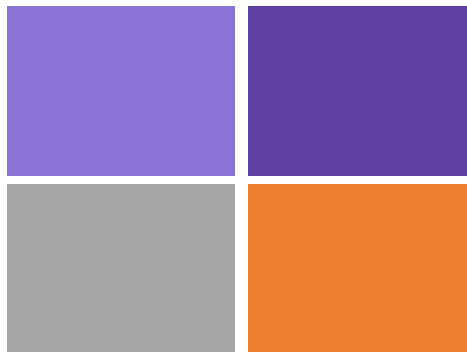


Semaine 8b

Flèches de poutres 1/2



PARTIE 1: (slide 4 - 28)

intro flèche et relations différentielles

(Chapitre 9 de Gere et Goodno)

PARTIE 2: (slide 29 - 38)

flèche pour poutres avec plusieurs « zones »

(Chapitre 9 de Gere et Goodno)

PARTIE 3: (slide 39 - 49)

calcul de flèche par principe de superposition

(Chapitre 9 de Gere et Goodno)

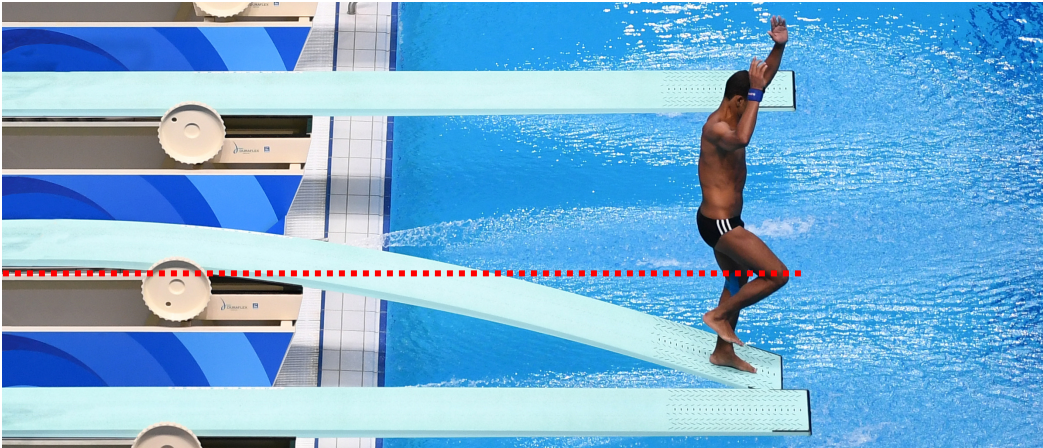
PROGRAMME DU COURS, semaines 6-10

6	14.10	Forces internes dans les poutres non-déformées	x	
6	16.10	$\varepsilon(y)$ et $\sigma(y)$ en flexion pure. Moment d'inertie	x	Série 6
7	28.10	Poutres chargées axialement. Poutres composites	x	Série 6
7	30.10	Quiz + Session questions & réponses D. Briand		Série 1-5
8	04.11	Examen mi-semester D. Briand		
8	06.11	Flèches des poutres	x	Série 7
9	11.11	Flèche pour guidage flexible	x	Série 8
9	13.11	Poutres statiquement indéterminées	x	Série 8
10	18.11	Poutres statiquement indéterminées. Flambage	x	Séries 9
10	20.11	Flambage	x	Série 10

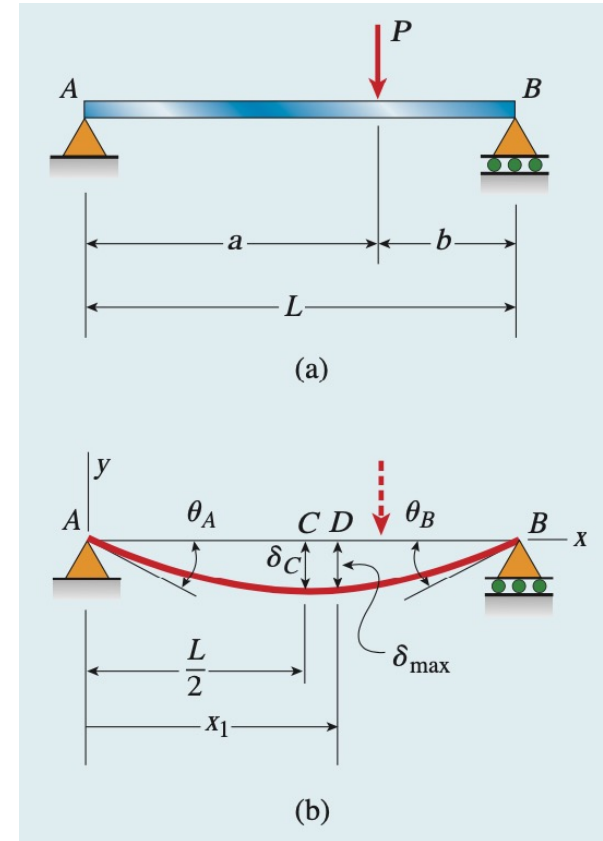
Flèche – partie 1 (slides 4-28)

Objectifs d'apprentissage

- Savoir définir la flèche d'une poutre
- Calculer la flèche en utilisant les relations différentielles entre la flèche $w(x)$ et le moment interne de flexion $M(x)$

