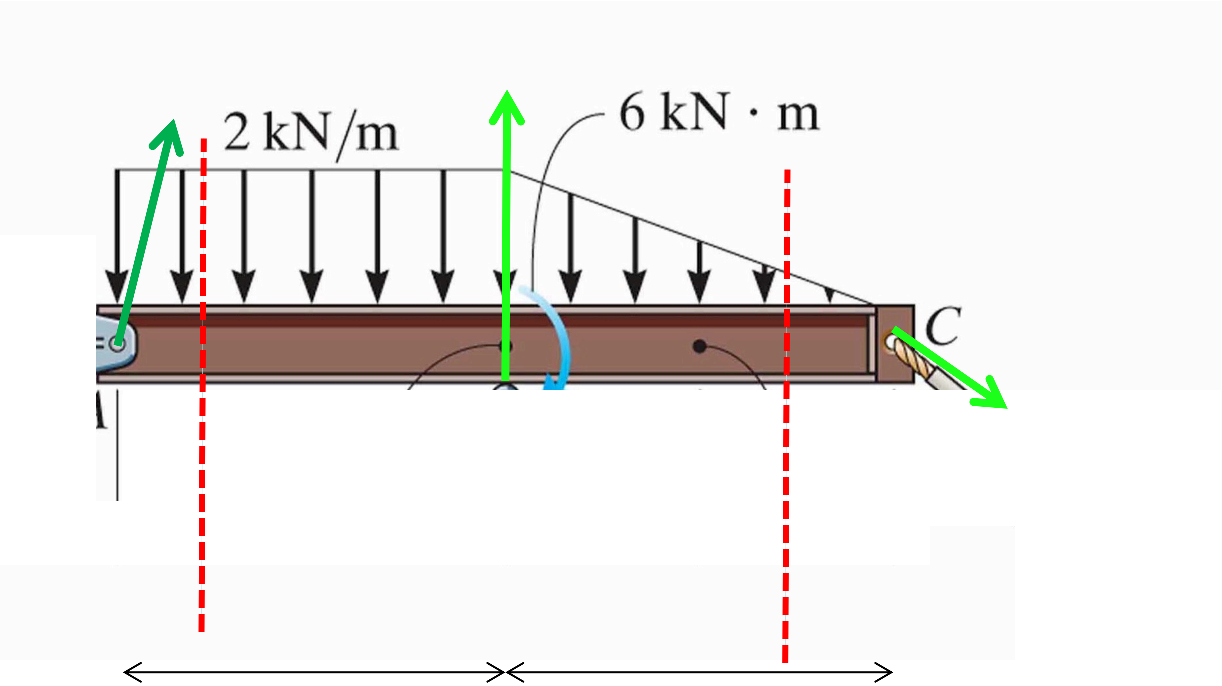


$N_1(x), V_1(x), M_1\ (x)$ $N_2(x), V_2(x), M_2\ (x)$ $N_3(x), V_3(x), M_3\ (x)$

3 zones
3 Séries d'équations



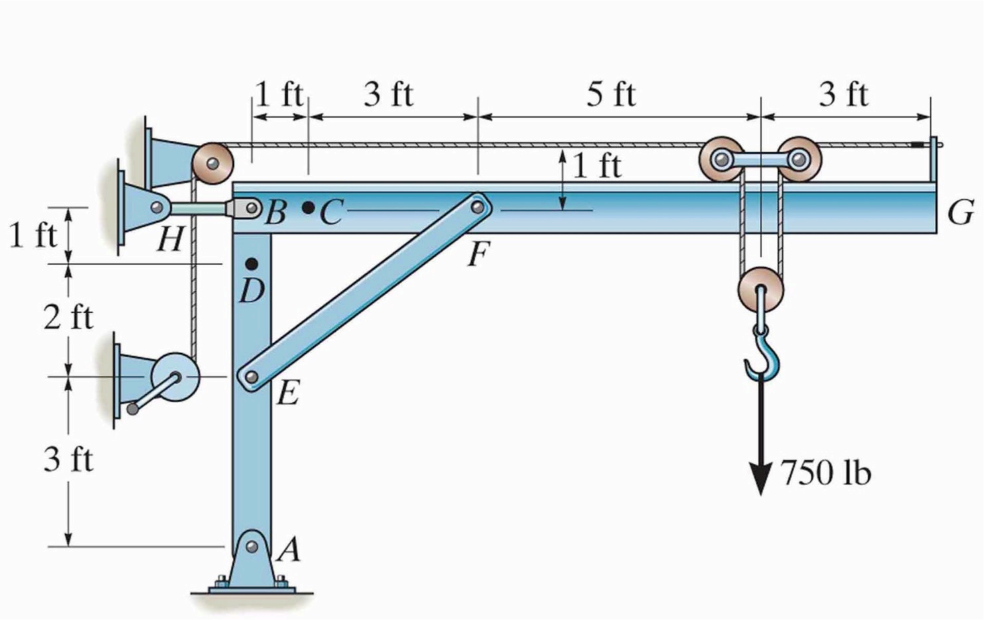
4 zones
4 Séries d'équations



$N_1(x), V_1(x), M_1\ (x)$

$N_2(x), V_2(x), M_2\ (x)$

Quiz: Où “couper” trouver les forces internes à la barre BG ?



on néglige la masse de la barre (mais ça ne changerait pas la réponse)

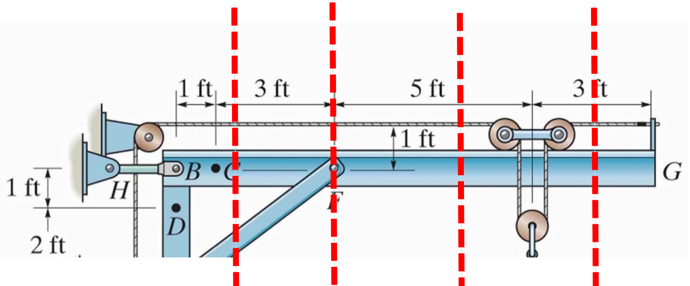
Indice: dessinez un diagramme des forces de la barre BG

Quiz session: micro200

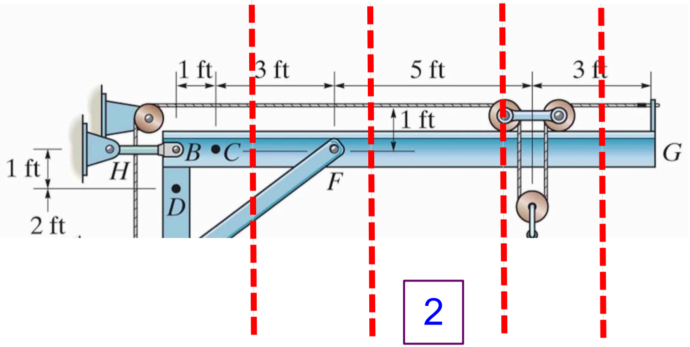
Question

Où couper la barre BG?

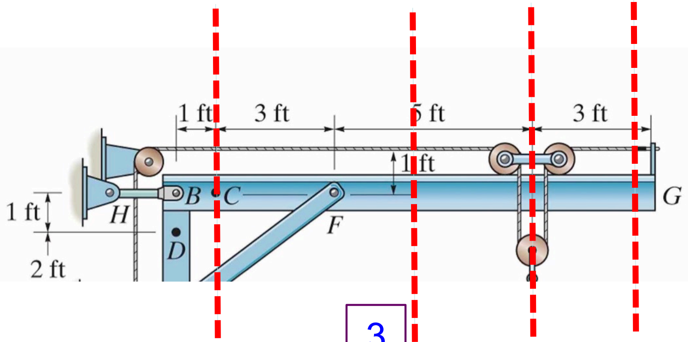
A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. autre



