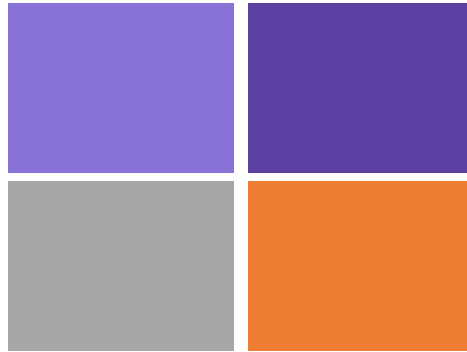


Semaine 9a

# Flèches de poutres

## 2/2: guidages flexibles



**PARTIE 1: (slide 1 - 24)**

Intro guidages flexibles

**PARTIE 2: (slide 25 - 49)**

Calcul de constante de ressort

# PROGRAMME DU COURS, semaines 6-10

---

6	14.10	Forces internes dans les poutres non-déformées	x	
6	16.10	$\varepsilon(y)$ et $\sigma(y)$ en flexion pure. Moment d'inertie	x	Série 6
7	28.10	Poutres chargées axialement. Poutres composites	x	Série 6
7	30.10	Quiz + Session questions & réponses D. Briand		Série 1-5
8	04.11	Examen mi-semester D. Briand		
8	06.11	Flèches des poutres	x	Série 7
9	11.11	Flèche pour guidage flexible	x	Série 8
9	13.11	Poutres statiquement indéterminées	x	Série 8
10	18.11	Poutres statiquement indéterminées. Flambage	x	Séries 9
10	20.11	Flambage	x	Série 10

# Semain 9a – Partie 1

## Flèche des guidages flexibles

### Objectifs d'apprentissage de cette partie

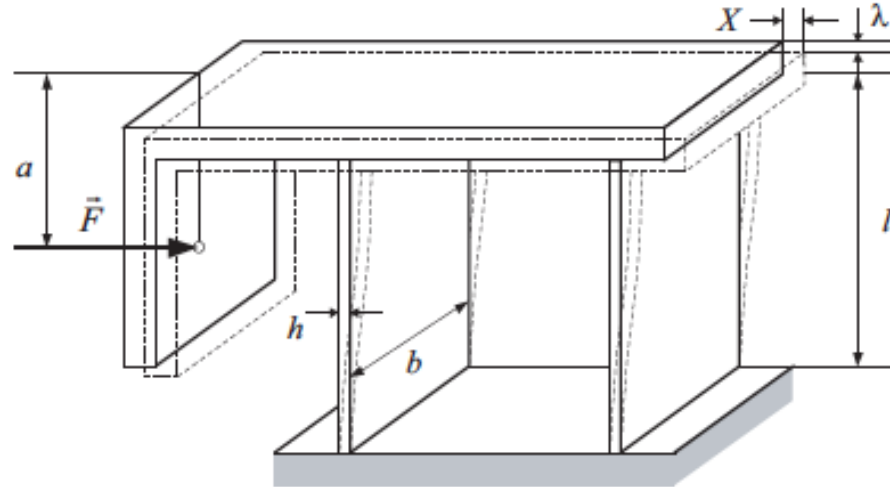
- **Comprendre les avantages des guidages flexibles**
- **Exprimer les différentes constantes de ressort d'une lame**



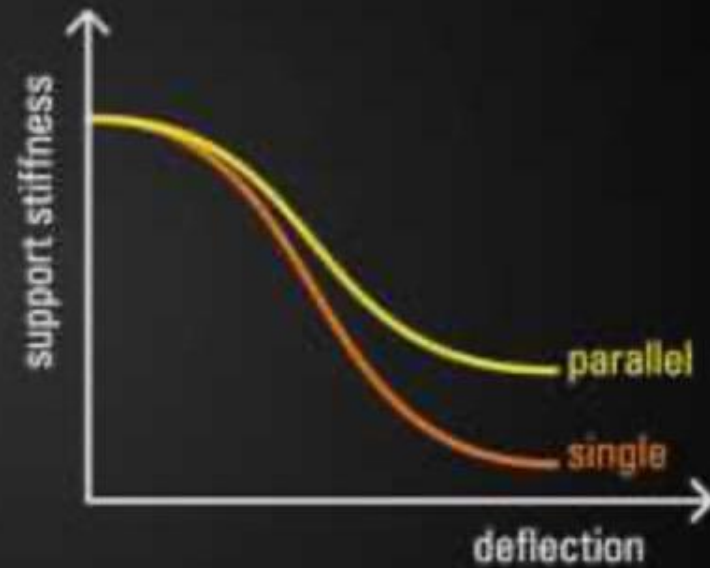
# Guidages Flexibles - *Flexures*

d'importance capitale en Microtechnique!

Référence : S. Henein "[Conception des guidages flexibles](#)",  
Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR)



- jeu, frottement, usure...
- + longue course, pas de rappel



# Guidages Flexibles en métal



Pivot mais sans charnière...

- $\pm 10^\circ$
- Décalage de l'axe virtuel: max 1  $\mu\text{m}$
- Lame: 15 mm x 0.35 mm

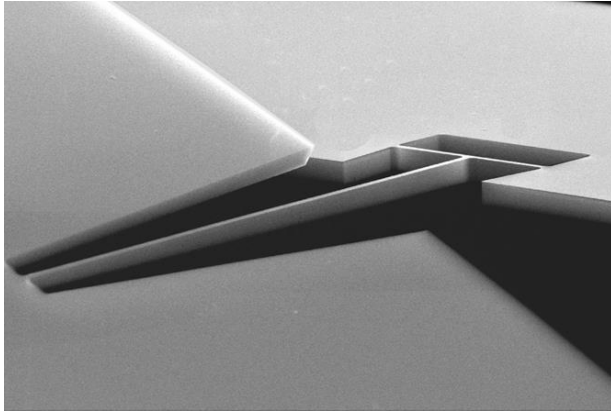


**HOW IT WORKS**

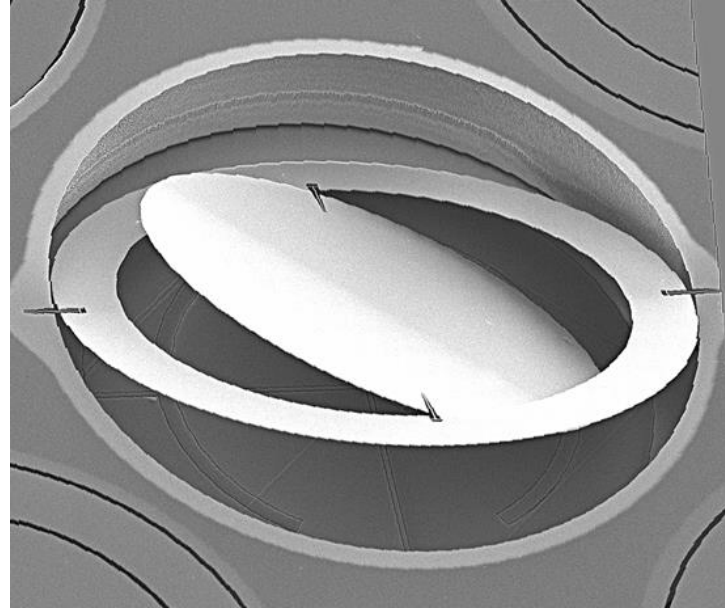
**XACT**

**Wire EDM**

# En silicium



50  $\mu\text{m}$

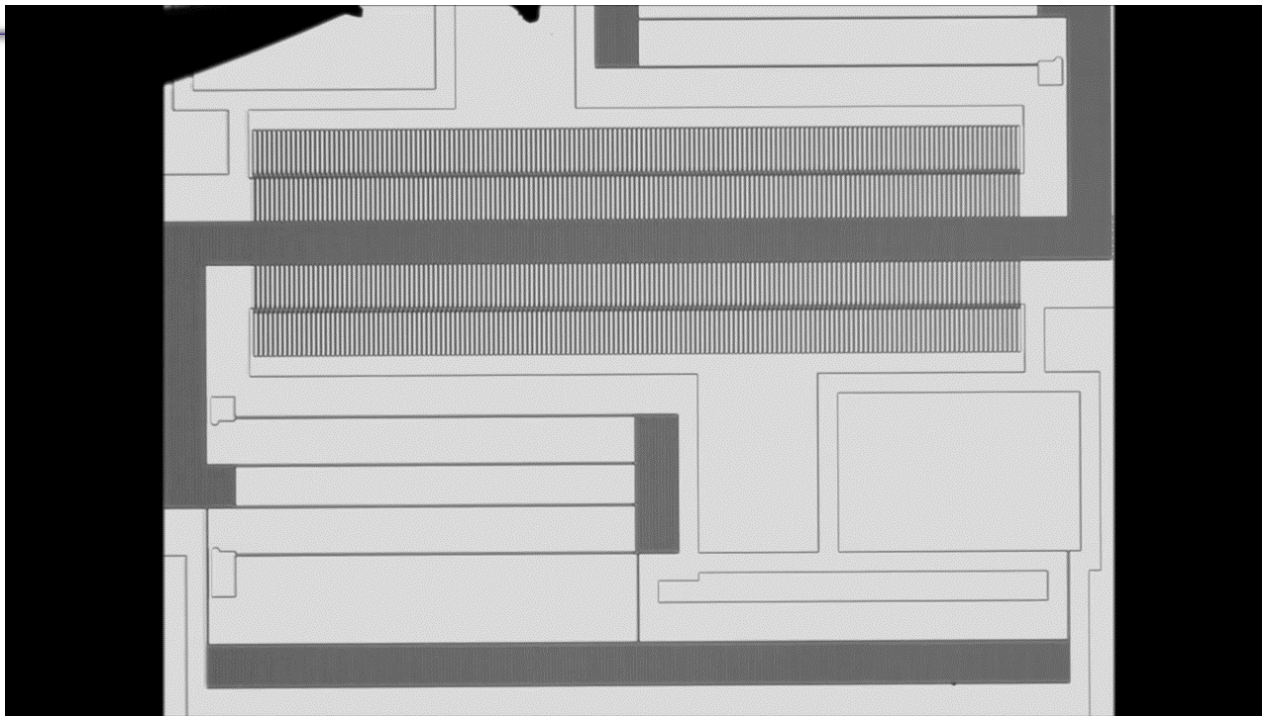


Lucent Technologies

Tous les MEMS (systèmes micro usinés) utilisent des guidages flexibles.