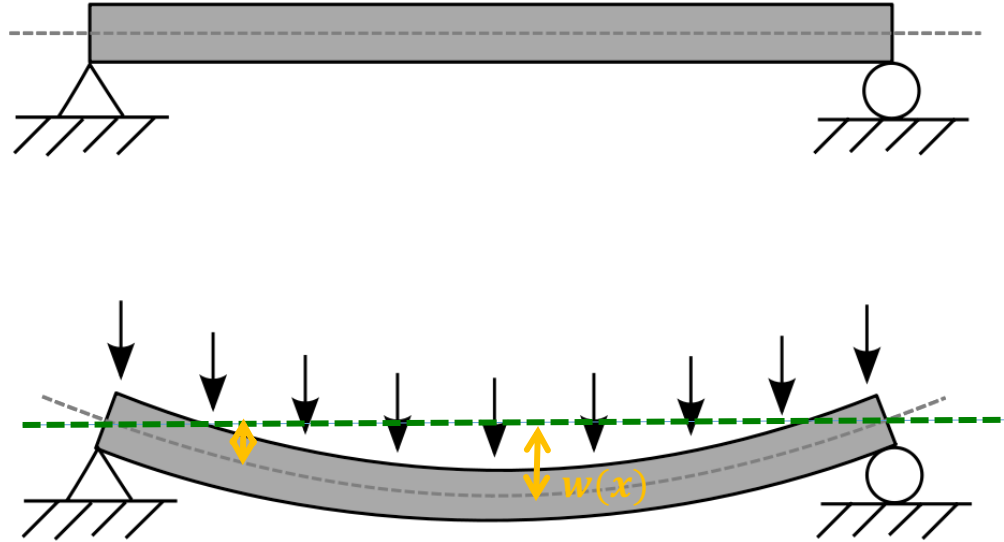


<https://duraflexeu.com/en>





Flèche d'une poutre $w(x)$

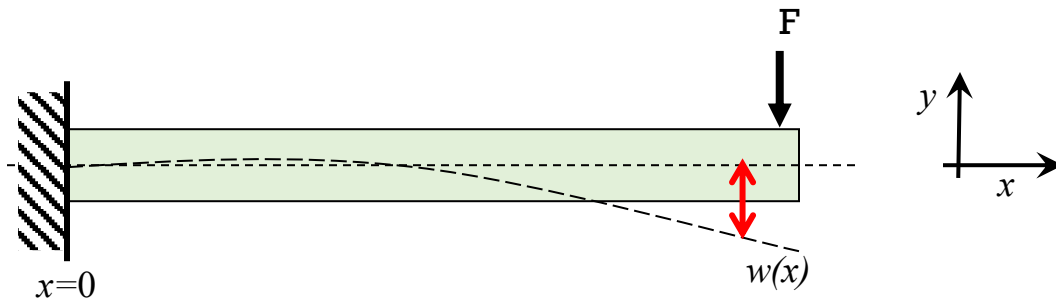


La déformation de l'axe neutre est décrite par la fonction $w(x)$, appelée **la flèche** de la poutre (anglais: *beam deflection*).

À chaque point de la poutre: translation **et** rotation

Hypothèses pour flèche (Euler-Bernoulli)

- (même hypothèses que précédemment dans ce cours)
- Charge en y , moment de flexion en z
- Déformations élastiques linéaires
- Grand rayon de courbure, avec $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \ll 1$
- Poutre de section symétrique par rapport à l'axe y , la flèche sera en direction de y (*nous n'aurons donc pas de flèche en z*)

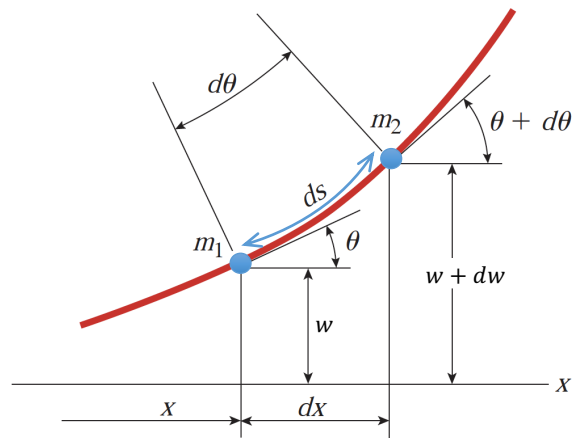
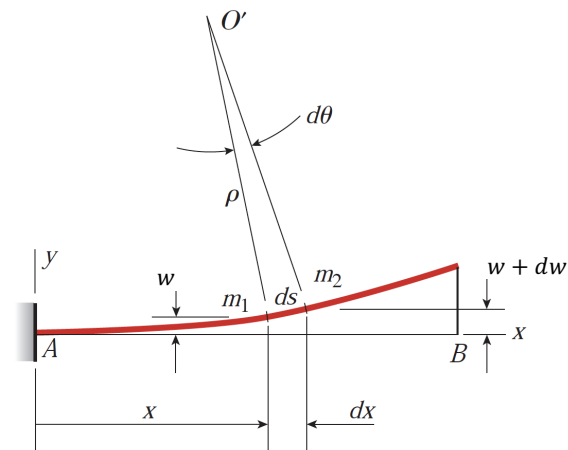
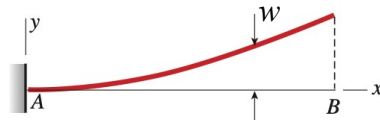


Flèche w d'une poutre

Sans approximations – définitions locales

- On peut lier courbure et flèche
- Localement : Translation en y et rotation autour axe z
- Une poutre a localement un rayon de courbure ρ
- Formule générale pour courbure: $\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$

■ $\tan(\theta) = \frac{dw}{dx}$ (par géométrie)



Flèche d'une poutre

Approximation pour petites déflexions (=ce que nous allons utiliser)

- Si petite déflexion :

- $ds \approx dx$

- $\tan(\theta) \approx \theta$

- ainsi. $\tan(\theta) = \frac{dw}{dx}$ devient $\theta = \frac{dw}{dx}$

- ainsi: $\kappa = \frac{1}{\rho} \approx \frac{d\theta}{dx} \approx \frac{d^2w}{dx^2}$

- nous savons lier rayon de courbure ρ et moment de flexion $M_z(x)$ (semaines précédentes)

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M_z(x)}{EI_{z,y_0}} \approx \frac{d^2w}{dx^2}$$

Flèche d'une poutre

Plus généralement

Plus généralement (sans l'approximation de petits angles)

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Nous n'allons pas traiter ce cas plus général dans ce cours

Relation différentielle: Moment de flexion – flèche

Flèche $w(x)$:

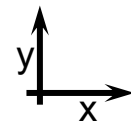
$$w''(x) = \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_z}$$

$M_z(x)$: Moment interne de flexion Unités: [Nm]

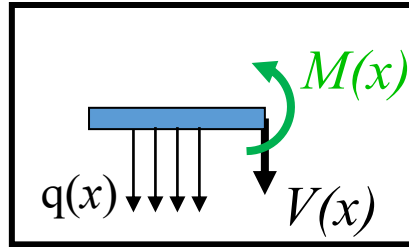
E : Module de Young (« rigidité » du matériau) Unités: [Pa]
 ≈ 100 GPa pour du métal, 2 GPa pour nylon, 1 MPa pour du silicone