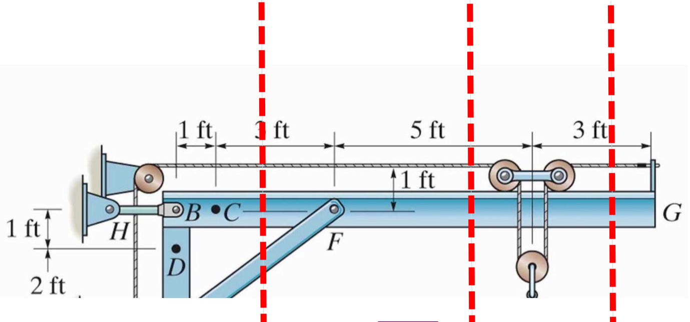
1



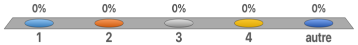
2



3



4

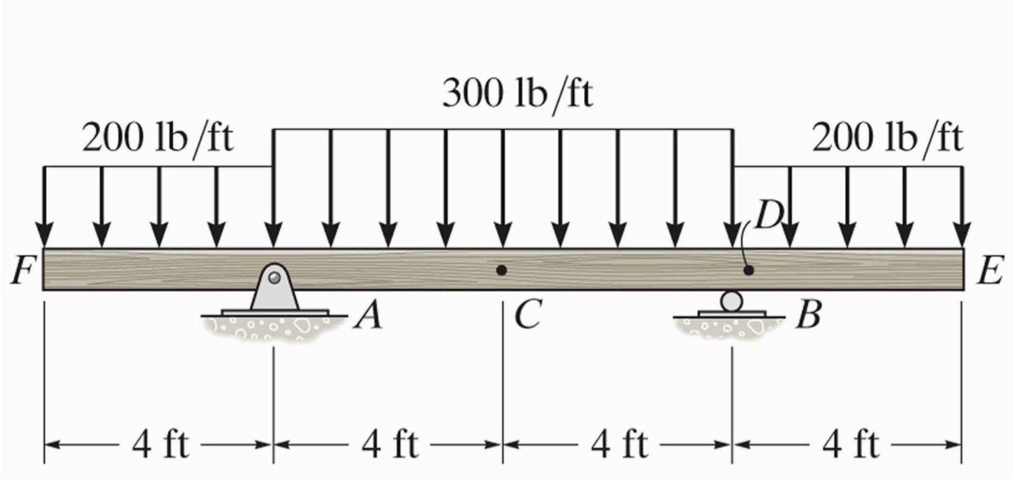


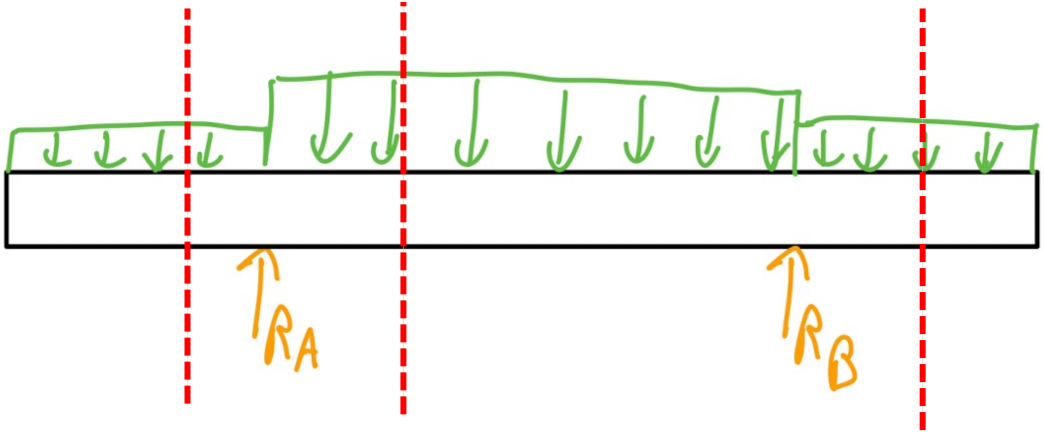
Quiz session: micro200

Solution

Comment bien Saucissoner votre poutre

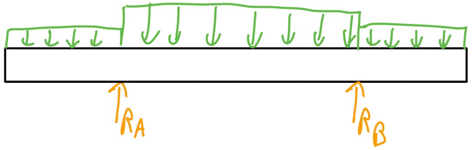
2 façons possible

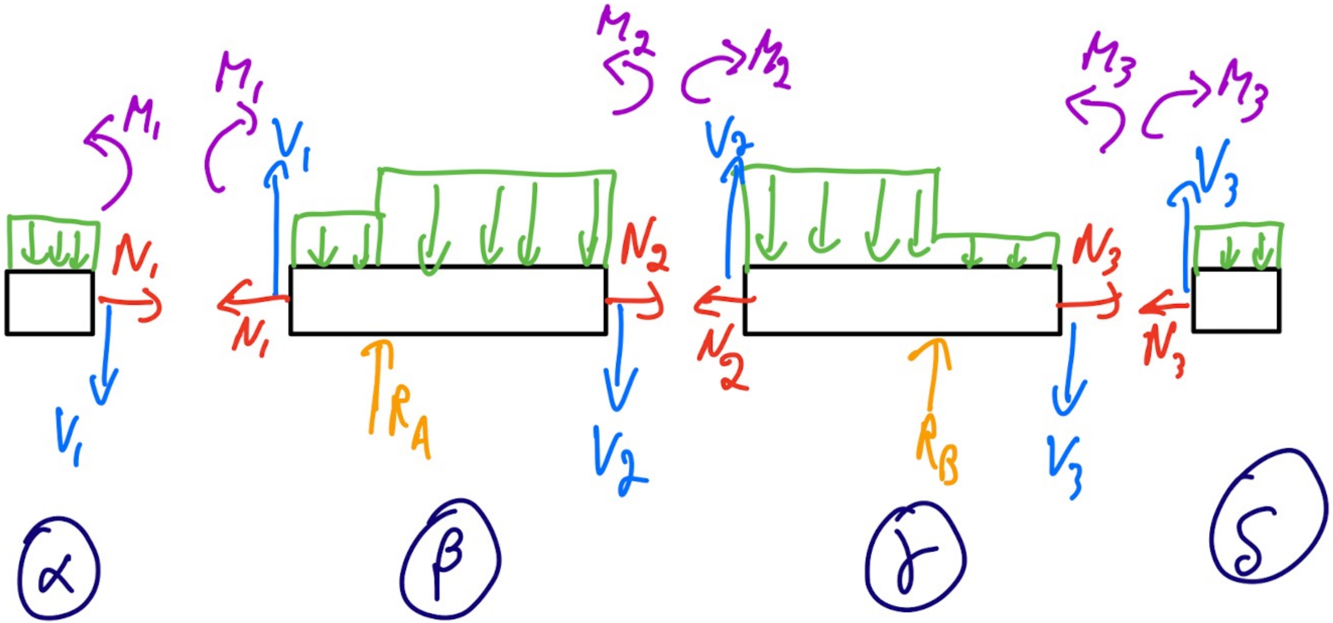




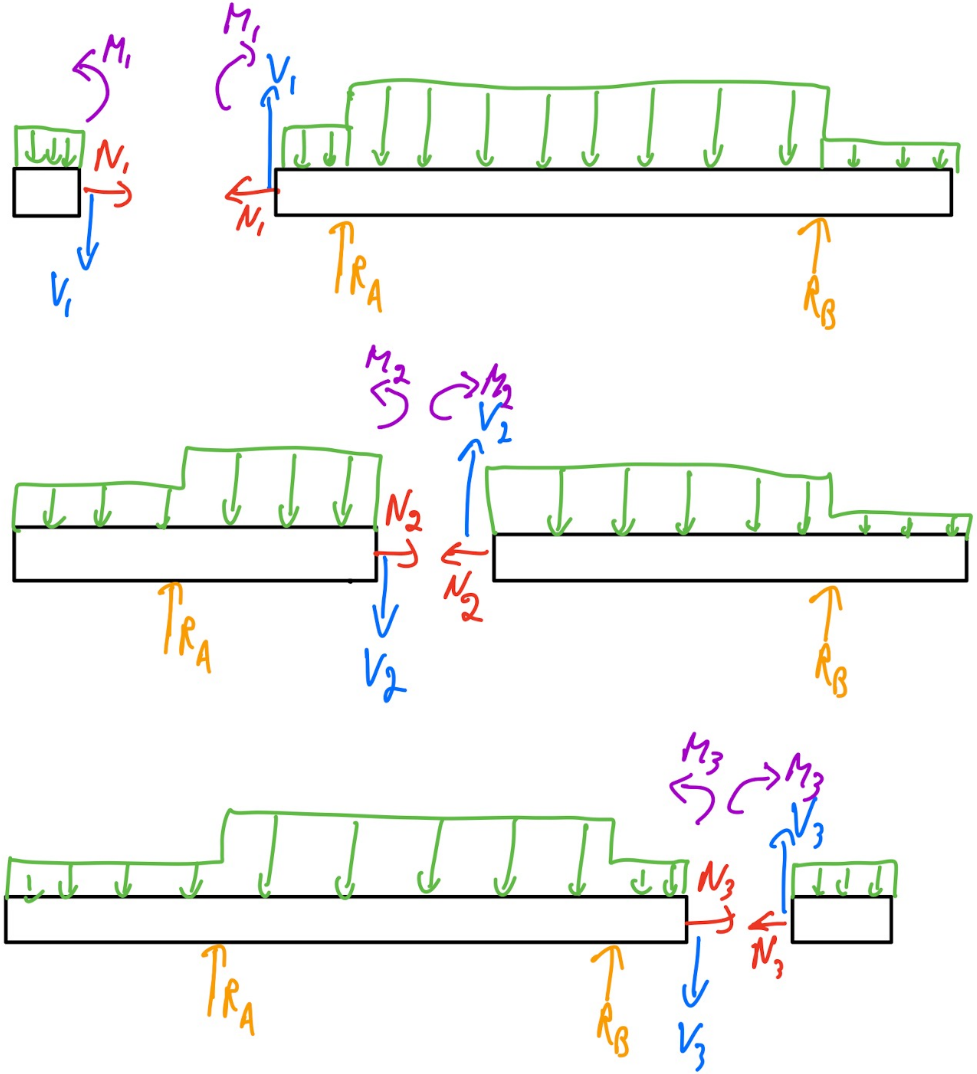
3 coupes à faire

1. Option tronçons simultanés





2. Option tronçons séquentiels



Les 2 méthodes sont également valables

- Propagation d'erreurs?
- Dessin le plus simple?