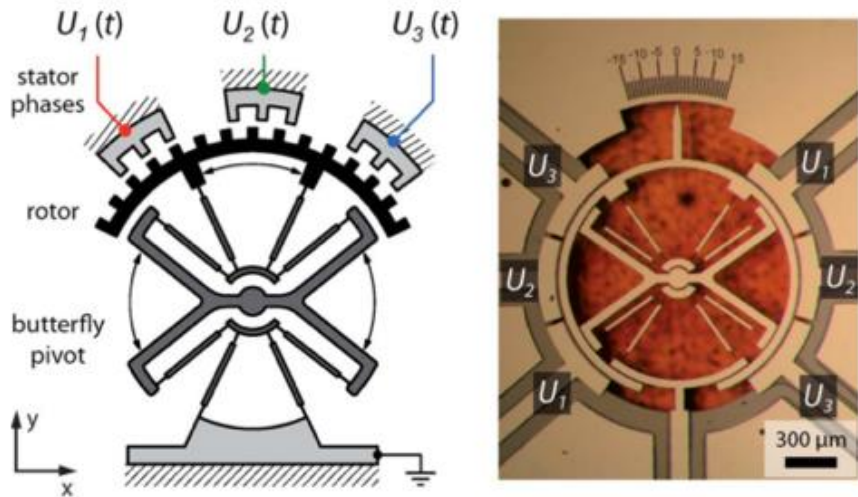
Due aux forces de surface, il n'est pas réaliste de faire une glissière ou un pivot à l'échelle du  $\mu\text{m}$ . Impossible de lubrifier efficacement à l'échelle du  $\mu\text{m}$ .

# Guidage flexible pour translation en Silicium



<https://www.youtube.com/watch?v=YwKM4Pvvidw>

- Très grande rigidité en x
- Faible  $k$  en y



$$F = -\frac{dE}{dx} = -\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} CV^2 \right) = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 V^2 \frac{t}{g}$$

## Single-mask stepper micromotor fabricated with SOI technology

Marc Stranczl, Edin Sarajlic, Hiroyuki Fujita,  
Martin A. M. Gijs, Christophe Yamahata

EPFL, IMT • 10/2011

Stranczl, M.; Sarajlic, E.; Fujita, H.; Gijs, M.A.M.; Yamahata, C.,  
"High-Angular-Range Electrostatic Rotary Stepper Micromotors Fabricated  
With SOI Technology," JMEMS, vol.21, no.3, pp.605,620, 2012  
doi: 10.1109/JMEMS.2012.2189367

En plastique



<https://www.compliantmechanisms.byu.edu/about-compliant-mechanisms>

# guidages flexibles

- Avantages:
  - Absence de frottement (pas de “stick & slip”)
  - Absence d’usure
  - Absence de grippage
  - Absence de lubrification
  - Grandes rigidités transverses (donc précision)
  - Absence de jeu
  - Pièces monolithiques (pas d’assemblage)
- Inconvénients:
  - Courses limitées
  - Force de rappel (mais peut être aussi un avantage)
  - Mouvement parasite
  - Modèles géométriques complexes
  - Lourd
  - Fatigue (fiabilité)
  - Usinage peut être difficile ou complexe

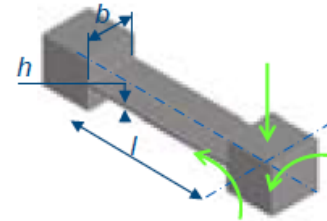
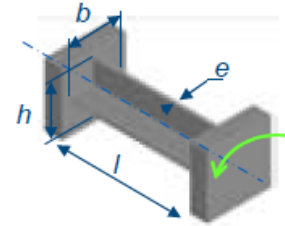
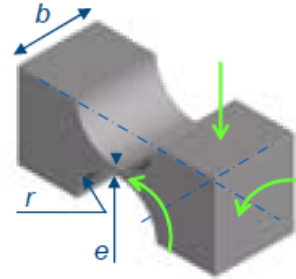
# Guidages Flexible élémentaires

- Les cols (ou amincissements locaux)
  - 3 DDL (2 rotations et 1 translation)
  - Paramètres géométriques :  $b, e, r$



- Les barres de torsion
  - 1 DDL en rotation
  - Paramètres géométriques:  $l, b, h, e$

- Les lames
  - 3 DDL (2 rotations et 1 translation)
  - Paramètres géométriques:  $l, b, h$



Nous n'allons étudier que des lames cette semaine (cols et torsion avec Simon Henein en semaine 11-14 et le semestre prochain)

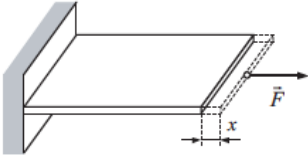
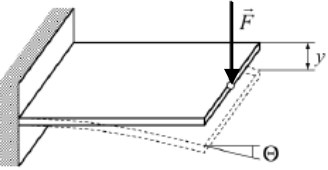
Quelle est ~~la~~ constante de ressort d'une lame?

Quelles sont **les** constantes **s** de ressort d'une lame?

on applique une force ou un moment...  
forces dans différentes directions...

# Les constantes de ressort d'une lame ou poutre

Impose une **Force**  
à l'extrémité de la  
poutre

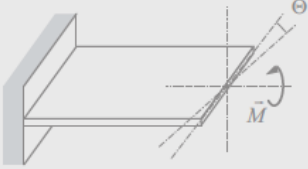
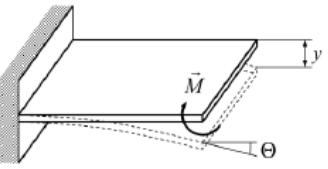
Liaison	Constante d'élasticité
	<p>Rigidité en traction</p> $k_{traction} = \frac{F}{x}$
	<p>Rigidité en cisaillement</p> $k_{cis,y} = \frac{F}{y} \quad k_{cis,\theta} = \frac{F}{\theta}$

$$k_{traction} = E \frac{A}{L}$$

$$k_{cis,y} = \frac{3EI}{L^3}$$

$$k_{cis,\theta} = \frac{2EI}{L^2}$$

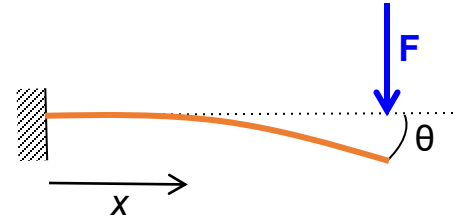
Impose un **Moment**  
à l'extrémité de la  
poutre

	<p>Rigidité de torsion</p> $k_{tor} = M/\theta$
	<p>Rigidité de flexion</p> $k_{flex,y} = M/y$ $k_{flex,\theta} = M/\theta$

$$k_{flex,y} = \frac{2EI}{L^2}$$

## Calcul de $k_{cis,\theta}$ et $k_{cis,y}$

Poutre encasturée de longueur  $L$  avec **force  $F$**  imposée à l'extrémité (on néglige la masse de la poutre):



$$w(x) = \frac{F}{6EI} (x^3 - 3Lx^2)$$

$$w'(x) = \frac{F}{EI} \left( \frac{x^2}{2} - Lx \right)$$

$$\theta = w'(x = L) \quad \theta = \frac{F}{2EI} L^2$$

$$w(x = L) = \frac{F L^3}{3EI}$$

$$k_{cis,\theta} = \frac{F}{\theta(x = L)}$$

$$k_{cis,\theta} = \frac{2EI}{L^2}$$

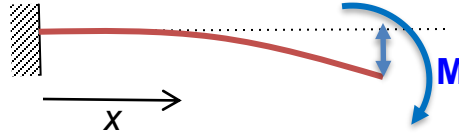
$$k_{cis,y} = \frac{F}{w(x = L)}$$

$$k_{cis,y} = \frac{3EI}{L^3}$$

Question

Que vaut  $k_{flexion,y} = \frac{M}{w(x=L)}$

- A.  $k_{flexion,y} = \frac{2EI}{L^2}$
- B.  $k_{flexion,y} = \frac{2EI}{L^3}$
- C.  $k_{flexion,y} = \frac{L^2}{2EI}$
- D.  $k_{flexion,y} = \frac{EI}{2L^2}$



- $k_{flexion,y} = 2EI L^2$
- $k_{flexion,y} = 2EI L^3$
- $k_{flexion,y} = L^2 2EI$
- $k_{flexion,y} = EI 2L^2$

$$v = -\frac{M_0 x^2}{2EI}$$

$$\delta_B = \frac{M_0 L^2}{2EI}$$

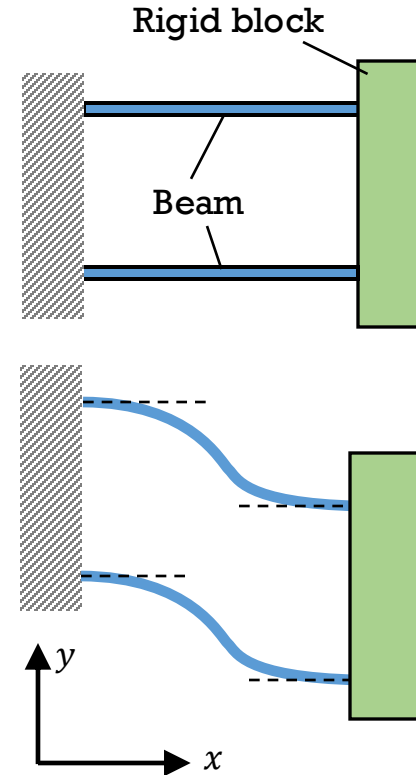
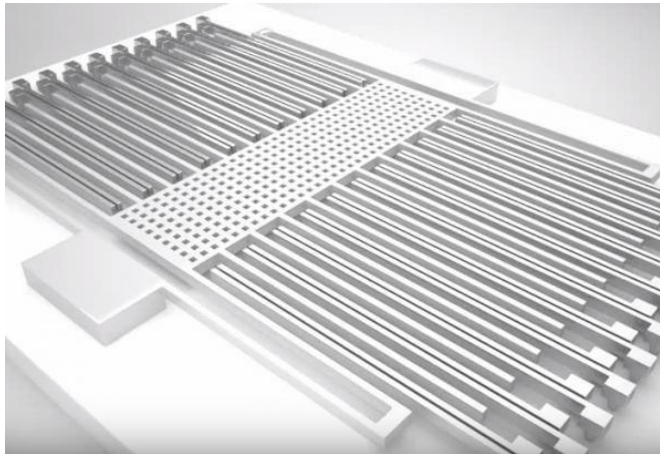
$$v' = -\frac{M_0 x}{EI}$$

$$\theta_B = \frac{M_0 L}{EI}$$

**Solution**

# Exemple : guidage flexible Parallélogramme

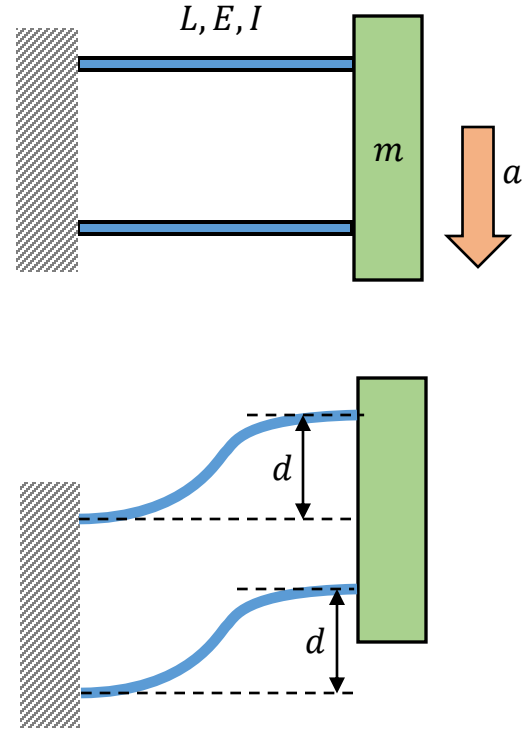
- Le bloc rigide ne se déplace que le long de l'axe  $y$  (petit mouvement parasite en  $x$ )
- Il a de nombreuses applications de ce type de guidage en MEMS tels que dans les accéléromètres et les gyroscopes.