I_{z, y_0} : Moment quadratique (d'inertie) : (« rigidité » de la forme) donné par la géométrie de la section et l'axe de déflexion. À l'axe neutre. Unités: [m⁴]

Rappel: Relation différentielle entre:



- charge $q(x)$ (perpendiculaire à poutre)
- force cisaillement $V(x)$
- moment $M(x)$



q positif quand vers le « bas »

$$\begin{aligned}V'(x) &= -q(x) \\M'(x) &= V(x) \\M''(x) &= -q(x)\end{aligned}$$

- la définition du sens conventionnels de $q(x)$ et $M(x)$ sont importants pour le signe des relations différentielles

Relation entre flèche $w(x)$ et charge $q(x)$

$$V(x) = - \int q(x) dx$$

$$M_z(x) = \int V(x) dx$$

$$w'(x) = \theta(x) = \frac{1}{EI_{z,y_0}} \int M_z(x) dx$$

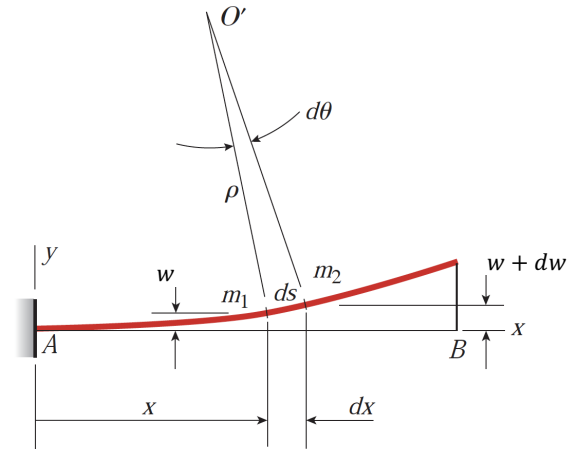
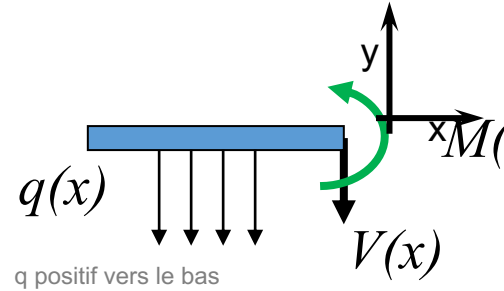
$$w(x) = \int w'(x) dx$$

$$w'(x) = \theta(x)$$

$$w''(x) = \frac{M_z(x)}{EI_z}$$

$$w'''(x) = \frac{V_y(x)}{EI_z}$$

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = - \frac{q(x)}{EI_z}$$



$\theta(x)$ est l'angle que fait la poutre à avec l'axe neutre sans forces

La poutre monte = w positif

Vice-versa: trouver forces, charge et moments à partir de de la déflexion

Ça marche dans les deux sens:

- À partir de la flèche, nous pouvons calculer:
 - Moment de flexion
 - Force de cisaillement
 - Charges ponctuelles et distribuées

- À partir des charges, on peut calculer la flèche

Voir Q3 de série 8a

Constantes d'intégration

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = -\frac{q(x)}{EI_z} \rightarrow w(x) = -\frac{1}{EI} \iiint \int q(x)$$

Oh malheur, il y a donc 4 constantes d'intégration!

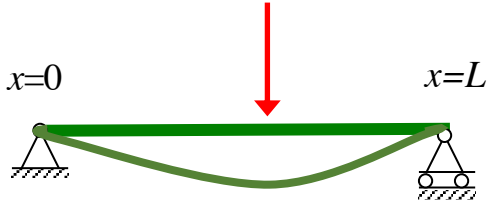
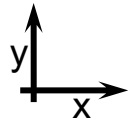
Par exemple, si $q = \text{constante}$, $w(x) = \frac{q x^4}{24} + A \frac{x^3}{6} + \frac{Bx^2}{2} + Cx + D$

Nous trouverons les constantes par:

- i. les conditions aux bords. $M(x)$, $V(x)$, $\theta(x)$ et $w(x)$ aux supports ou aux extrémités
- ii. Continuité de $\theta(x)$ et $w(x)$ si plusieurs zones
(attention, si plusieurs zones, nous aurons plus de constantes d'intégration, car une fonction $w(x)$ par zone)

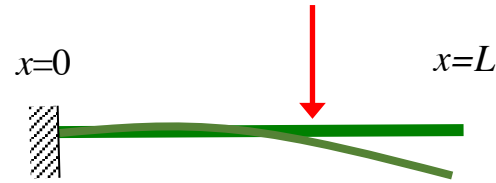
Conditions aux limites sur w et w'

(cas simple d'une seule région)



$$w(0) = 0 \quad \text{flèche connue}$$
$$w(L) = 0 \quad \text{flèche connue}$$

$w'(0)$ et $w'(L)$: angles pas connues



$$w(0) = 0 \quad \text{flèche connue}$$
$$w'(0) = 0 \quad \text{angle connue à l'encastrement}$$