Semaine 6a- partie 3

Forces internes dans une poutre: méthode <u>différentielle</u>

!! la poutre ne se déforme pas encore

(ça viendra au prochain cours, jeudi)

Objectifs d'apprentissage, semaine 6a, partie 3

- Maitriser la méthode différentielle pour calculer $V(x)$ et $M(x)$
- Savoir utiliser les conditions aux supports ou aux bords pour calculer les constantes d'intégration
- Vérifier continuité et discontinuité de $V(x)$ et $M(x)$

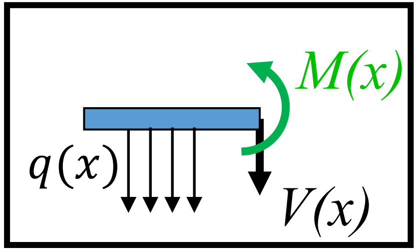
Méthode des **relations différentielles** pour $V(x)$ et $M(x)$. Attention: cette méthode ne donne pas $N(x)$

5 étapes:

1. Dessiner le diagramme des forces du système complet, indiquant clairement les charges $q(x)$ sur la poutre
2. Calculer les réactions aux supports afin de connaître les conditions aux bords
3. **Calculer $V(x)$ puis $M(x)$ par intégration des charges $q(x)$**
4. **Trouver les constantes d'intégration pour $V(x)$ et $M(x)$ grâce aux conditions aux bords et par continuité.**
5. Représenter et interpréter

Relation différentielle entre:

- charge $q(x)$ (toutes les forces externes perpendiculaire à poutre)
- force cisaillement $\boldsymbol{V}(x)$
- Moment de flexion $\boldsymbol{M}(x)$
- (mais pas **N**)

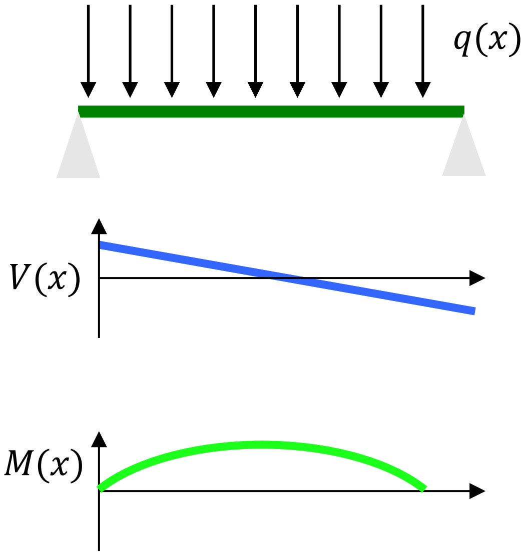


Ici, *q* défini comme positif quand pointe vers le « bas » (axe y négatif) pour nos conventions pour les relations différentielles

$$\mathrm{V}'(x) = \frac{dV(x)}{dx} = -q(x)$$

$$\mathrm{M}'(x) = \frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

$$\mathrm{M}''(x) = -q(x)$$

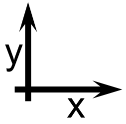


Si on définit q comme positif vers le haut, alors les relations différentielles sont:

$$\mathrm{V}'(x) = +q(x)$$

$$\mathrm{M}'(x) = V(x)$$

$$\mathrm{M}''(x) = +q(x)$$



Il est possible de trouver V(x) et M(x), mais pas N(x), par intégration si on connaît toutes les charges

$$\boxed{M(x) = -\iint q(x)}$$

$$\boxed{V(x) = -\int q(x)}$$

Pas de bornes d'intégration !!!!

Pour $V(x)$: Une constante d'intégration *par région.*

Pour $M(x)$: Deux constantes d'intégration *par région, d*ont une est la même que pour $V(x)$

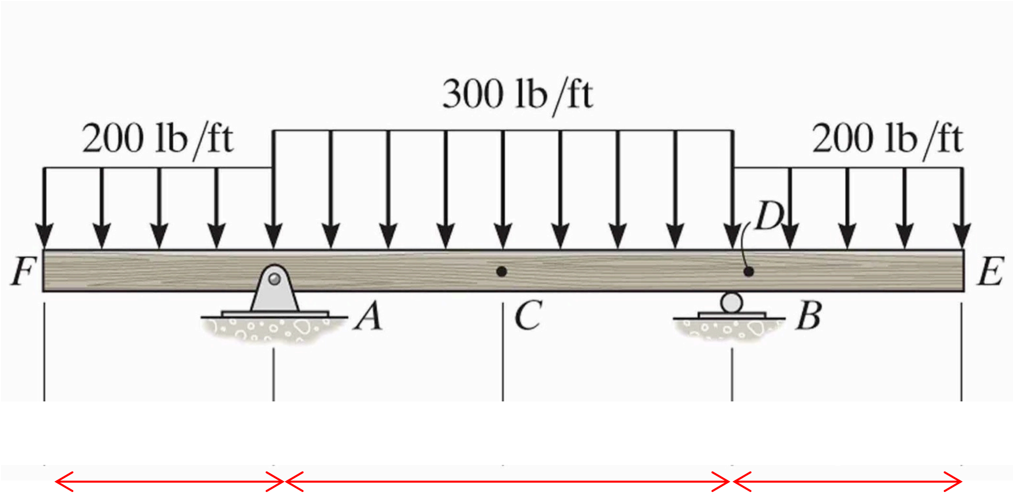
Comment trouver les constantes d'intégration?

1. Utiliser les conditions aux bords (réactions des supports): $M(x)$ et $V(x)$ doivent correspondre aux forces de réaction aux appuis

et

2. Continuité de $M(x)$ s'il n'y a pas de moments externes

Exemple de relations différentielles pour 3 régions:



$N_1(x), V_1(x), M_1(x)$

$N_2(x), V_2(x), M_2(x)$

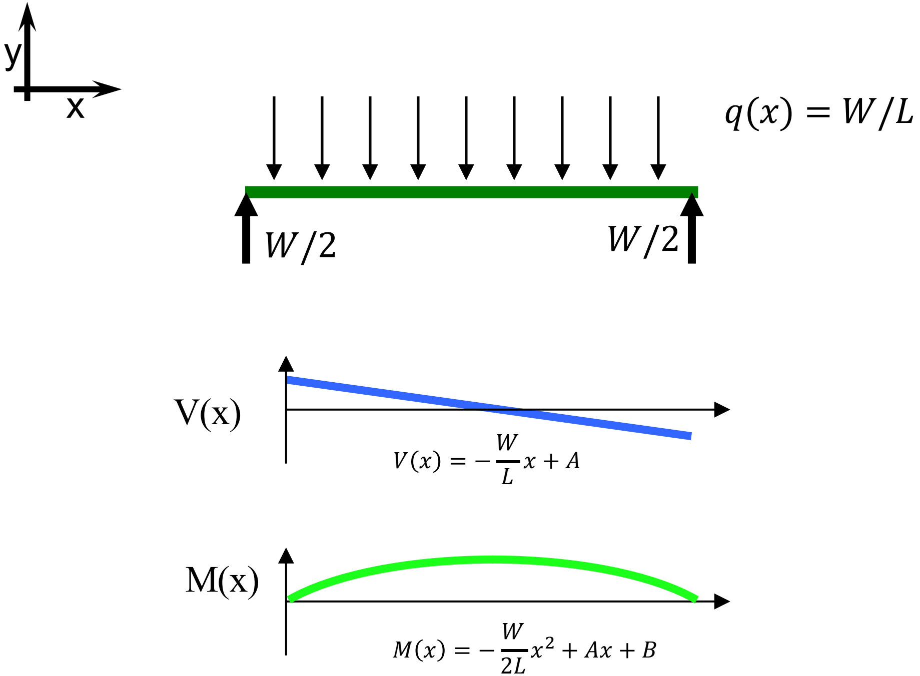
$N_3(x), V_3(x), M_3(x)$

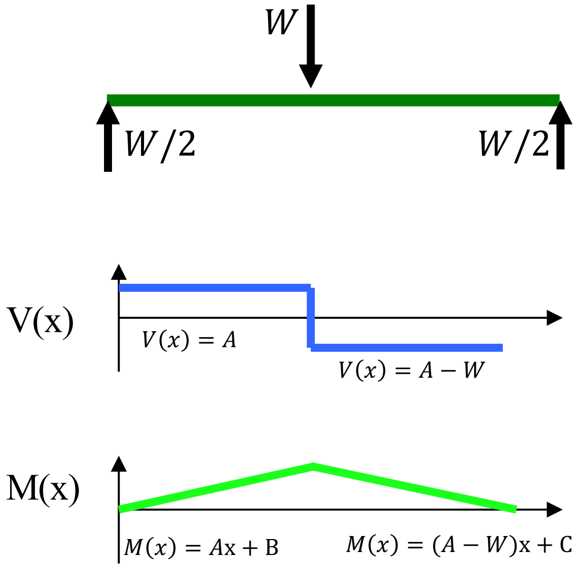
$$V_1'(x) = -q_1(x)$$
$$M_1'(x) = V_1(x)$$

$$V_2'(x) = -q_2(x)$$
$$M_2'(x) = V_2(x)$$

$$V_3'(x) = -q_3(x)$$
$$M_3'(x) = V_3(x)$$

Pour la méthode différentielle, garder en tête combien de “régions” vous avez…





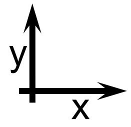
$q(x) = 0$ sauf au milieu et aux bords

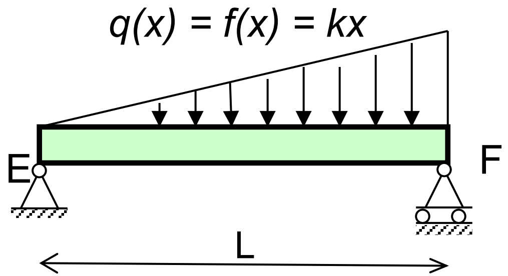
Force ponctuelle ➔ saut de $V(x)$

$$
\begin{aligned}
V'(x) &= -q(x) \\
M'(x) &= V(x) \\
M''(x) &= -q(x)
\end{aligned}
$$

- $M(x)$ est continu (sauf si couple externe)
- $V(x)$ est discontinue aux charges ponctuelles

Exemple: poutre avec charge distribuée linéaire





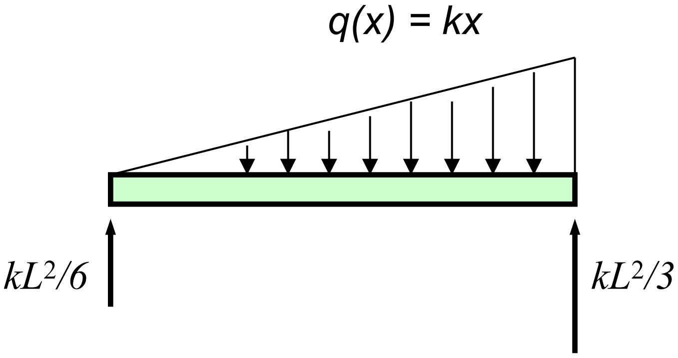
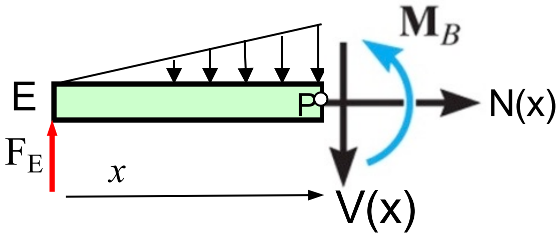