# Exemple: accéléromètre simplifié

- Cet accéléromètre est composé de deux poutres identiques doublement encastées et d'un bloc indéformable de masse  $m$ .
- Il est soumis à une accélération  $a$ .
- **Trouver le déplacement  $d$  du bloc en fonction de l'accélération  $a$ .** Ceci permettra de trouver la sensibilité de l'accéléromètre  $d/a$

Pour un Analog Devices ADXL50  $dx/da = 0.43 \text{ nm} / \text{g}$   
 $0.043 \text{ nm} / (\text{ms}^{-2})$



Il y a plusieurs façons de résoudre ce problème. Une est d'utiliser les formules pour  $k_{ressort}$ .

Ici je prends d'abord un « raccourci », employant les formules du slide 51 de la semaine 8b (semaine dernière, la flèche des poutres)

Puis en slide 26 on verra une méthode plus complète.

## La forme matricielle de $w(L)$ permet de voir la superposition

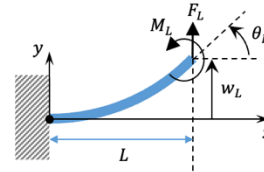
Présentation matricielle

Variables adimensionnelles

$$\tilde{w}_L = \frac{w_L}{L}$$

$$\tilde{F}_L = \frac{F_L L^2}{EI}$$

$$\tilde{M}_L = \frac{M_L L}{EI}$$

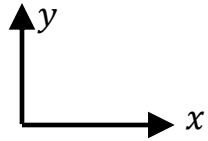
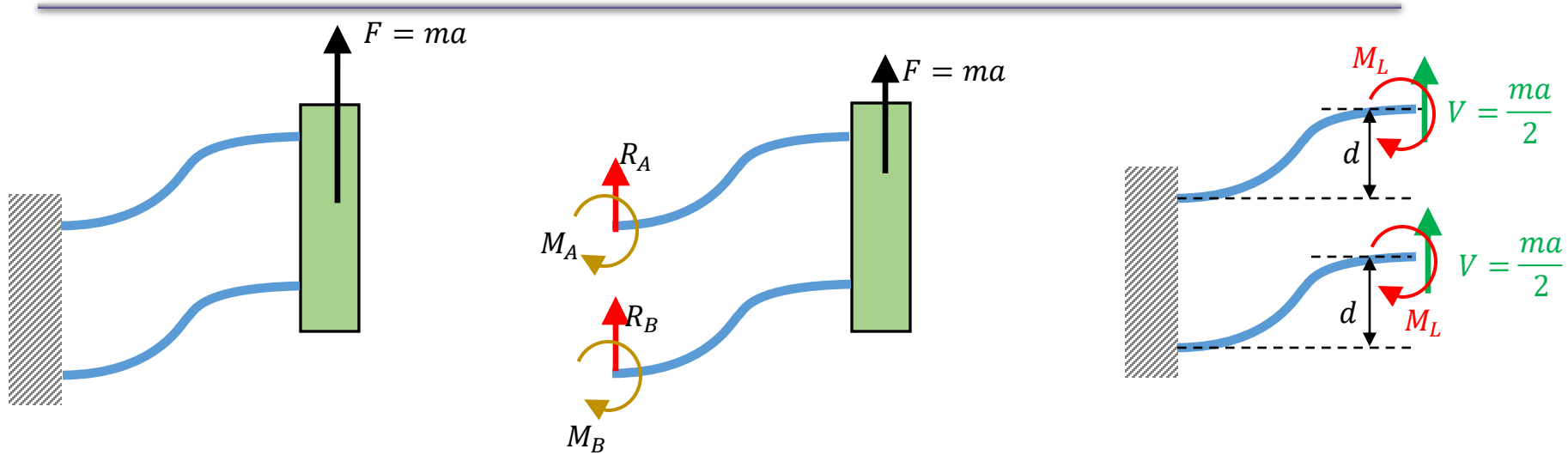


$$\begin{bmatrix} \tilde{w}_L \\ \theta_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{F}_L \\ \tilde{M}_L \end{bmatrix}$$

matrice de souplesse

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}_L \\ \tilde{M}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_L \\ \theta_L \end{bmatrix}$$

matrice de rigidité



1. Diagramme des Forces du système « lames + masse »

2. on coupe à l'extrémité droite des lames.

$$V = \frac{ma}{2} \widehat{e}_y$$

Moment  $M_L$

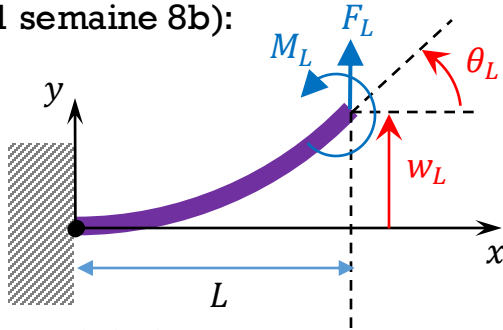
Attention: hypothèse de symétrie...

nous ne connaissons pas encore  $M_L$  !

# Solution, utilisant formules flèches de la semaine 8b

## 1. Exprimer $d$ en fonction de $a$

Rappel (slide 51 semaine 8b):



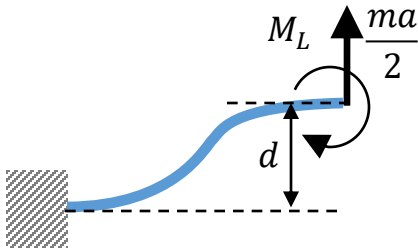
$$\begin{bmatrix} \widetilde{F}_L \\ \widetilde{M}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{w}_L \\ \theta_L \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{w}_L = \frac{w_L}{L}, \widetilde{F}_L = \frac{F_L L^2}{EI}, \widetilde{M}_L = \frac{M_L L}{EI}$$

$$F_L = \frac{12EI}{L^3} w_L - \frac{6EI}{L^2} \theta_L$$

(nous avons résolu le cas général)

Pour notre cas



$$\theta_L = 0 \quad F_L = \frac{ma}{2}$$

$$M_L = \text{inconnu} \quad w_L = d$$

$$F_L = \frac{ma}{2} = \frac{12EI}{L^3} d - \frac{6EI}{L^2} \cdot 0$$

$$\rightarrow d = \frac{L^3 m}{24EI} a$$

# Et trouver $k$ de la lame et $k$ du système)

## 2. Exprimer $k$ en fonction de la géométrie

$$d = \frac{L^3 m}{24EI} a$$

$$\frac{d}{a} = \frac{L^3 m}{24EI}$$

sensibilité

$$F = ma/2$$

$$k_{lame} = \frac{F}{d} = 12 \frac{EI}{L^3}$$

Avons-nous calculé  $k$  d'une lame ou des deux lames?

$$k_{système} = 2 k_{lame} = 24 \frac{EI}{L^3}$$

Comparer à slides 34-35

Exemple numérique:

$L=100 \mu\text{m}$ ,  $m=20 \mu\text{g}$ ,  $E=160 \text{ GPa}$ ,  $a=1 \text{ ms}^{-2}$ ,  
section des lames  $2 \mu\text{m} \times 10 \mu\text{m}$ .

$$d = 0.75 \text{ nm}$$

$$d/a = 7.5 \times 10^{-10} \text{ s}^2$$

$$k = 26 \text{ N/m}$$

$$\text{ADXL50} \quad dx/da = 4. \cdot 10^{-11} \text{ s}^2$$



## Semaine 9a– partie 2

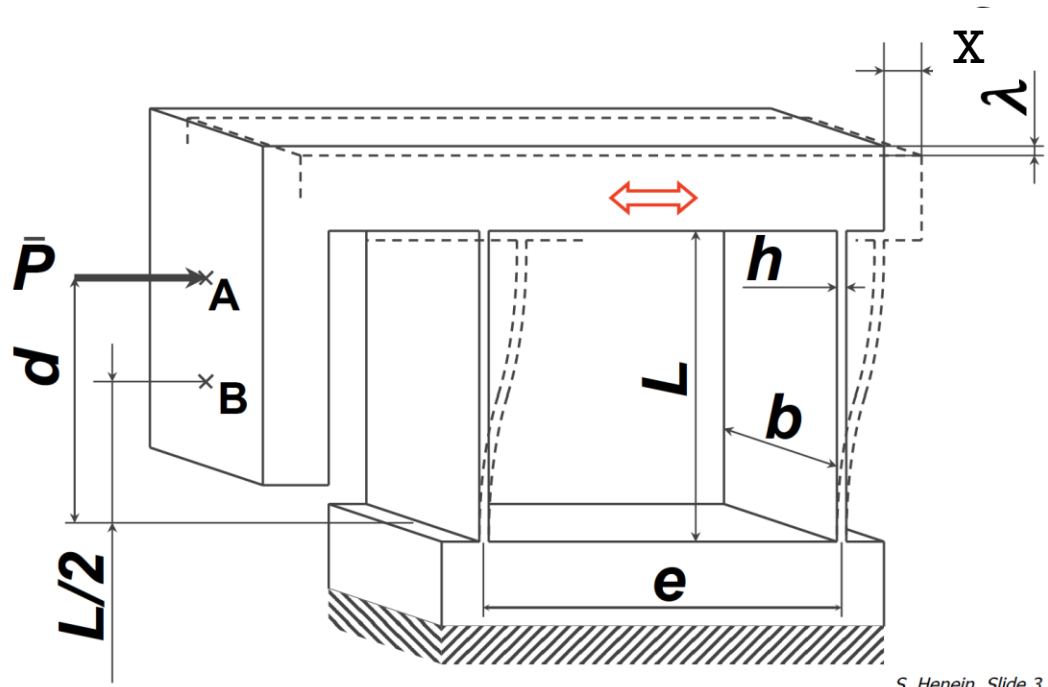
# Constante de ressort de guidage flexibles