$w(L)$ et $w'(L)$: pas connues

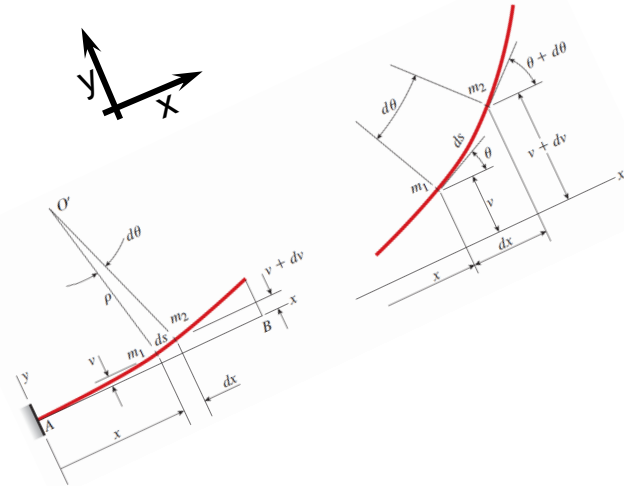
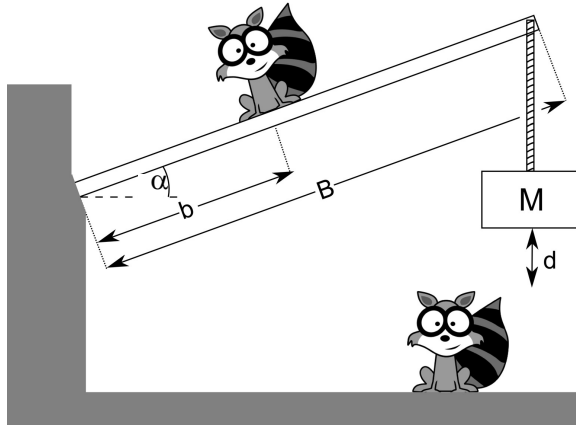
Les 2 conditions aux limites sur $w(x)$ et/ou $w'(x)$ permettent de déterminer les 2 constantes d'intégration nécessaires pour trouver $w(x)$ à partir de $M(x)$.

Si nous commençons à partir de $q(x)$, il faut alors utiliser nos connaissances des conditions sur $V(x)$ et/ou $M(x)$

Réfléchir : quels sont forces, moments, angles et flèches au supports et aux extrémités?

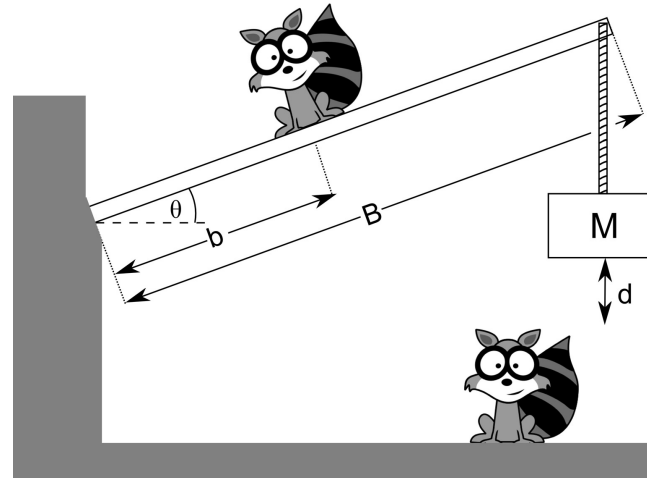
Conditions aux limites pour trouver les 4 constantes d'intégration pour $w(x)$

- Si pivot ou poutre simplement posé:
 - seule la flèche ($=0$) au pivot est connue (pas sa dérivée)
- Si la poutre est encastrée, alors
 - la flèche et l'angle à l'encastrement (dérivée de la flèche) sont connues
- Angle = 0 c'est l'angle avec la poutre sans charges (pas l'angle par rapport au sol)



Question

- A. $w(0) = 0 \quad w'(0) = 0$
- B. $w(0) = 0 \quad w'(0) = \theta$
- C. $w(0) = 0 \quad w'(0) = \text{inconnue}$
- D. $w(0) = \text{inconnue} \quad w'(0) = \theta$



■	$w(0)=0 \quad w'(0)=0$	■	$w(0)=0 \quad w'(0)=\theta$
■	$w(0)=0 \quad w'(0)=\text{inconnue}$	■	$w(0)=\text{inconnue} \quad w'(0)=\theta$