Diagramme des Forces
(vous savez calculer les forces de réaction avec les équations de la statique)

Pour ce cas, une seule zone



$$
\begin{aligned}
V'(x) &= -q(x)\\
M'(x) &= V(x)\\
M''(x) &= -q(x)
\end{aligned}
$$

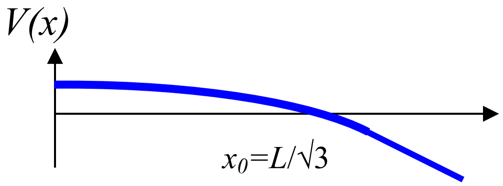
Conditions au bord

$$V(x=0) = kL^2/6$$
$$V(x=L) = -kL^2/3$$

$$M(x=0)=0$$
$$M(x=L)=0$$

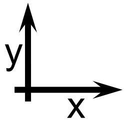
$$q(x) = kx$$

$$V(x) = -\int kx\,dx = A - \frac{kx^2}{2}$$

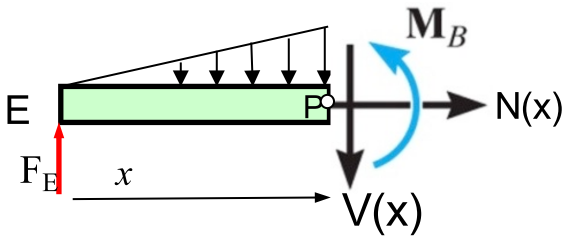


$V(x=0) = \frac{kL^2}{6}$ donc $A = \frac{kL^2}{6}$

$$\boxed{V(x) = \frac{kL^2}{6} - \frac{kx^2}{2}}$$



(pour des cas plus compliqués avec plusieurs zones, continuité de M entre régions)



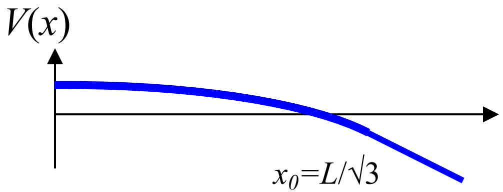
$$V'(x) = -q(x)$$
$$M'(x) = V(x)$$
$$M''(x) = -q(x)$$

Conditions au bord

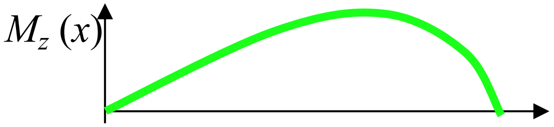
$$V(x=0) = kL^2/6$$
$$V(x=L) = -kL^2/3$$

$$M(x=0) = 0$$
$$M(x=L) = 0$$

$$M_z(x) = \int V(x)dx = \int \left[\frac{kL^2}{6} - \frac{kx^2}{2}\right] dx$$

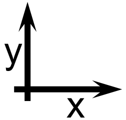


$$M_z(x) = \frac{kL^2}{6}x - \frac{kx^3}{6} + B$$

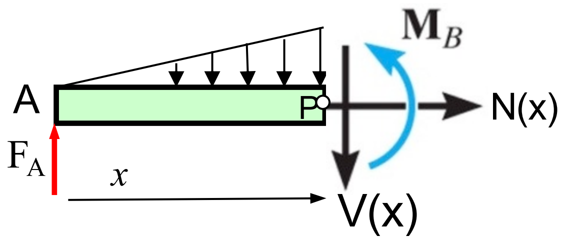


$M(x=0) = 0$ donc B=0

$$\boxed{M_z(x) = \frac{kL^2}{6}x - \frac{kx^3}{6}}$$



(pour des cas plus compliqués avec plusieurs zones, continuité de M entre régions)



Réfléchir à ce qui se passe aux bords

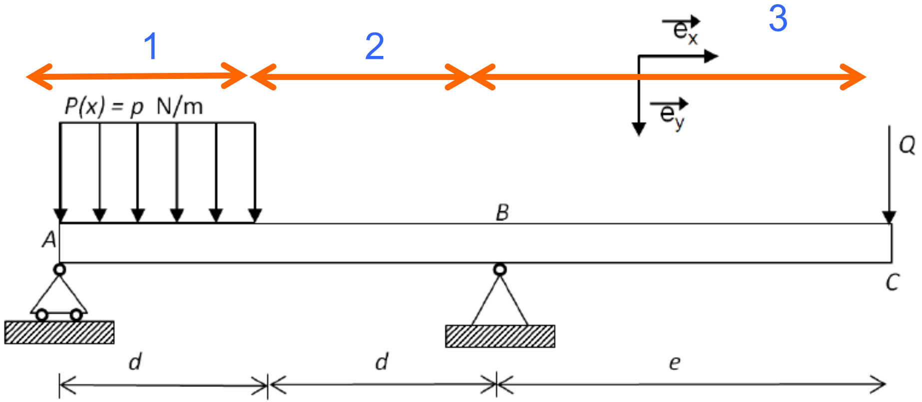
Ici,

$$V(x=0) = F_A$$
$$M(x=0) = 0$$

Conditions au bords (résumé simplifié)

- Pour les poutres simplement supportées, le moment à chaque extrémité est zéro
- Pour une poutre encastrée, le moment de flexion est nul à l'extrémité libre, et maximum à l'encastrement
- La force de cisaillement $V(x)$ est discontinue lorsqu'il y a une charge ponctuelle.
- Le moment de flexion $M(x)$ est discontinu quand il y a un moment externe. Sinon continu!

Chaque « région » de la poutre a une expression pour $M(x)$ et pour $V(x)$.

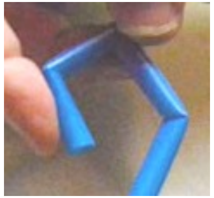


$M_1(x)$ pour $0 < x < d$

$M_2(x)$ pour $d < x < 2d$

$M_3(x)$ pour $2d < x < 2d + e$

✓



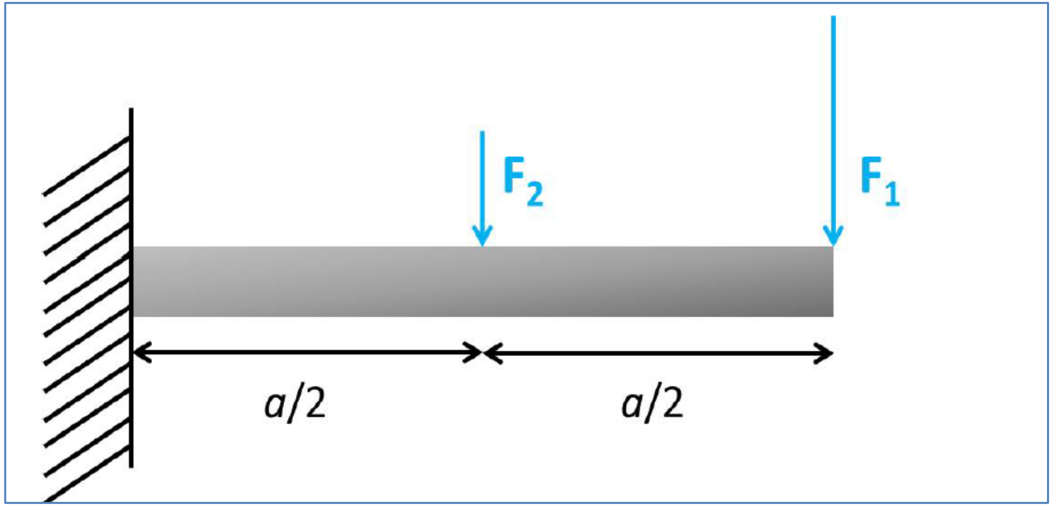
$$M_1(x = d) = M_2(x = d)$$

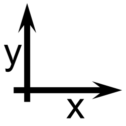
$$M_2(x = 2d) = M_3(x = 2d)$$

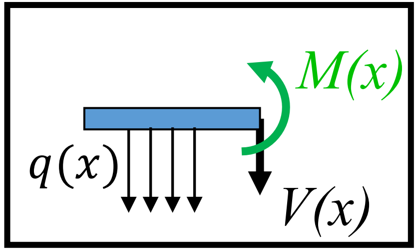
$M(x)$ est continu (sauf si moment externe)