## Objectifs d'apprentissage

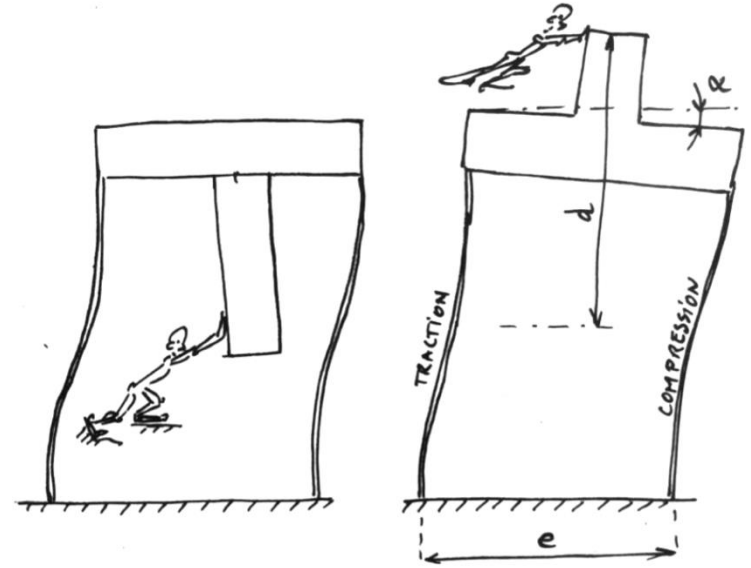
- Calculer constante de ressort d'un système avec des guidages flexibles à lames

# Table à deux lames (guidage en translation)

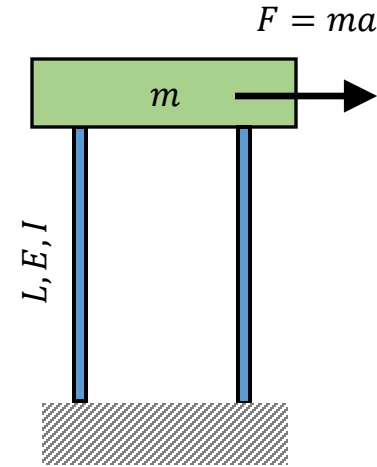
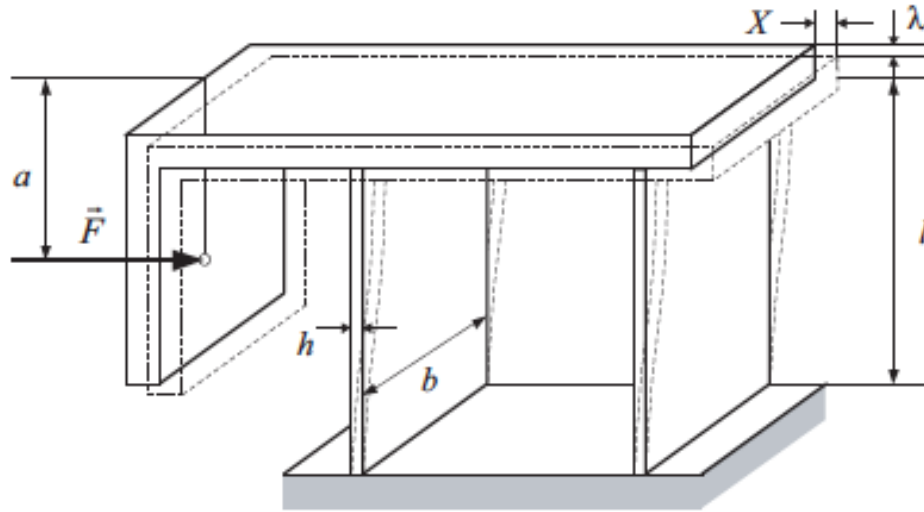
## Parallel spring stage



S. Henein, Slide 3



# Table à deux lames



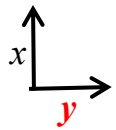
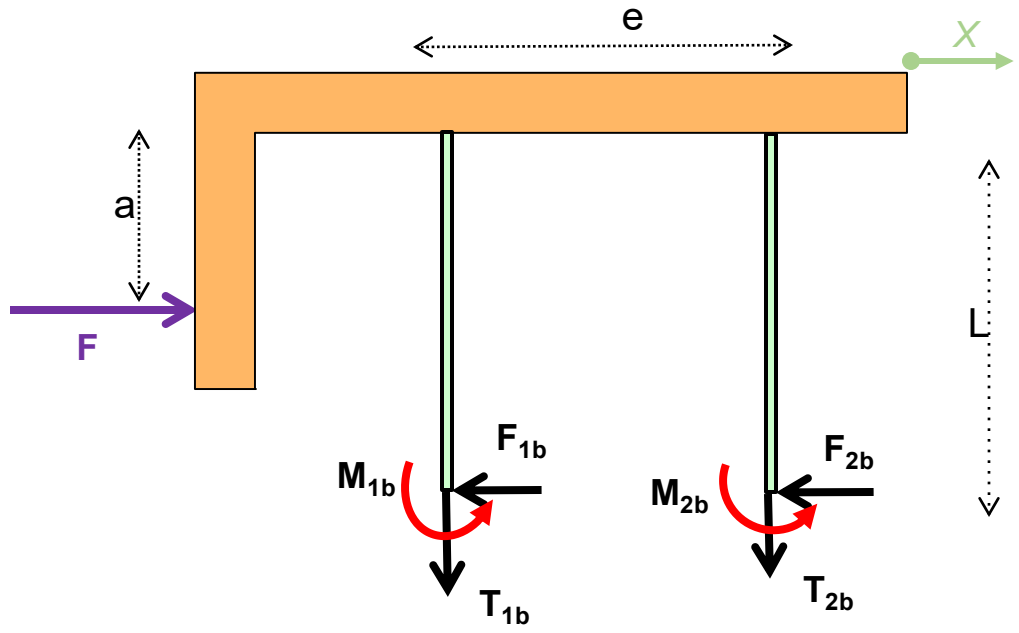
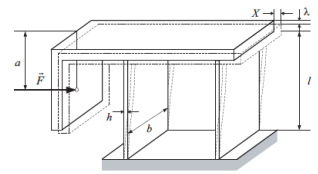
Calculer la rigidité  $K$  pour un déplacement en  $X$   
 $F = K X$

- Lames **encastrées** dans le support et dans la base mobile.
- Nous allons négliger la masse de la table, et le déplacement parasite  $\lambda$ . Mais dans qqs semaines, vous en tiendrez compte pour dimensionner vos guidages flexibles

# Méthode pour trouver rigidité $K$ de la table

1. Définir la force d'entrée  $F$  et le déplacement de sortie  $X$
2. Diagramme des forces
3. Isoler les éléments flexibles et identifier les déformations  $x_i$  des éléments flexibles
4. calculer  $X = X(x_i)$
5. Identifier toutes les forces et moments externes agissant sur les éléments flexibles
6. Déterminer ces forces et moments externes en fonction de  $F$  (*attention, il faudra souvent des hypothèses supplémentaires*)
7. Calculer les déformations  $x_i$  des divers éléments flexibles
8. Déterminer  $X$
9. Calculer  $K = F/X$

# Diagramme des forces de table à deux lames

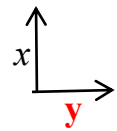
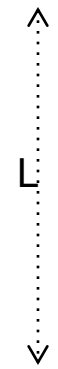
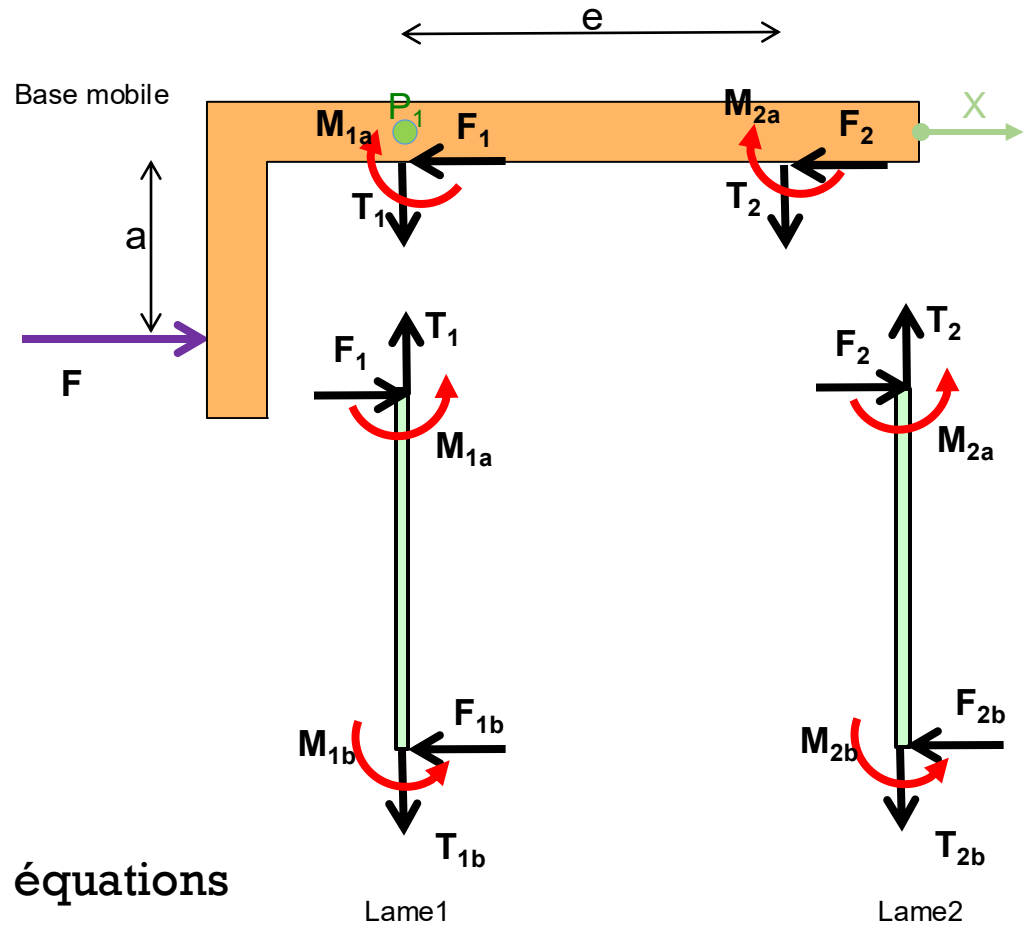
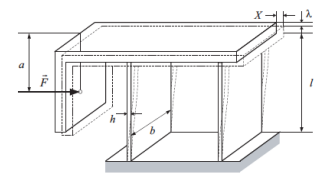