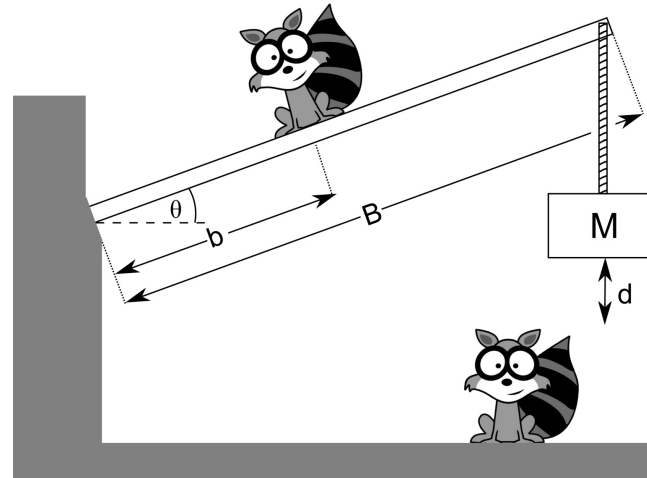
Solution

A. $w(0) = 0 \quad w'(0) = 0$

B. $w(0) = 0 \quad w'(0) = \theta$

C. $w(0) = 0 \quad w'(0) = \text{inconnue}$

D. $w(0) = \text{inconnue} \quad w'(0) = \theta$



Conditions aux supports et aux bords

supports typiques

Le type de support nous donne directement des conditions limites



$$w = w' = 0$$



$$w = w'' = 0$$

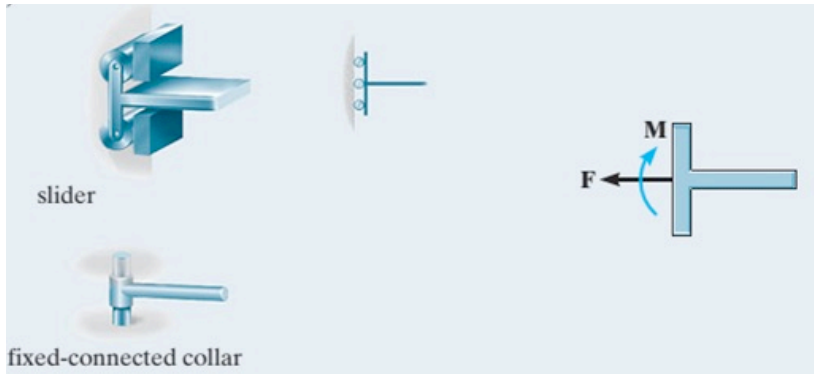


$$w = w'' = 0$$

Conditions aux supports et au bords

supports typiques

Le type de support nous donne directement des conditions limites

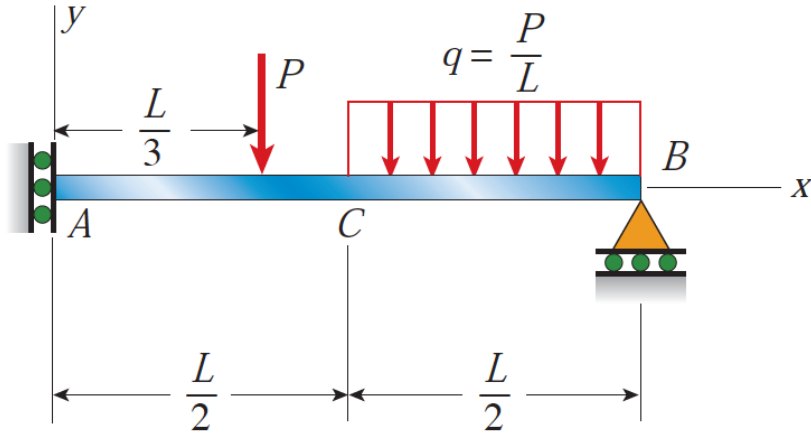


$$w' = w''' = 0$$

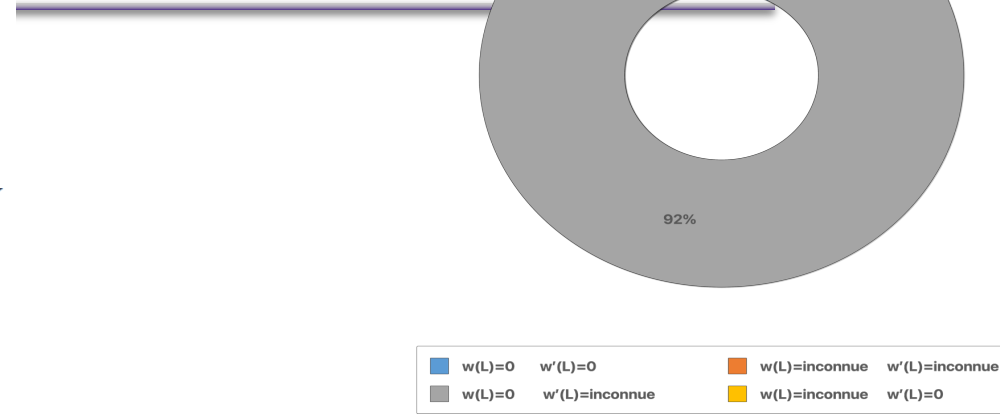
Extrémité libre

$$w'' = w''' = 0$$

Question 1

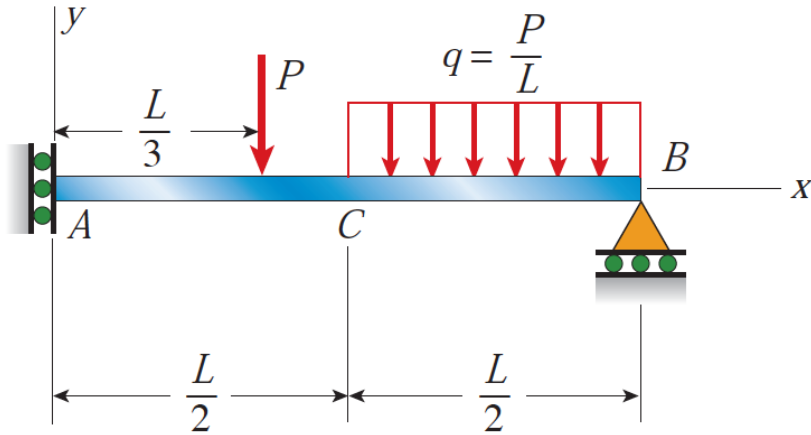


Conditions aux bords
à $x = L$



- A. $w(L)=0$ $w'(L)=0$
- B. $w(L)=\text{inconnue}$ $w'(L)=\text{inconnue}$
- C. $w(L)=0$ $w'(L)=\text{inconnue}$
- D. $w(L)=\text{inconnue}$ $w'(L)=0$

Question 2

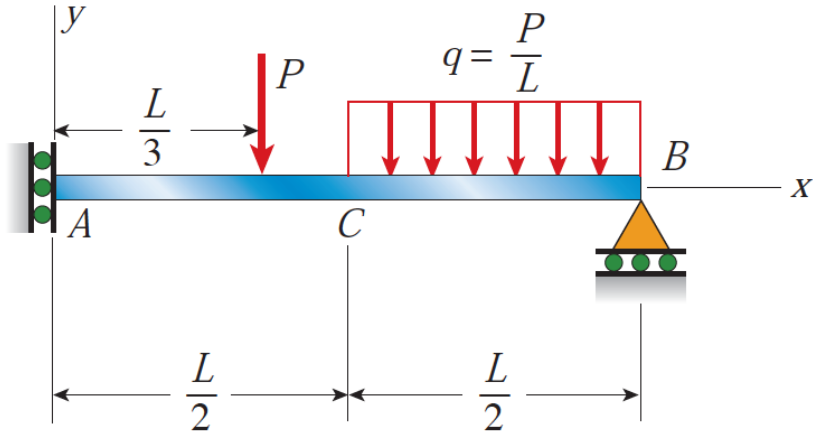


	$w(0)=0$ $w'(0)=0$
	$w(0)=\text{inconnue}$ $w'(0)=\text{inconnue}$
	$w(0)=0$ $w'(0)=\text{inconnue}$
	$w(0)=\text{inconnue}$ $w'(0)=0$

- A. $w(0)=0$ $w'(0)=0$
- B. $w(0)=\text{inconnue}$ $w'(0)=\text{inconnue}$
- C. $w(0)=0$ $w'(0)=\text{inconnue}$
- D. $w(0)=\text{inconnue}$ $w'(0)=0$