Trouver $M(x)$ en utilisant la méthode différentielle

$F_1 > F_2$. Négligez la masse de la poutre







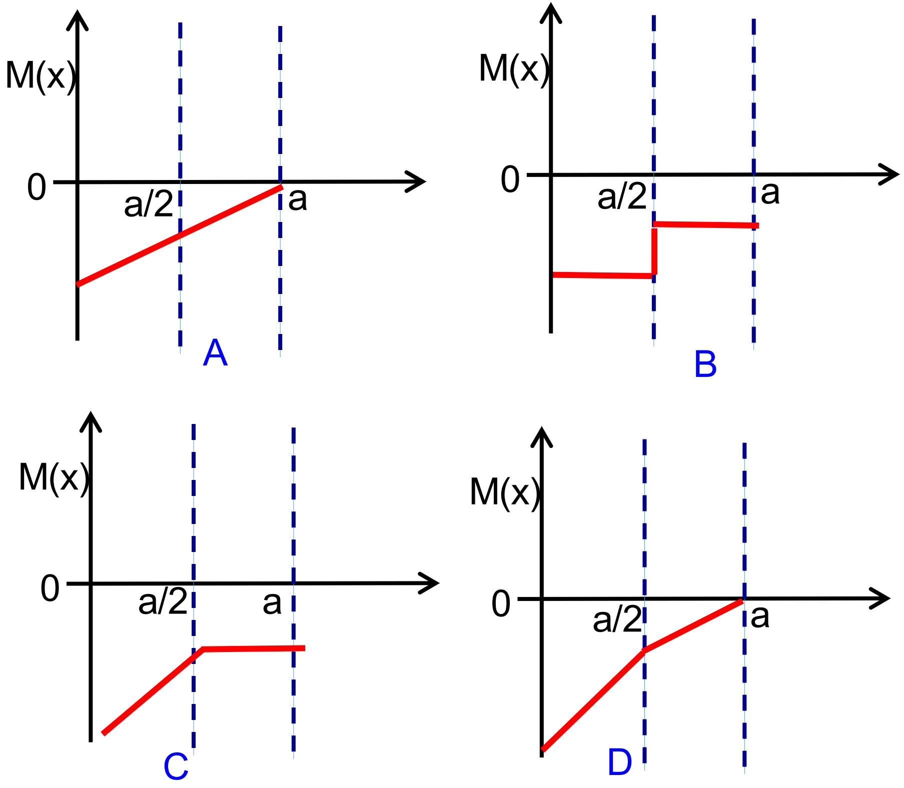
$$V = -\int q$$

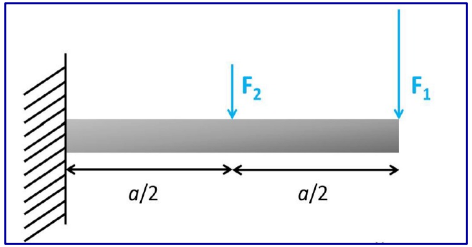
$$M = \int V$$

Quiz session: micro200

Question

Quel dessin est juste pour $M(x)$?





$$V = -\int q$$

$$M = \int V$$

A.

B.

C.

D.

Quiz session: micro200

Solution

Semaine 6a- pt4

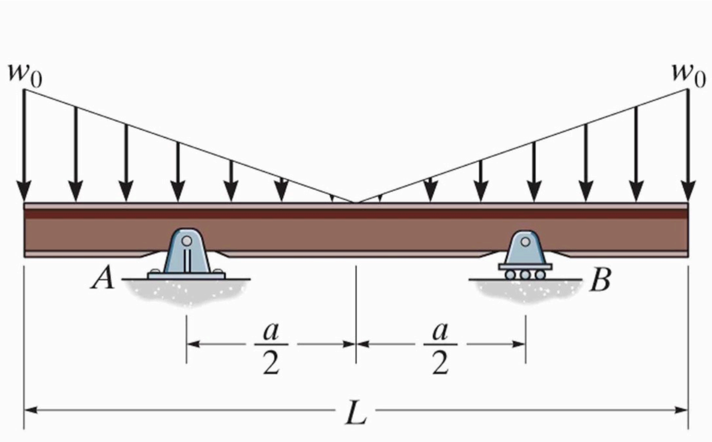
Forces internes pour des forces distribuées

la poutre ne se déforme toujours pas !
(patience, ça viendra jeudi)

Objectifs d'apprentissage, semaine 6a, partie 4

- Savoir « couper » avec des **forces distribuées**
- Trouver $N(x), V(x)$ et $M(x)$ pour des poutres avec des charges distribuées
- Savoir écrire les intégrales quand les forces sont distribuées
- Vérifier continuité et discontinuité de $V(x)$ et $M(x)$

Forces distribuées



Pour une analyse statique du <u>système complet</u>, il revient au même de :

- concentrer la charge au son centre de force,

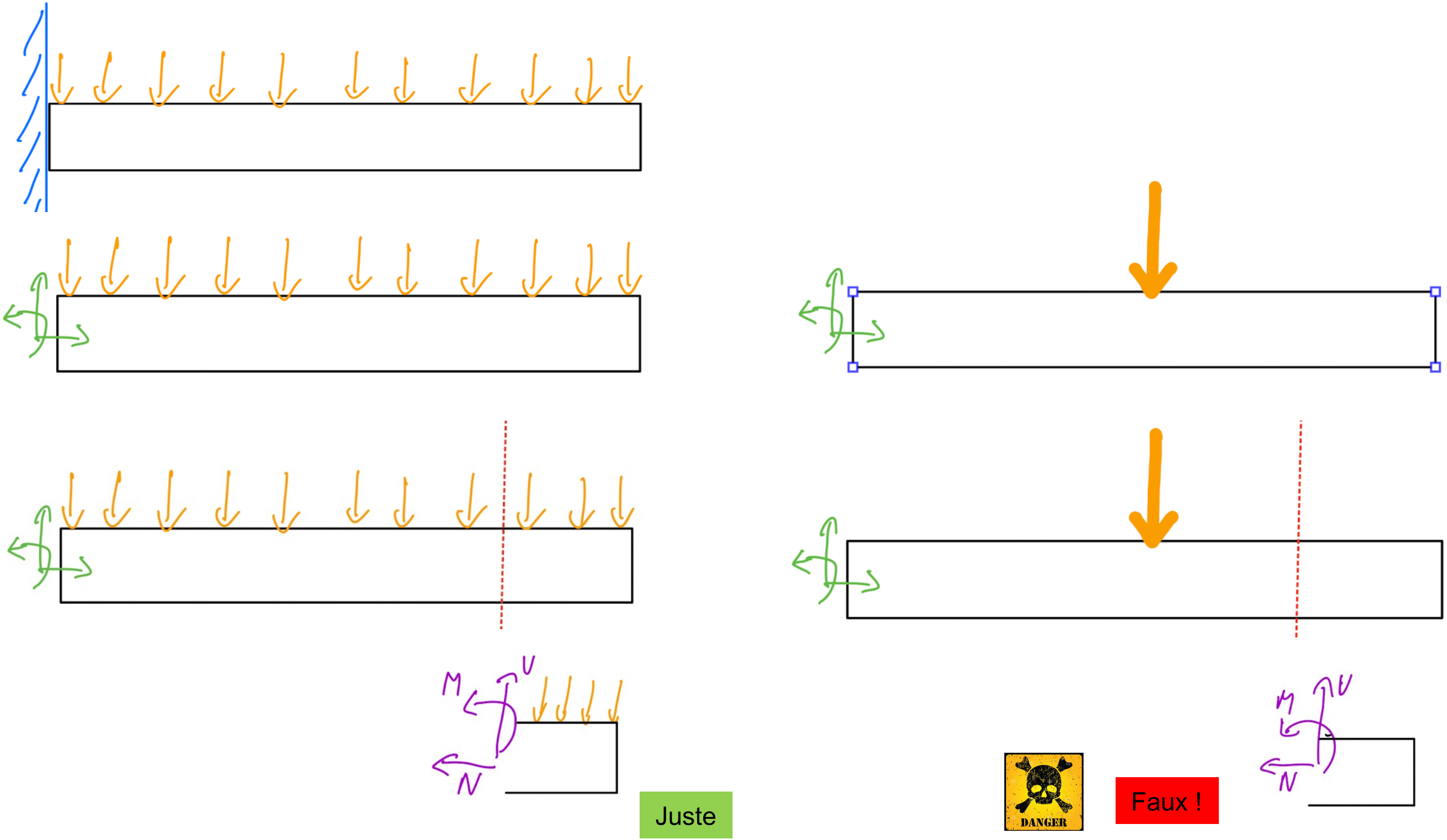
ou

- calculer avec la charge distribuée

Mais il faut faire bien attention quand nous « coupons » pour avoir des diagrammes des forces physiquement justes pour les coupes…

- **Toujours couper avec les forces distribuées**
  (puis, si vous le souhaitez, remplacer les « morceaux » de forces distribuées par leurs résultantes)

- Donc: **ne pas “couper” après avoir remplacé les forces distribuées par résultante!** (car ça donne un dessin qui est faux)



M
V
N
Juste
DANGER
Faux !
M
V
N

Forces distribuées

Il y a deux façons valables de procéder pour les problèmes avec des forces distribuées (mais on n'échappe jamais aux intégrales…)

Pour chaque section de poutre (**après coupe!**), soit:

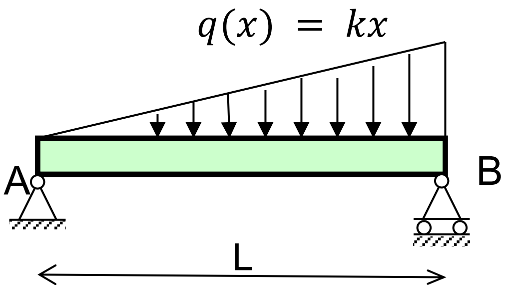
1. **Remplacer les forces distribuées par des forces ponctuelles.**
   i. Pour chaque force distribuée, calculer:
      i. Centre de force
      ii. Résultante
   ii. Puis on peut utiliser $\Sigma F = 0$ et $\Sigma M = 0$ sans faires d'intégrales (souvent plus facile pour une masse distribuée)

   Ou

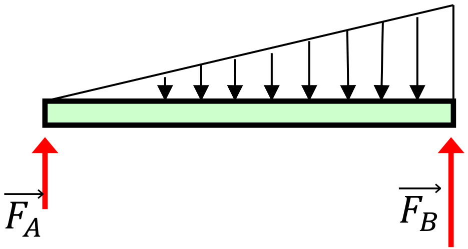
2. **Garder les forces distribuées**, et
   - ΣF=0 et ΣM=0 deviennent: $\int F = 0$ $\int M = 0$

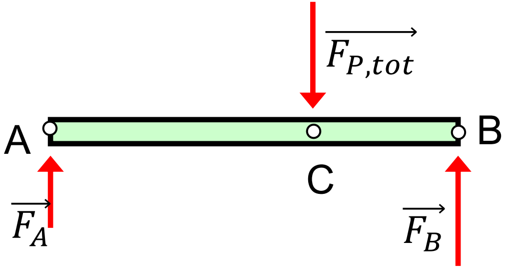
Attention à cette intégrale!