7 inconnus, mais seulement 3 equations

7 inconnus: X, 4 forces, 2 moments

Attention au système de coordonnées: poutres "verticales", axe y positif vers la droite. Axe x vers le haut

# Diviser en 3 sous-systèmes



13 inconnus...  
 mais que  $3 \times 3 = 9$  équations

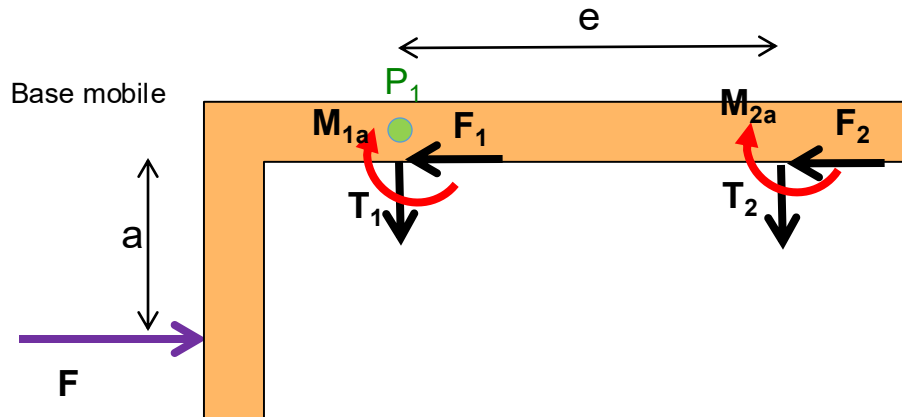
## Utiliser les équations de la statique sur la base mobile

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow T_1 = -T_2$$

donc une lame est en *traction*, une lame est en *compression*!

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F = F_1 + F_2$$

$$\text{Au point } P_1: \Sigma M_{\dot{a}P_1} = 0 \rightarrow 0 = -M_{1a} - M_{2a} - T_2e + aF$$



Trop d'inconnus! Nous allons ajouter deux hypothèses:

1. Les lames se déforment de manière identique à leurs deux extrémités.

$$M_{1a} = M_{1b} = M_1$$

$$M_{2a} = M_{2b} = M_2$$

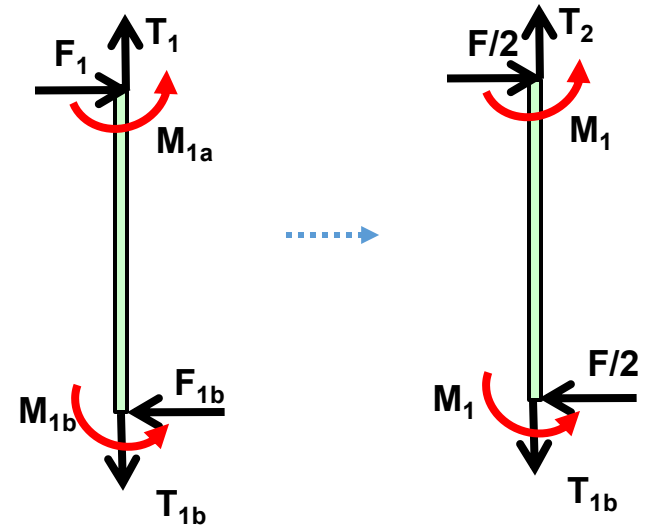
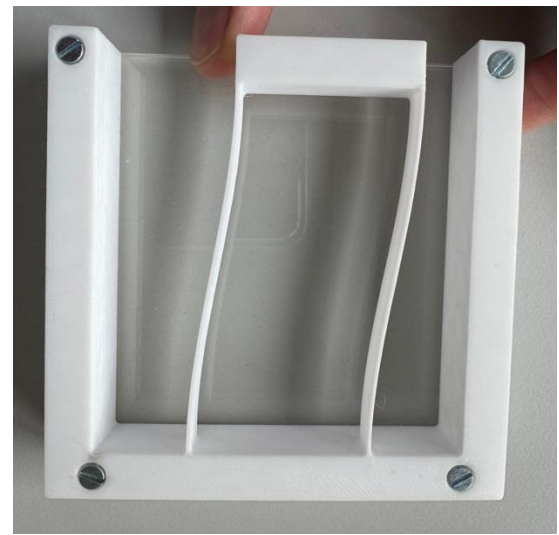
2. Les deux lames se déforment de façon identique.

$$F_1 = F_2$$

$$M_1 = M_2$$

Nous avons alors

$$F_1 = F_2 = F/2$$



Sur lame 1,  $\sum M = 0$  à une extrémité

$$M_1 + M_1 - F_1 L = 0$$

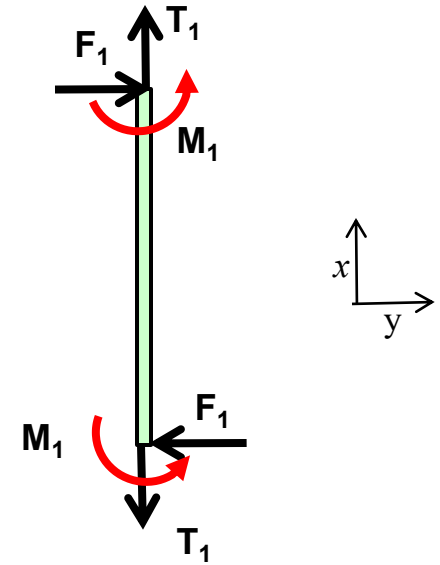
$$M_1 = \frac{LF}{4}$$

Sur base mobile,  $\sum M = 0$  au point  $P_1$

$$-M_1 - M_2 + aF - eT_2 = 0$$

$$2M = aF - eT_2$$

$$T_1 = -T_2 = \frac{F}{e} \left( \frac{L}{2} - a \right)$$



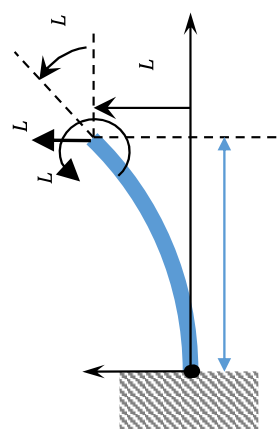
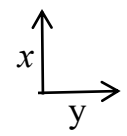
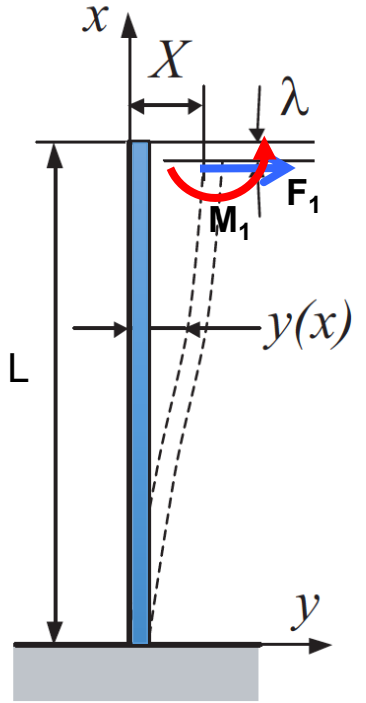
Pour simplifier encore plus, nous allons nous limiter au cas sans forces de traction dans les lames: nous imposons  $a = \frac{L}{2}$  afin que  $T_1 = T_2 = 0$

Nous pouvons enfin calculer  $x_i$ , donc  $X$ , pour trouver  $K = F/X$

# Option 1. suivre slide 51, s8b (on cherche X, puis K)

$$F_1 = \frac{F}{2}$$

$$M_1 = \frac{LF}{4}$$



$$\begin{bmatrix} \widetilde{w}_L \\ \theta_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{F}_L \\ \widetilde{M}_L \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{w}_L = \frac{w_L}{L}, \quad \widetilde{F}_L = \frac{F_L L^2}{EI}, \quad \widetilde{M}_L = \frac{M_L L}{EI}$$

$$\widetilde{w}_L = - \left( -\frac{\widetilde{F}_L}{3} + \frac{\widetilde{M}_L}{2} \right)$$

Attention, pas même système de coordonnées...

$$X = w_L = \frac{1}{3} \frac{F_1 L^3}{EI} - \frac{1}{2} \frac{M_1 L^2}{EI}$$

$$= \frac{FL^3}{EI} \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right)$$

$$= \frac{FL^3}{24 EI}$$

$$K = \frac{F}{X} = \frac{F}{w_L}$$

$$K = \frac{24 EI}{L^3}$$

Rappel, valable que pour  $a = L/2$

$K_{\text{système}} = 8x$  rigidité d'une simple poutre encastée

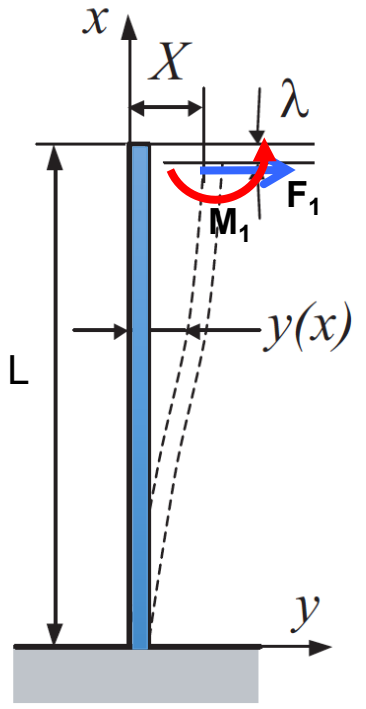
$$k_{cis,y} = \frac{3EI}{L^3}$$

Option 2. utiliser les  $k_{lame}$  de slide 15 (on cherche X, puis K)

$$X = y_1(L) = y_2(L)$$

$$k_{flexion,y} = \frac{M}{w(x=L)} = \frac{2EI}{L^2}$$
$$k_{cis,y} = \frac{F}{w(x=L)} = \frac{3EI}{L^3}$$

$$F_1 = \frac{F}{2}$$
$$M_1 = \frac{LF}{4}$$



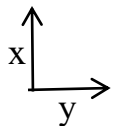
$$y_1(L) = \frac{F_1}{k_{cis,y}} - \frac{M_1}{k_{flexion,y}}$$

Attention aux directions des forces et moments...