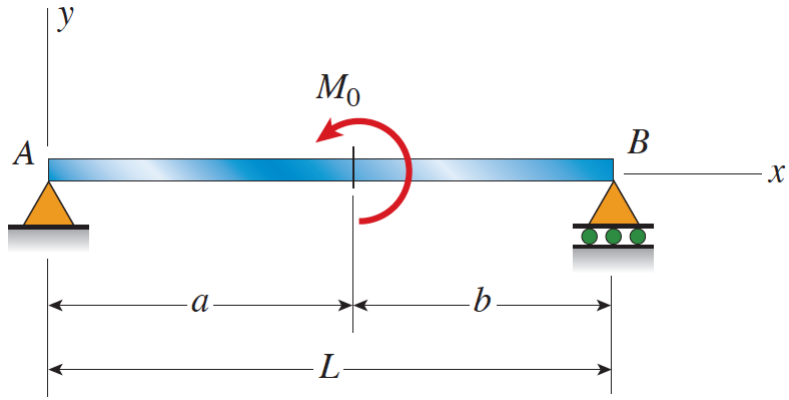
Conditions aux bords à $x = 0$

Solution 1 & 2



$$w(0) = \text{inconnue} \quad w'(0) = 0$$

$$w(L) = 0 \quad w'(L) = \text{inconnue}$$



$$w(x=0) = 0$$

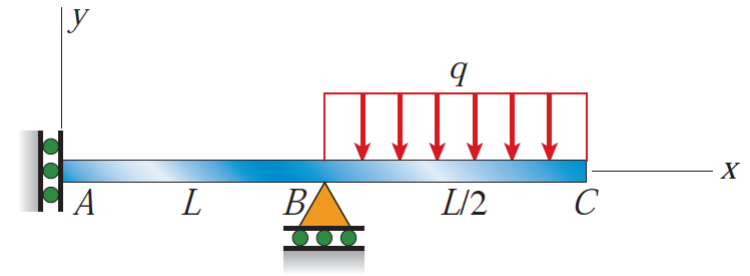
$$w'(x=0) = \text{incon.}$$

$$w''(x=0) = 0$$

$$w(x=L) = 0$$

$$w'(x=L) = \text{incon.}$$

$$w''(x=L) = 0$$



$$w(x=0) = \text{incon.}$$

$$w'(x=0) = 0$$

$$w''(x=0) = \text{incon.}$$

$$w(x=L) = 0$$

$$w'(x=L) = \text{incon.}$$

$$w''(x=L) = \text{incon.}$$

Exemple: Flèche d'une poutre soumise à force ponctuelle

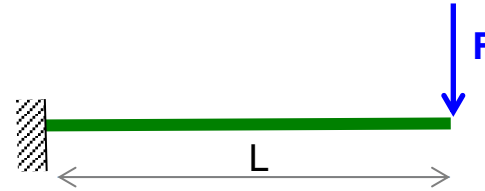
Poutre encastrée de longueur L . force F à l'extrémité
(on néglige la masse de la poutre):

$$M(x) = F(x - L) \quad (\text{vous savez le calculer})$$

$$w(x) = \iint \frac{M(x)}{EI} dx^2$$

$$w(x) = \frac{F}{6EI} (x^3 - 3Lx^2)$$

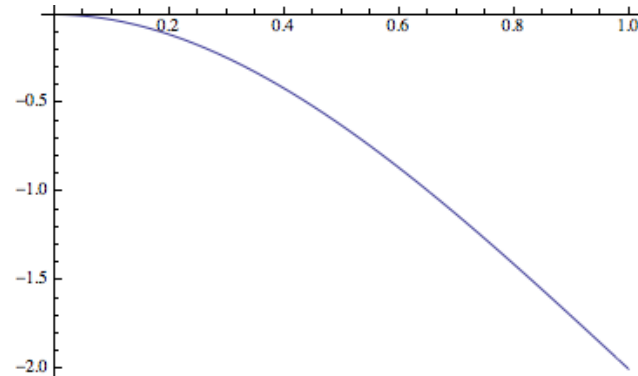
(calcul au slide suivant)



Conditions aux bords:

$$w(0) = 0$$

$$w'(0) = 0$$



$$M(x) = F(x - L)$$

$$w'(x) = \int \frac{M_z(x)}{EI_{z,y_0}} dx$$

$$w'(x) = \left[F \frac{x^2}{2} - FLx + A \right] \frac{1}{EI}$$

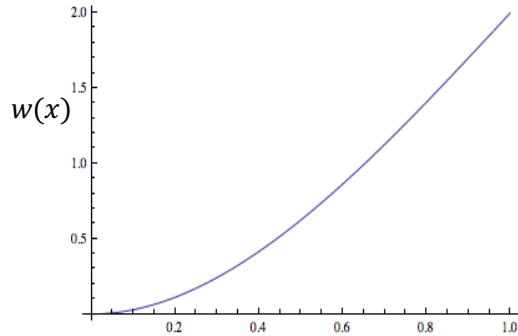
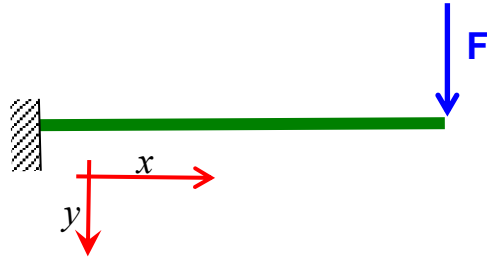
$$w(x) = \left[F \frac{x^3}{6} - FL \frac{x^2}{2} + Ax + B \right] \frac{1}{EI}$$

$$w'(x=0) = 0 \rightarrow A = 0$$

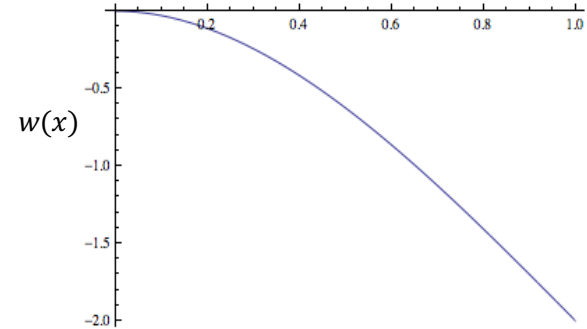
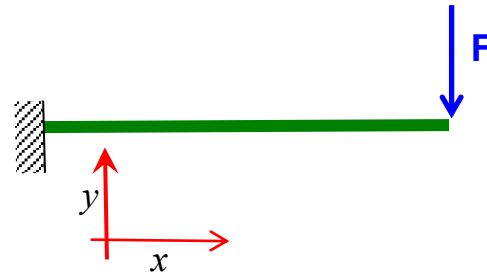
$$w(x=0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$w(x) = \frac{F}{EI_z} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2 L}{2} \right)$$

La flèche doit aller dans la direction physique!