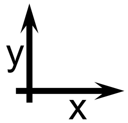
Exemple de charge distribuée



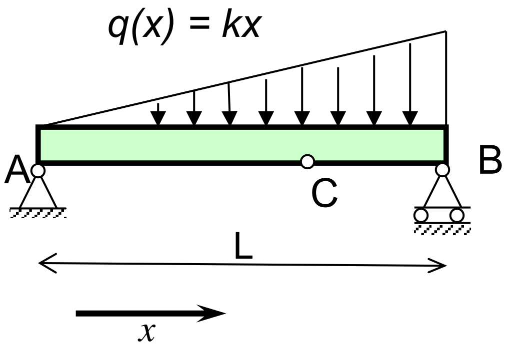
1ère étape: Calculer les réactions aux supports du système complet (ici F_A et F_B)







Calcul de la résultante et centre de force de la charge



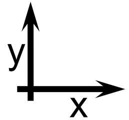
Résultante de la charge distribuée:

$$\overrightarrow{F_{P,tot}} = -F_{P,tot}\,\overrightarrow{e_y}$$

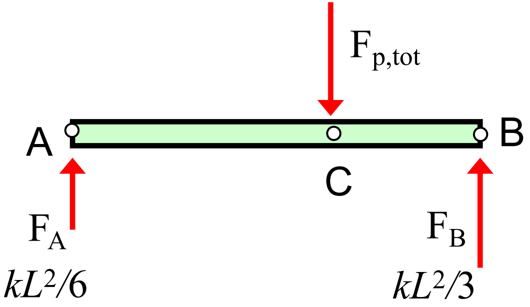
$$\boxed{F_{P,tot} = \int_{x=0}^{x=L} q(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=L} kx.dx = \frac{kL^2}{2}}$$

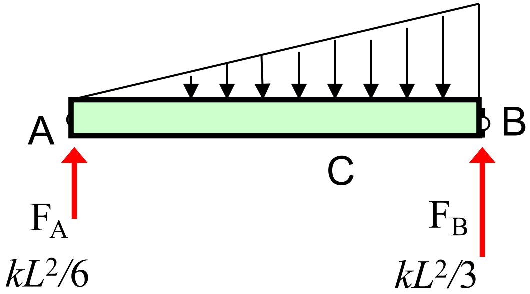
Centre de force C:

$$\boxed{\overrightarrow{OC} = \frac{\sum F_i \overrightarrow{OC_i}}{\sum F_i} \qquad AC = \frac{1}{F_{P,tot}} \int_{x=0}^{x=L} q(x)\,.\,x\,dx = \frac{2}{kL^2}\frac{kL^3}{3} = \frac{2L}{3}}$$



Calcul de F_A et F_B





$$\sum F_y = 0$$

$$F_A + F_B - F_p = 0$$

$$F_A + F_B = \frac{kL^2}{2}$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$F_A .0 + F_B .L - F_p .AC = 0$$

$$LF_B = \frac{kL^2}{2}\frac{2L}{3} = \frac{kL^3}{3}$$

Par les forces résultantes

$$F_B = \frac{kL^2}{3} \qquad F_A = \frac{kL^2}{6}$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

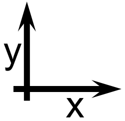
$$F_A .0 + F_B .L - \int_{x=0}^{x=L} p(x) \cdot x \cdot dx = 0$$

$$LF_B = \int_{x=0}^{x=L} kx \cdot x \cdot dx = \frac{kL^3}{3}$$

Par les forces distribuées

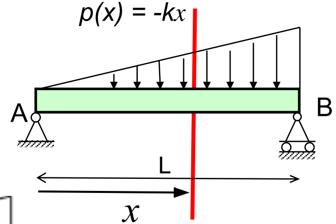
$$F_B = \frac{kL^2}{3} \qquad F_A = \frac{kL^2}{6}$$

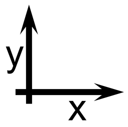
Même résultat

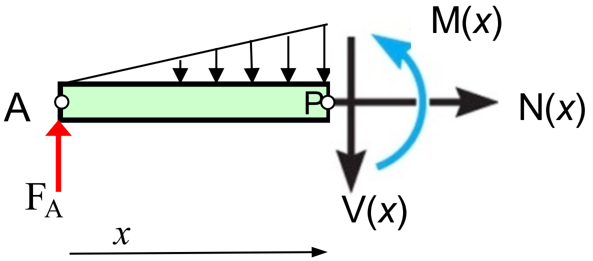


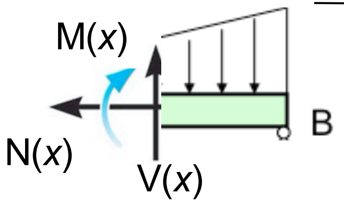
2: **Isoler** un sous-système (ici une seule coupe suffit)

3. Introduire les **forces & moments** “internes”



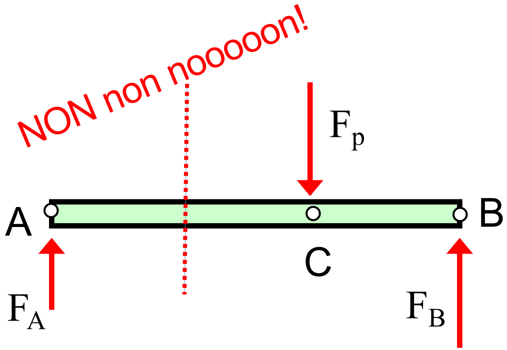


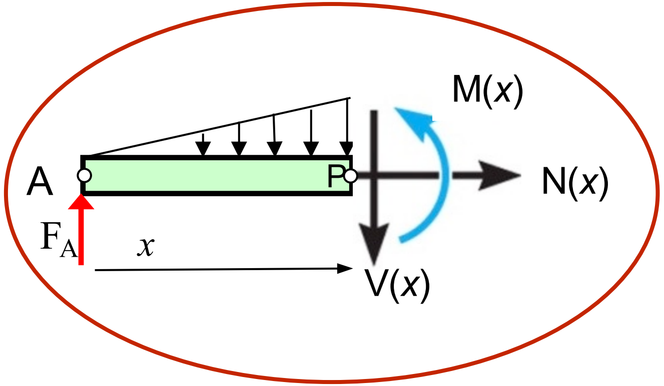


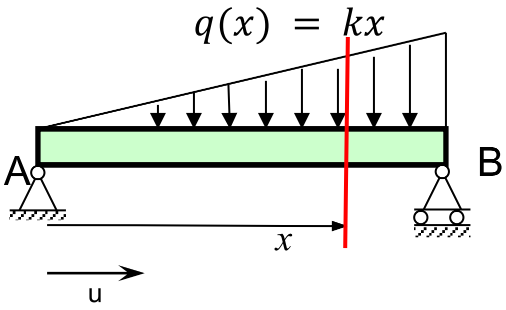


Danger !!!

- Ne pas “couper” après avoir remplacé les forces distribuées par résultante! (ça donne un dessin faux)
- **Toujours couper avec les forces distribuées**







4. Equilibre pour les sous-systèmes

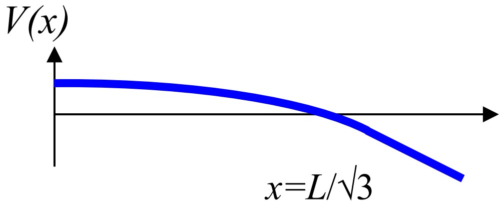
4a. Calcul de V(x) par intégrales directement

$$N(x)=0$$

$$\sum F_y = 0$$

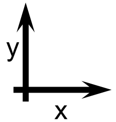
$$= -V(x) + F_A - \int_{u=0}^{u=x} ku\,du$$

$$V(x) = F_A - \frac{kx^2}{2} = \frac{kL^2}{6} - \frac{kx^2}{2}$$

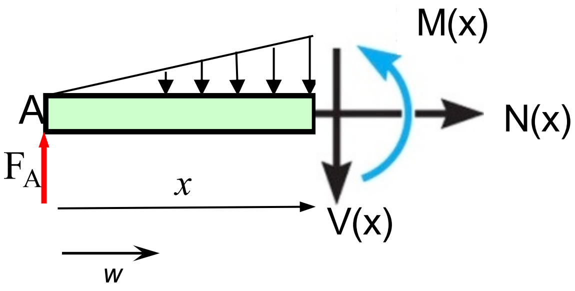


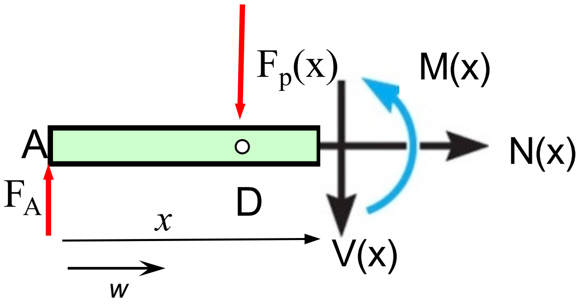
$V(0) = F_A$ ✓

$V(L) = -F_B$ ✓



Attention: Il faut une nouvelle variable d'intégration pour le moment de la force distribuée. x **est fixe, car on a coupé à** x.