$$K = \frac{F}{X} = \left[ \frac{1}{2k_{cis,y}} - \frac{L}{4k_{flexion,y}} \right]^{-1}$$
$$= \left[ \frac{L^3}{2.3 EI} - \frac{L \cdot L^2}{4 \cdot 2EI} \right]^{-1}$$

$$K = \frac{24EI}{L^3} \quad \text{Pour } a = \frac{L}{2}$$

= 8x rigidité simple poutre encastree



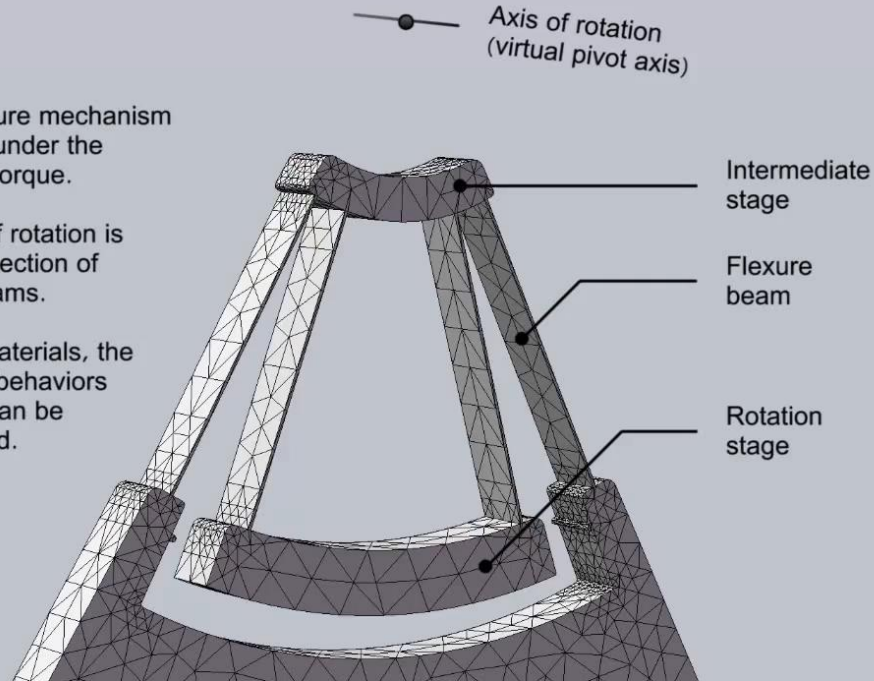
# Exemple, un pivot

## Flexure hinge

This four-beam flexure mechanism deforms elastically under the action of a loading torque.

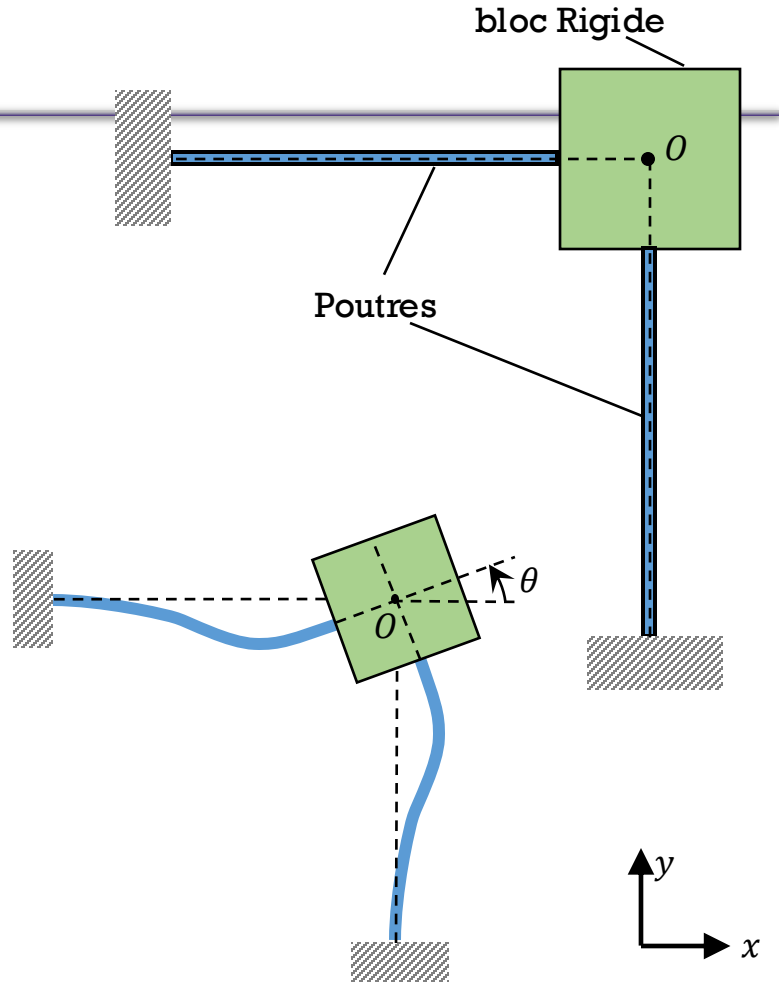
The virtual center of rotation is located at the intersection of the undeformed beams.

Using strength of materials, the static and dynamic behaviors of the mechanism can be precisely determined.

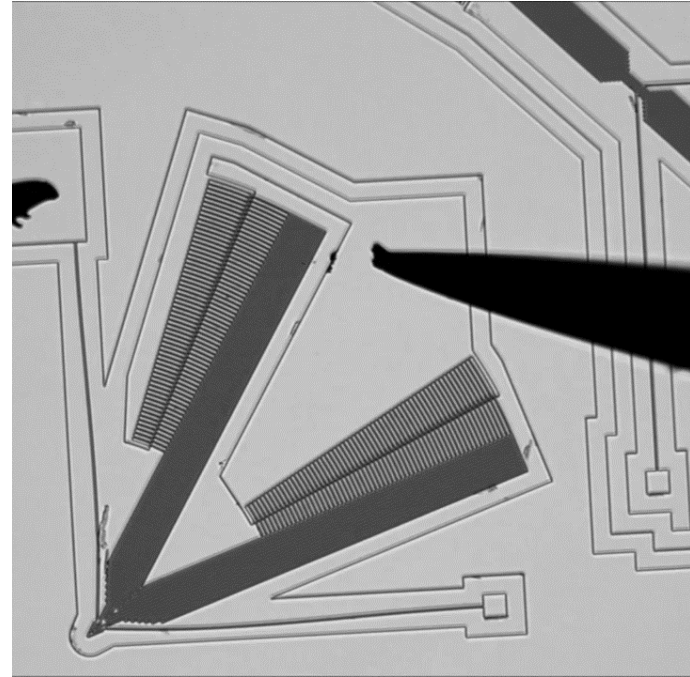
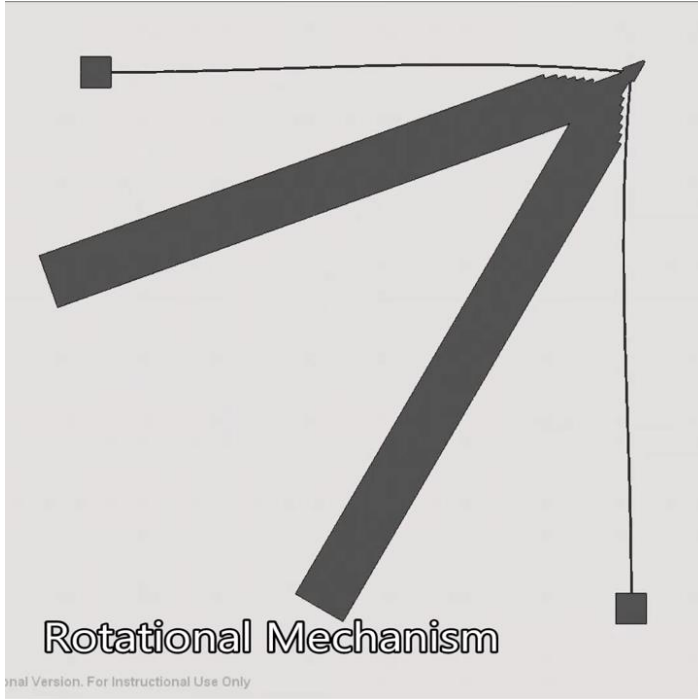


# Exemple: Pivot flexible

- Hypothèse: Le bloc rigide ne pivote qu'autour du point O (l'intersection des axes neutres).
- Hypothèse; aucun déplacement de O sur les axes  $x$  et  $y$ .
- Ce pivot a de nombreuses applications en microtechnique telles que rotation en MEMS (gyro) ou oscillateur de montre.
- Quelle conception pour minimiser la rigidité en rotation (et maximiser rigidité pour autres déformations) ?



# MEMS pivot



<https://www.youtube.com/watch?v=YwKM4Pvvidw>

# Watch oscillator: flexure pivot

Zenith watch oscillator:

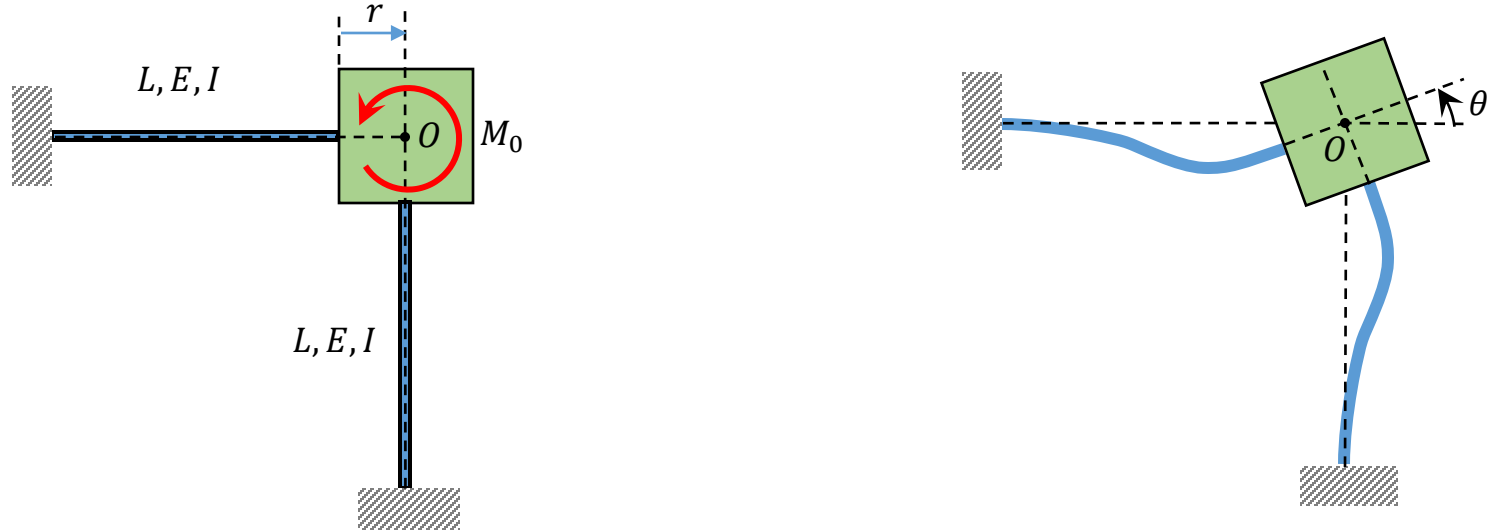
---



<https://www.youtube.com/watch?v=KCTfx9IUjnc>

# Pivot en lames flexible

on impose  $M_0$  (moment externe) pour obtenir une rotation  $\theta$

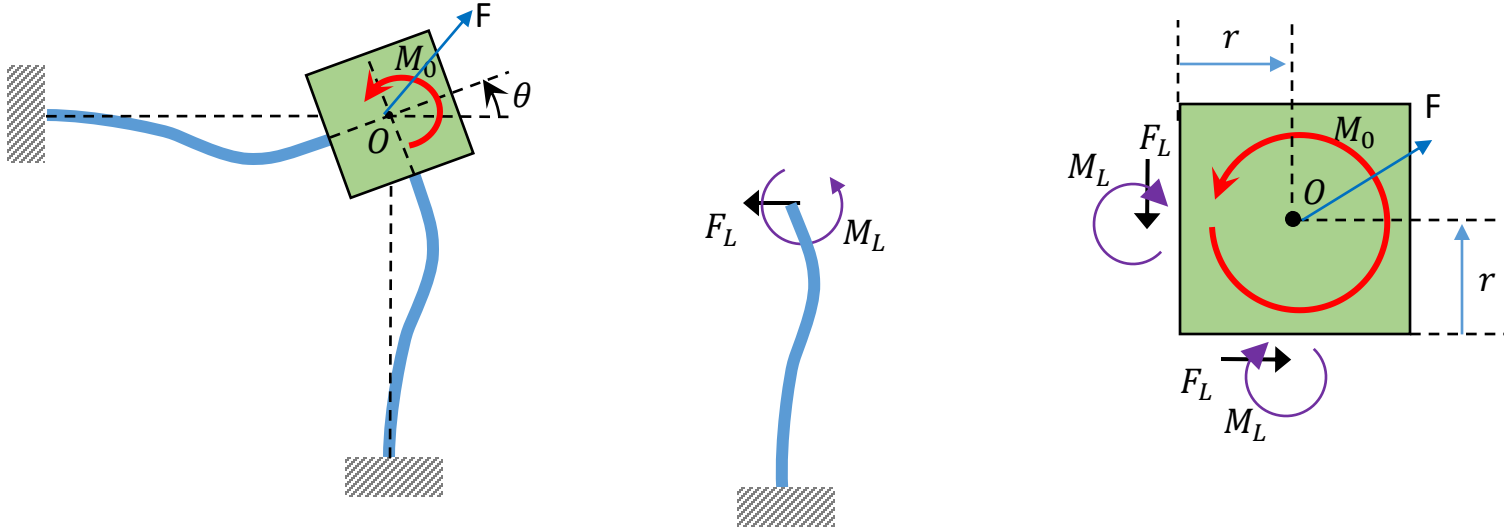


1. Trouver  $M_0$  en fonction de  $\theta$  en supposant un petit angle de rotation.

2. On souhaite un pivot sans force de rappel: minimiser  $M_0$

# Pivot à lames

on impose  $M_0$  (moment externe) pour obtenir une rotation  $\theta$

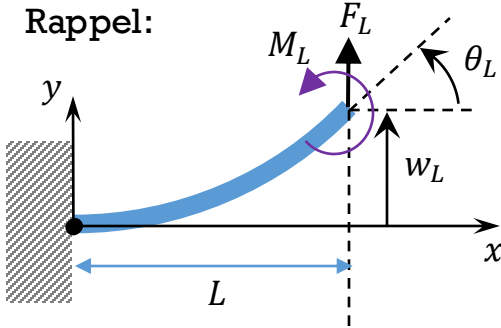


But: Lier  $M_0$  et  $\theta$ , en supposant un petit angle de rotation.

On souhaite un pivot sans force de rappel: minimiser  $K_\theta = \frac{M_0}{\theta}$

# Solution (nous utilisons à nouveau notre solution de p.51 sem. 8b)

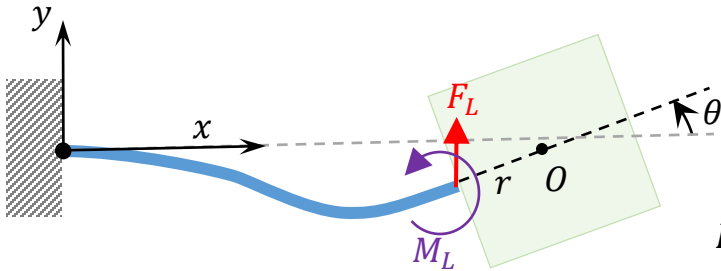
étape 1: Analyse des poutres, lien entre  $F_L$ ,  $M_L$ , et  $w_L$  et  $\theta_L$



$$\begin{bmatrix} \widetilde{F}_L \\ \widetilde{M}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{w}_L \\ \theta_L \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{w}_L = \frac{w_L}{L} \quad \widetilde{F}_L = \frac{F_L L^2}{EI} \quad \widetilde{M}_L = \frac{M_L L}{EI}$$

$$F_L = \frac{12EI}{L^3} w_L - \frac{6EI}{L^2} \theta_L \quad M_L = \frac{-6EI}{L^3} w_L + \frac{4EI}{L^2} \theta_L$$

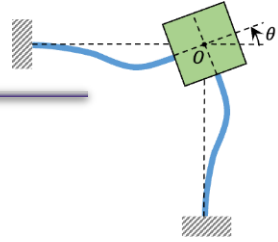


$$w_L \approx -r \sin \theta \approx -r\theta$$

$$\theta_L = \theta \quad F_L: \text{inconnu} \quad M_L: \text{inconnu}$$

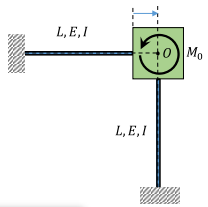
$$F_L = -\frac{12EI}{L^3} r\theta - \frac{6EI}{L^2} \theta = -\frac{6EI}{L^2} \left(1 + 2\frac{r}{L}\right) \theta$$

$$M_L = \frac{6EI}{L^2} r\theta + \frac{4EI}{L} \theta = \frac{2EI}{L} \left(3\frac{r}{L} + 2\right) \theta$$



# Solution

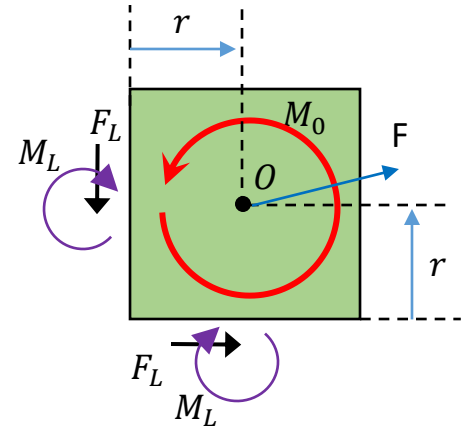
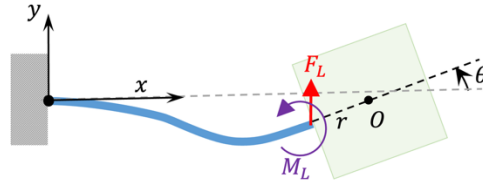
étape 2. diagramme des forces du bloc pour lien entre  $M_0$ ,  $M_L$  et  $F_L$



$$\sum M_{z,O} = 0 \rightarrow M_0 = -2F_L r + 2M_L$$

$$M_0 = \frac{12EI}{L^2} r \left(1 + 2\frac{r}{L}\right) \theta + \frac{4EI}{L} \left(3\frac{r}{L} + 2\right) \theta$$

$$M_0 = \frac{8EI}{L} \left[ 3\left(\frac{r}{L}\right)^2 + 3\frac{r}{L} + 1 \right] \theta$$

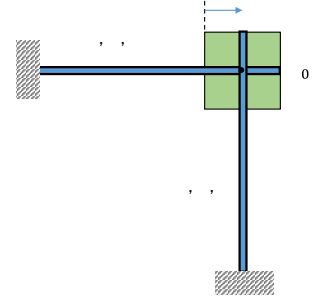
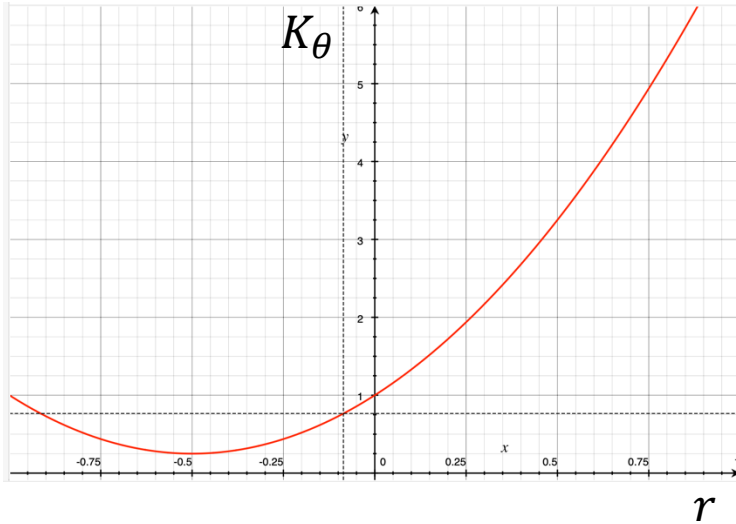


Rigidité en torsion

$$K_\theta = \frac{M_0}{\theta} = \frac{8EI}{L} \left[ 3\left(\frac{r}{L}\right)^2 + 3\frac{r}{L} + 1 \right]$$

$K$  dépend de  $E$ ,  $I$ ,  $L$  mais aussi de  $r$

# Minimiser $K_\theta$

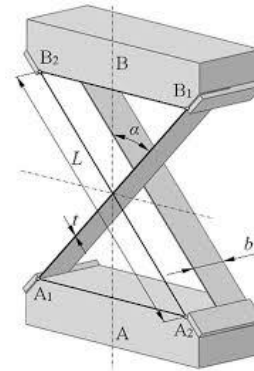
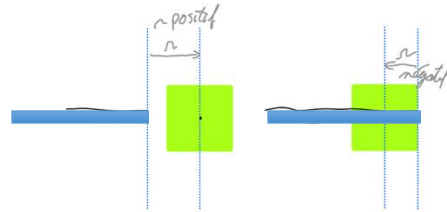


pivot à lames croisées

Rigidité en torsion

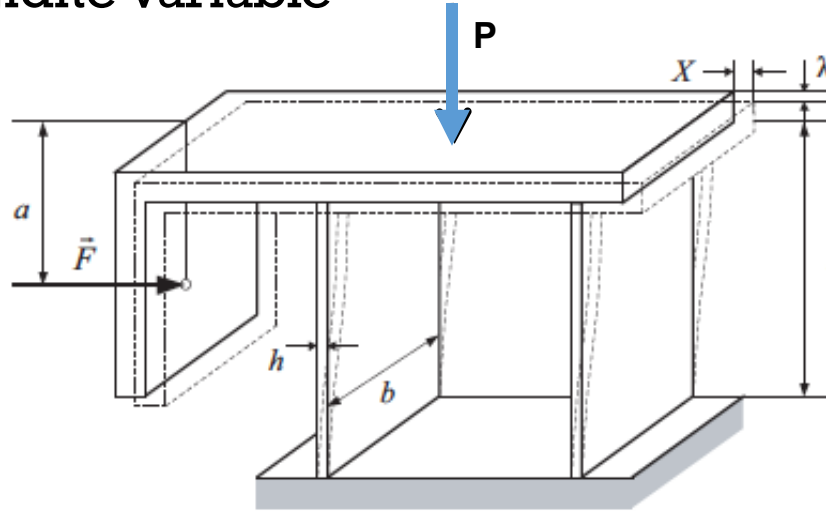
$$K_\theta = \frac{M_0}{\theta} = \frac{8EI}{L} \left[ 3 \left( \frac{r}{L} \right)^2 + 3 \frac{r}{L} + 1 \right]$$

$K$  minimum pour  $\frac{r}{L} = -\frac{1}{2}$ .