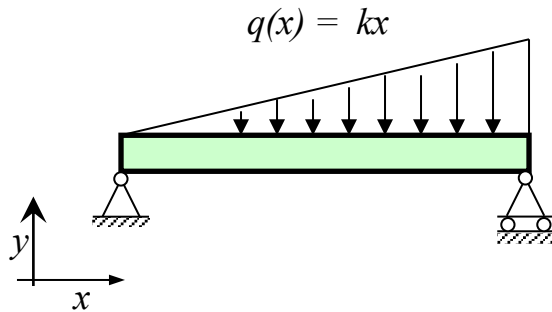
$$w(x) = - \frac{F}{6EI} (x^3 - 3Lx^2)$$



$$w(x) = \frac{F}{6EI} (x^3 - 3Lx^2)$$

Exemple: Flèche d'une poutre soumise à une force distribuée

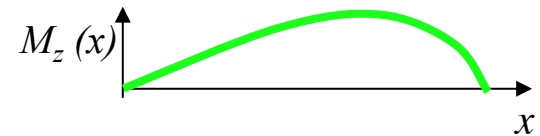
Calculer la flèche $w(x)$ et l'angle de la poutre $w'(x)$



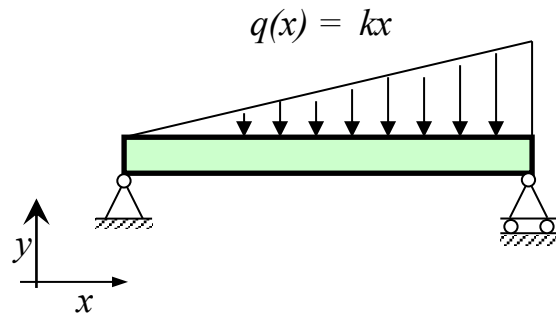
$$w''(x) = \frac{M(x)}{EI}$$

$$M_z(x) = kx \frac{L^2}{6} - k \frac{x^3}{6}$$

d'un cours précédent



Conditions aux bords: $w(0) = 0$ et $w(L) = 0$

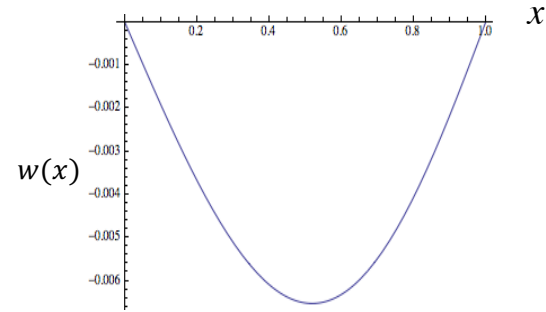
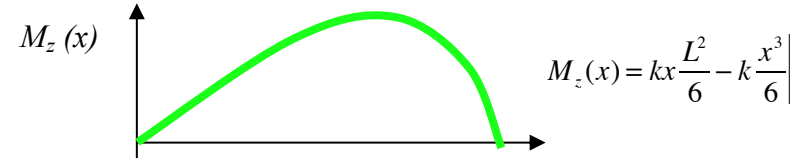


$$w''(x) = \frac{M(x)}{EI}$$

$$w'(x) = \int \frac{M(x)}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int \left(-k \frac{x^3}{6} + kx \frac{L^2}{6} \right) dx$$

$$w'(x) = \frac{1}{EI} \left(-k \frac{x^4}{24} + kL^2 \frac{x^2}{12} + A \right)$$

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left(-k \frac{x^5}{120} + kL^2 \frac{x^3}{36} + Ax + B \right)$$



$$w(0) = 0 \text{ donc } B = 0$$

$$w(L) = 0 \text{ donc } A = -kL^4 (7/360)$$

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left(-k \frac{x^5}{120} + kL^2 \frac{x^3}{36} - \frac{7kL^4}{360} x \right)$$

Méthode alternative pour les constantes (mais il faut les mêmes infos sur les conditions aux bords)

$$w'(x) - w'(x=0) = \frac{1}{EI} \int_0^x \left(\frac{kuL^2}{6} - \frac{ku^3}{6} \right) du$$

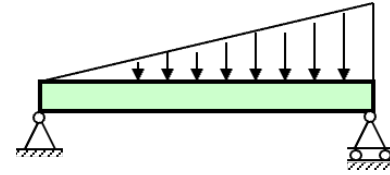
$$w'(x) - w'(x=0) = \frac{1}{EI} \left(\frac{kL^2x^2}{12} - \frac{kx^4}{24} \right)$$

$$w'(x) = w'(x=0) + \frac{1}{EI} \left(\frac{kL^2x^2}{12} - \frac{kx^4}{24} \right)$$

$$w(x) - w(0) = \int_0^x w'(u) du$$

$$w(x) - w(0) = \frac{1}{EI} \left(\frac{kL^2x^3}{36} - \frac{kx^5}{120} + x w'(0) \right)$$

$$w(x) = \cancel{w(0)} + \frac{1}{EI} \left(\frac{kL^2x^3}{36} - \frac{kx^5}{120} + x w'(0) \right)$$



Des conditions aux bords

1. $w(0) = 0$

2. $w(L) = 0$ donc $w'(0) = -kL^4 (7/360)$

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left(-k \frac{x^5}{120} + kL^2 \frac{x^3}{36} - \frac{7kL^4}{360} x \right)$$