4b. Calcul de V(x) par résultante et centre de force D

Résultante $F_P(x)$:

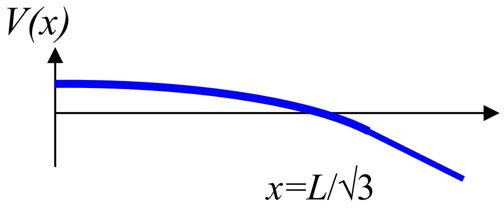
$$F_P(x) = \int_{w=0}^{w=x} q(w)\, dw = \int_{w=0}^{w=x} kw.dw = \frac{kx^2}{2}$$

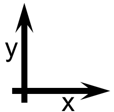
Centre de force D(x):

$$AD(x) = \frac{1}{F_P(x)} \int_{w=0}^{w=x} -p(w).w\, dw \quad = \frac{2x}{3}$$

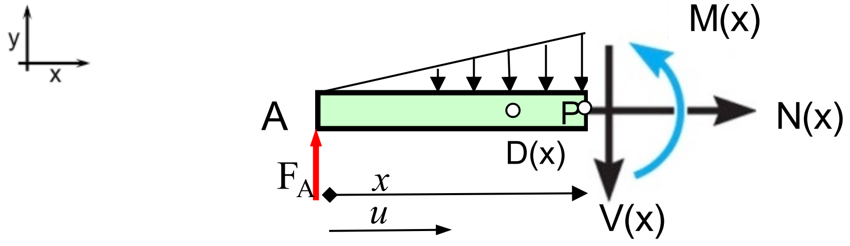
$$\sum F_y = 0$$
$$= -V(x) + F_A - F_p(x)$$
$$V(x) = F_A - \frac{kx^2}{2} = \frac{kL^2}{6} - \frac{kx^2}{2}$$

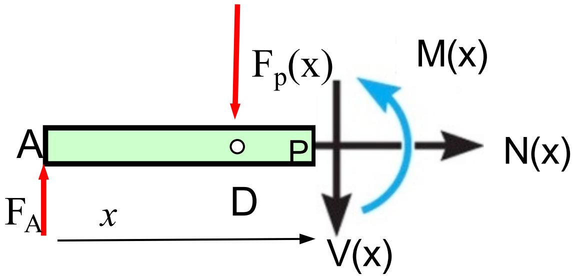
Même résultat que page précédente





Attention: Il faut une nouvelle variable d'intégration w pour le calcul de la résultante. **x est un constante ici, car on a coupé à x.**





Somme des Moments en P pour trouver $M(x)$

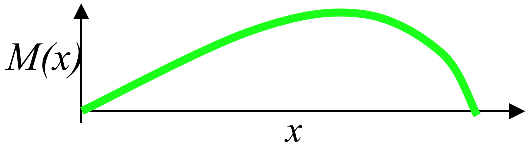
Option 1: utiliser intégrales directement

$$\sum M_P = 0$$

$$\sum M_P = M(x) - F_A x + \int_{u=0}^{u=x} f(u)[x-u]\, du$$

$$M(x) = \frac{kL^2}{6}x + \int_{u=0}^{u=x} ku[x-u]\, du$$

$$M(x) = \frac{kL^2}{6}x - \frac{kx^3}{6}$$



Option 2: passer par centre de force

$$\sum M_P = 0$$

$$= M(x) - F_A x + F_p(x)\left[x - AD(x)\right]$$

$$M(x) = \frac{kL^2}{6}x - \frac{kx^2}{2}\left(x - \frac{2x}{3}\right)$$

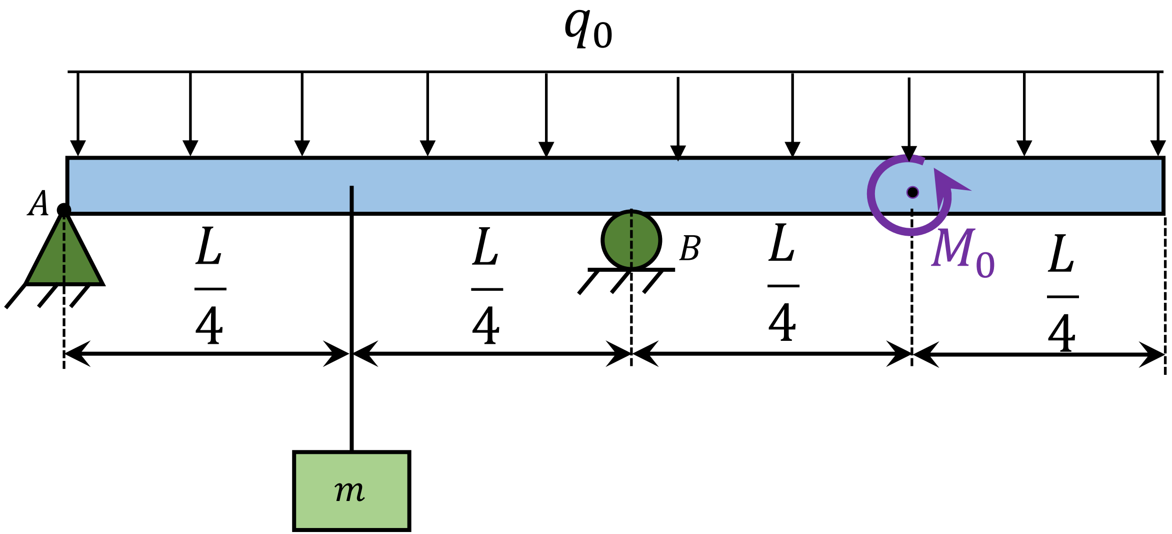
$$M(x) = \frac{kL^2}{6}x - \frac{kx^3}{6}$$

Vérifier les conditions aux bords

$M(x=0) = 0$ ✓ $\quad M(x=L) = 0$ ✓

Exemple: Force distribuée + force ponctuelle, + moment de flexion externe

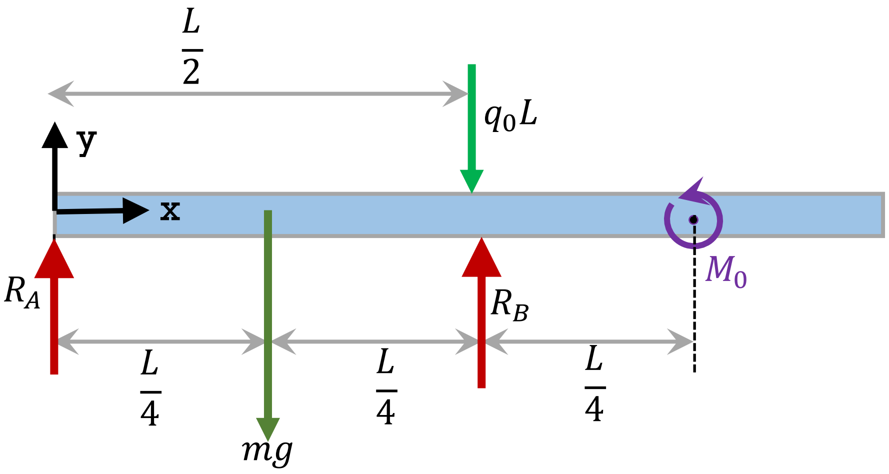
Trouver forces et moment interne



nous allons résoudre en utilisant la méthode des sections

Solution

1. d'abord: diagramme des forces du système complet, et calcul des forces de réaction



Avec les équations de la statique, on trouve les deux inconnues R_A et R_B:

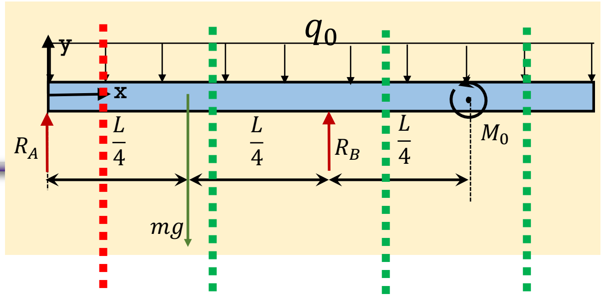
$$R_A = \frac{mg}{2} + \frac{2M_0}{L}$$

$$R_B = \frac{mg}{2} - \frac{2M_0}{L} + q_0L$$

pour cette étape, <u>avant</u> de couper, c'est OK de remplacer la force distribuée par une force ponctuelle.

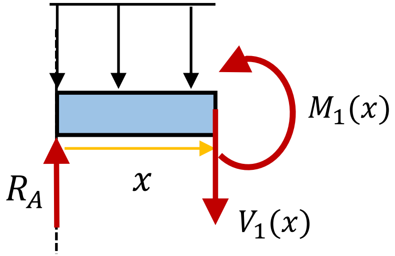
Solution

2. Puis 4 coupes pour faire apparaître les force et moment internes



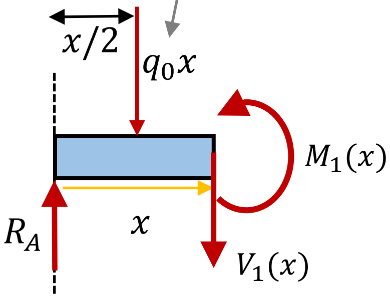
Première coupe

$$0 \leq x < \frac{L}{4}$$



Que la coupe 1 de gauche

Norme de la Force distribuée= $q_0 x$



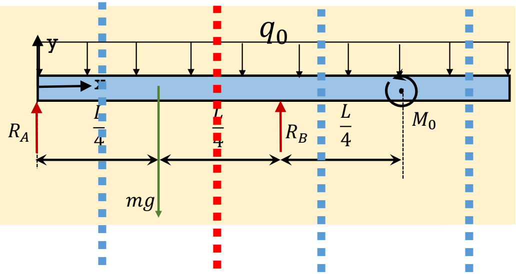
$$V_1(x) = \frac{mg}{2} + \frac{2M_0}{L} - q_0 x$$