# Et si on ajoute un poids P sur la table ?

→ Flambage et rigidité variable



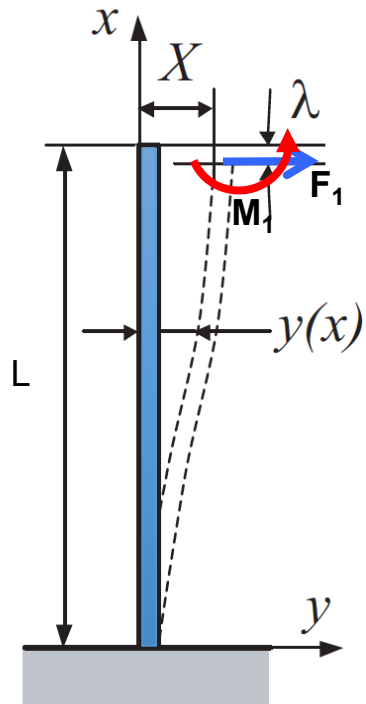
Que vaut K si on ajoute une force P?

- Dans l'exemple précédent, nous n'avons aucune force de traction dans les lames, car nous avons choisi  $a = L/2$
- **Ici, nous verrons que K dépend de P!**
- Nous maintenons l'Hypothèse de symétrie: même déformation dans les 2 lames

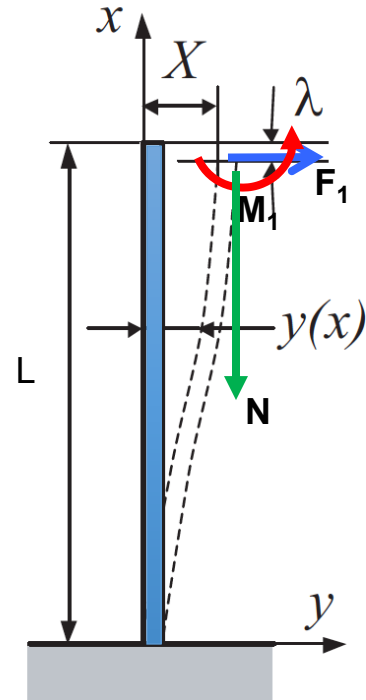
$$K_{P=0} = \frac{24 EI}{L^3}$$

Que pour  $a = L/2$

Commence par lame encastrée en O, avec forces et moment à l'extrémité



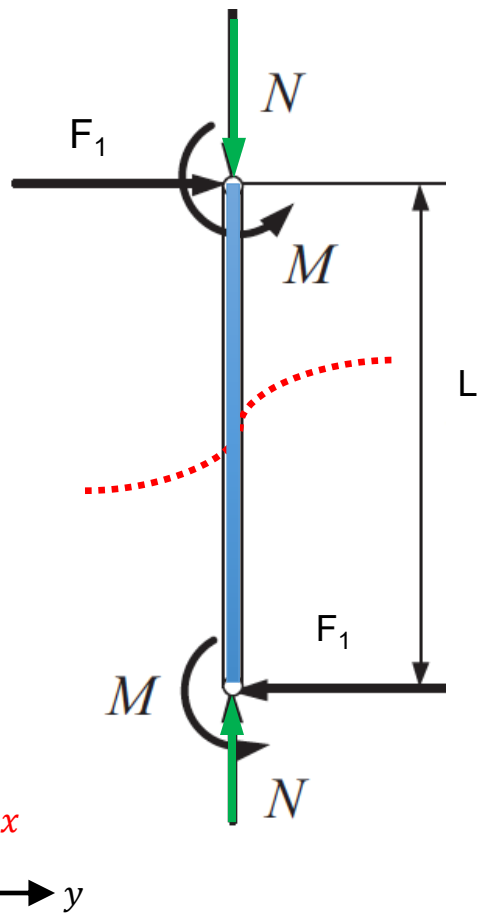
Sans P



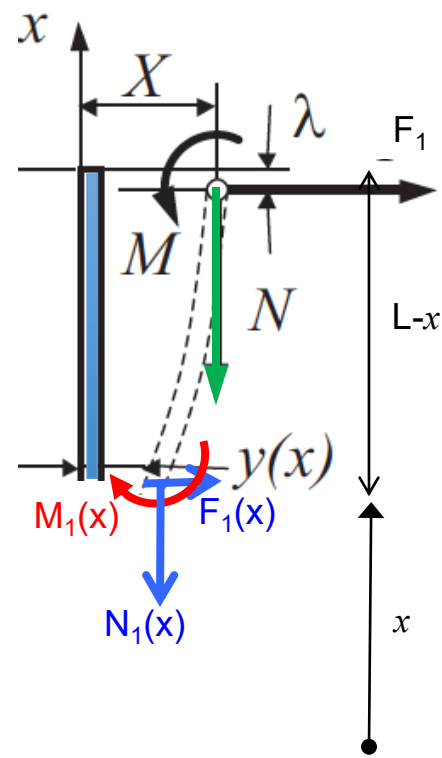
Avec P  
Force axiale N

$$N = \frac{P}{2}$$

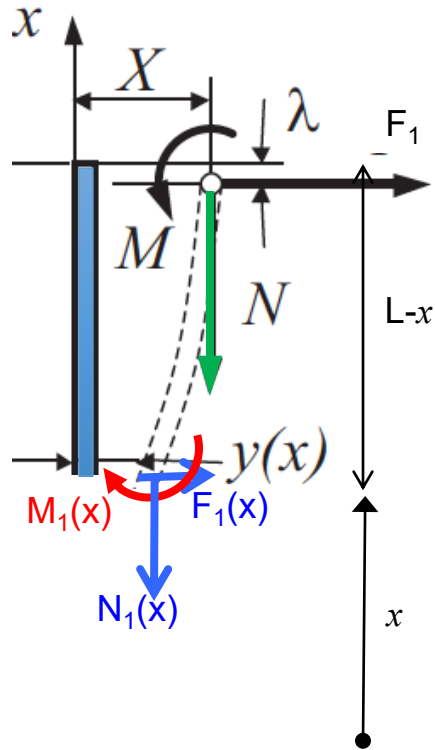
Coupe la lame à une distance  $x$  du support



$$N = \frac{P}{2}$$



Nous cherchons  $y_1(x)$  à  $x = L$ , afin de trouver  $K=F/X$



$$M_1(x) = M - N[X - y(x)] - F_1(L - x)$$

$$y''(x) = \frac{M_1(x)}{EI}$$

$$y''(x) + \frac{N}{EI}y(x) = -\frac{F_1x}{EI} + \frac{F_1L + NX - M}{EI}$$

Équation différentielle 2<sup>ième</sup> ordre pour  $y(x)$

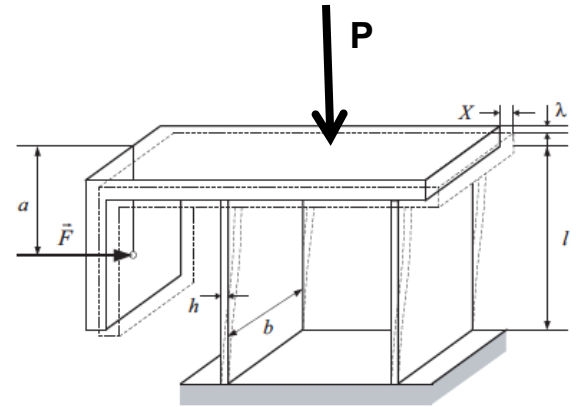
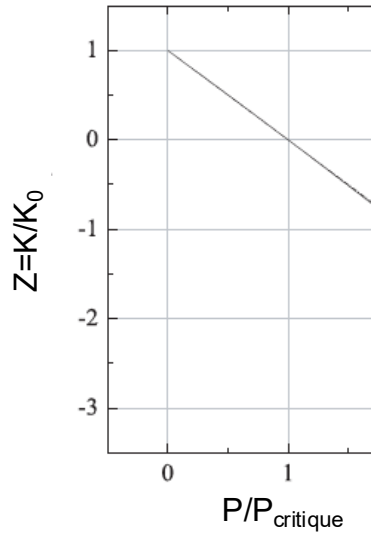
On résout l'équation différentielle,

on trouve  $y(L)$  et donc  $X$ , et finalement  $K$

$$K = \frac{F}{X} = \frac{F}{y(x=L)}$$

$$K = \frac{P/2}{\frac{2}{k} \tan\left(\frac{kL}{2}\right) - L}$$

$$k = \sqrt{\frac{P}{2EI}}$$

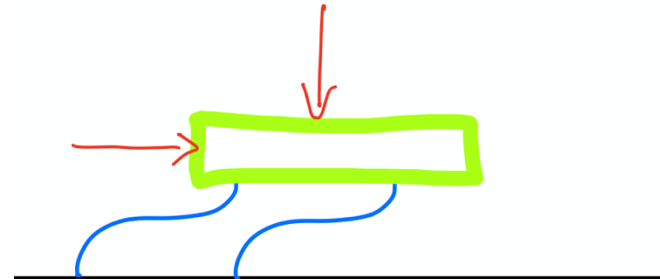


La constante de ressort  $K$  dépend de force verticale sur lame)!!

il existe une charge  $P_{\text{critique}}$  pour laquelle  $K=0$

Quand  $K=0$ , **Flambage !**

On peut ainsi avoir une très faible force de rappel, mais on travaille proche du flambage...



**Vous verrez la suite des guidages flexibles  
en détail avec le Professeur Simon Henein!**