$$M_1(x) = \left(\frac{mg}{2} + \frac{2M_0}{L}\right) x - \frac{q_0 x^2}{2}$$

$N(x)$ pas dessiné, car nul par inspection

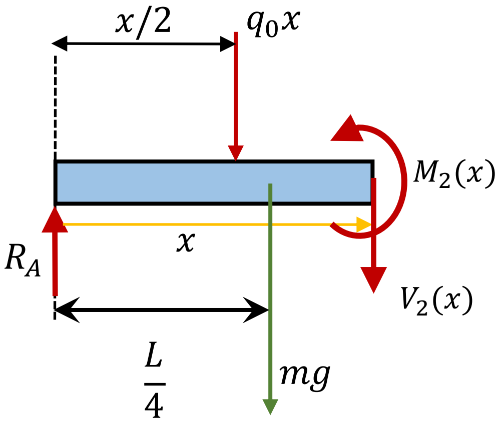
Solution

Force de cisaillement et moment de flexion



2[ième] coupe

$$\frac{L}{4} \leq x < \frac{L}{2}$$



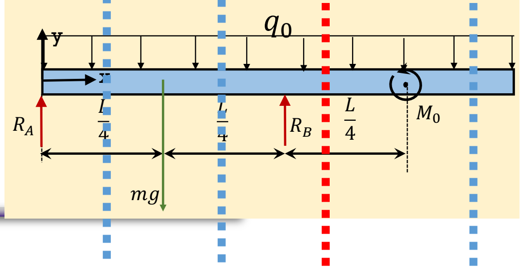
Que la coupe de gauche

$$V_2(x) = -\frac{mg}{2} + \frac{2M_0}{L} - q_0 x$$

$$M_2(x) = \frac{mgL}{4} + \left(\frac{2M_0}{L} - \frac{mg}{2}\right) x - \frac{q_0 x^2}{2}$$

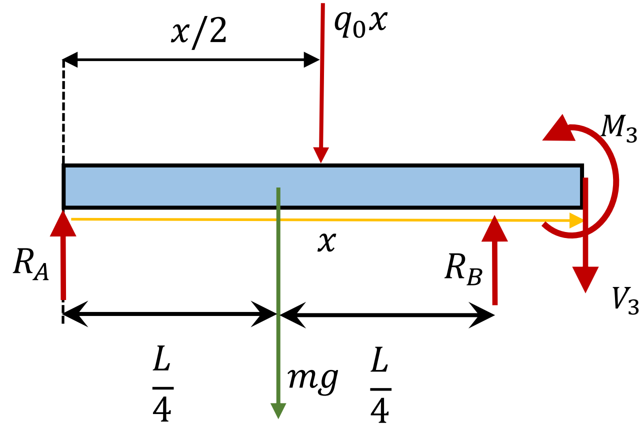
Solution

Force de cisaillement et moment de flexion



3[ième] coupe

$$\frac{L}{2} \leq x < \frac{3L}{4}$$



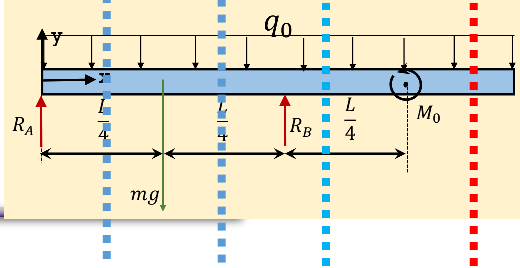
$$V_3(x) = q_0(L - x)$$

$$M_3(x) = M_0 - \frac{q_0}{2}(x - L)^2$$

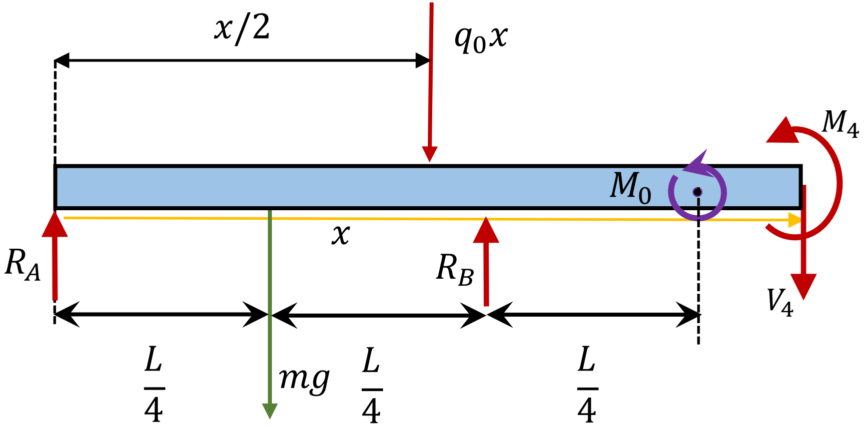
Que la coupe de gauche

Solution

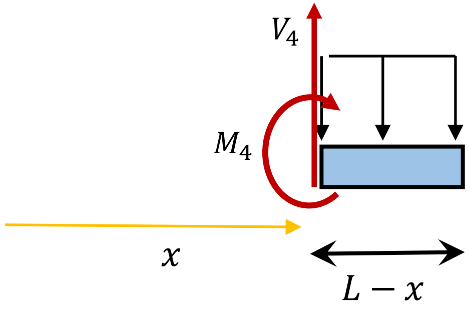
Force de cisaillement et moment de flexion



4ième coupe $\frac{3L}{4} \leq x \leq L$



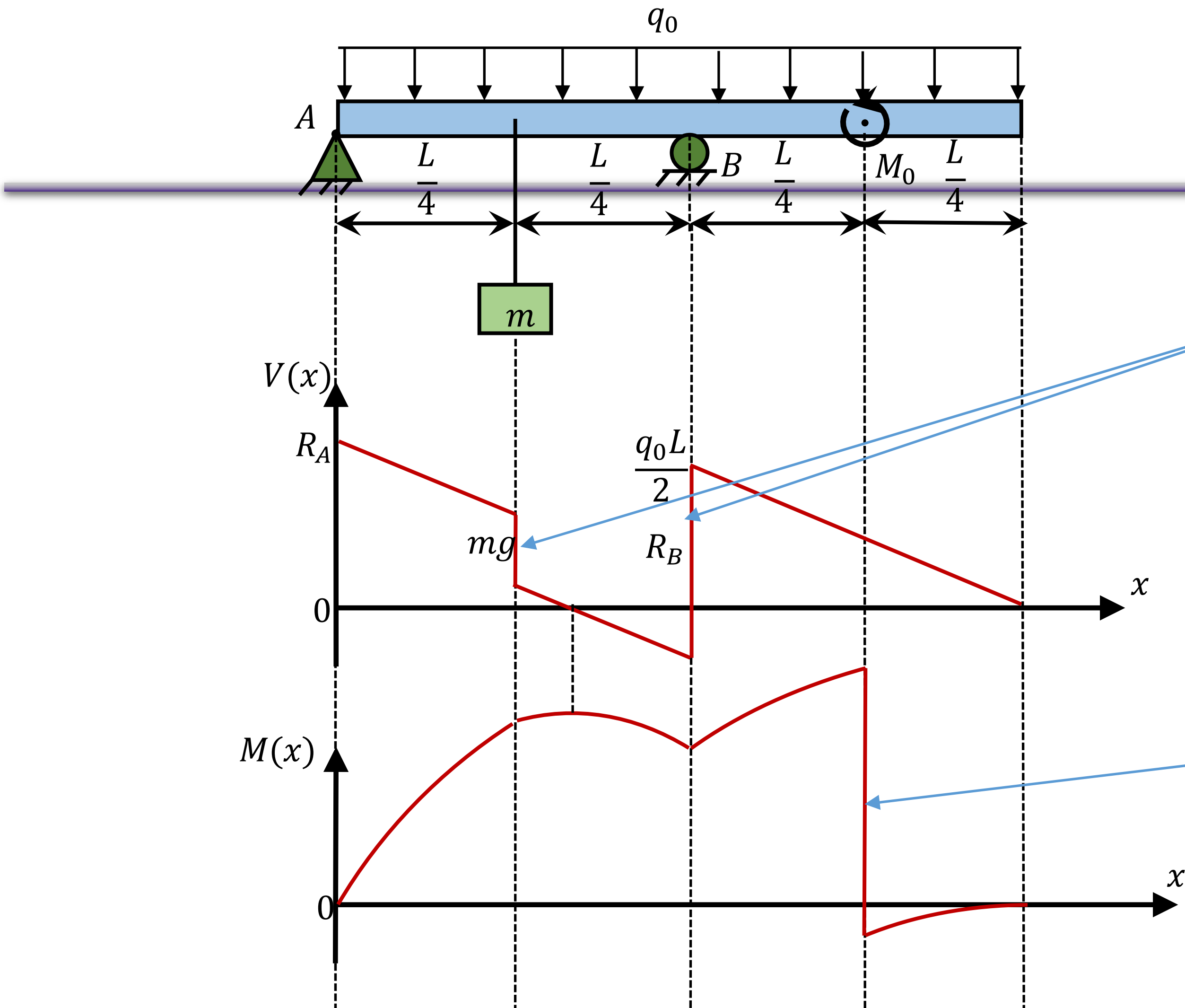
la coupe de gauche



la coupe de droite

$$V_4(x) = q_0(L-x) \qquad M_4(x) = -\frac{q_0}{2}(x-L)^2$$

$$w(x) = \iint M(x)$$



V(x) est discontinu où il y a une charge ponctuelle

M(x) est continu sauf où un moment externe est appliqué

- Ces calculs étaient pour une poutre non-déformée

- Et maintenant, que se passe-t-il dans la poutre, si elle peut plier? Comment est-ce que les contraintes et déformations relatives dépendent de x et y?

- Réponse en semaine 6b (ce jeudi)