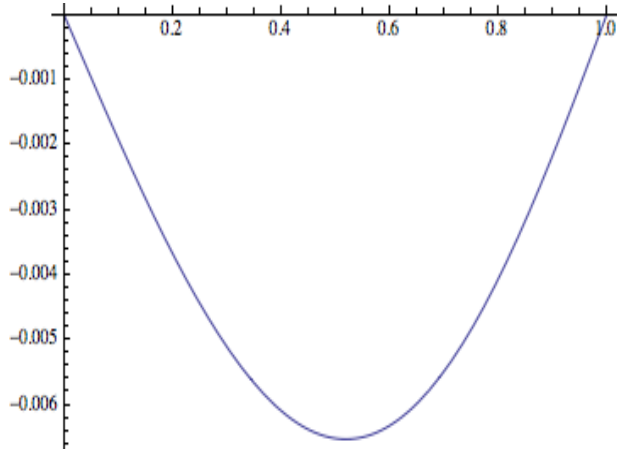
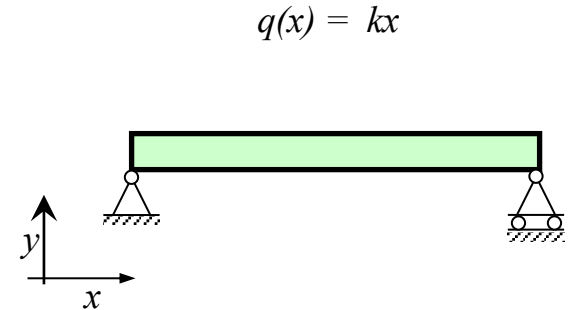
De la même façon, pour $M(x)$ on peut écrire
 $M_1(x) = M_1(0) + \int_0^x V_1(x') dx'$

$w'(x)$ donne les angles aux supports

$$w'(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{kx^4}{24} + \frac{kL^2x^2}{12} - \frac{7kL^4}{360} \right)$$

$$w'(x=0) = -\frac{7kL^4}{360}$$

$$w'(x=L) = +\frac{8kL^4}{360}$$

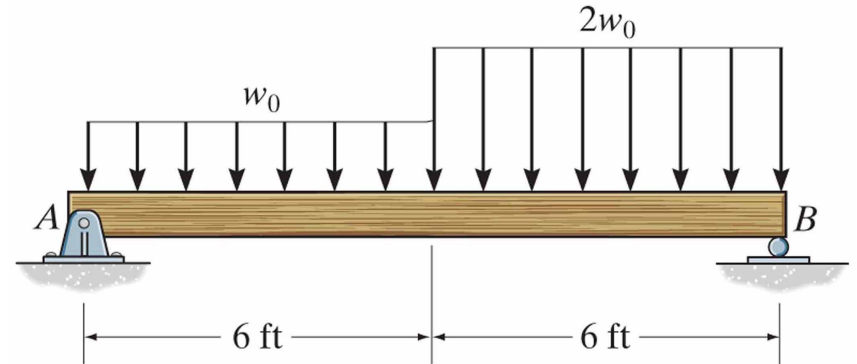


Flèche–partie 2

Continuité

Objectifs d'apprentissage

- Utiliser la continuité de flèche et de la pente pour trouver les constantes d'intégrations pour des poutres avec de multiples zones.



Condition limites de continuité

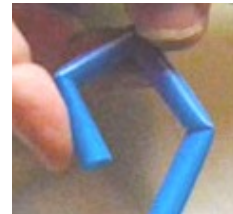
- pour tout point d'une poutre:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} w(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} w(x) = w(x_0)$$

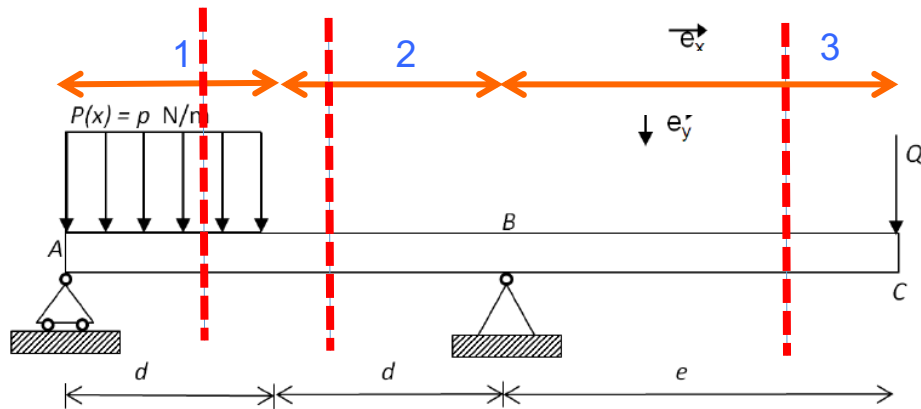
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} w'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} w'(x) = w'(x_0)$$



- **La flèche est continue**
- **L'angle de la flèche est continu**



- Chaque « région » d'une poutre a une équation pour $w(x)$, tout comme chaque « région » de la poutre a une expression pour $M(x)$ et pour $V(x)$.
- Continuité de la flèche et de la pente de la flèche: donne des équations de continuité entre les « régions »



$M_1(x)$ pour $0 < x < d$

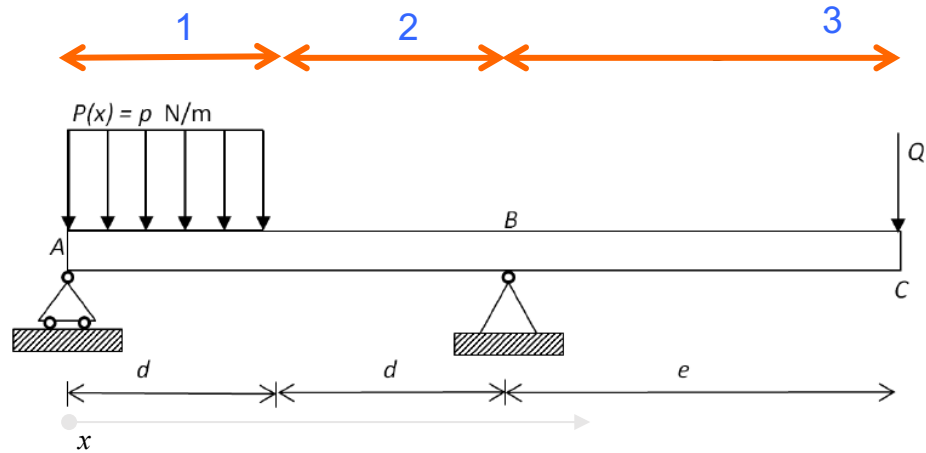
$M_2(x)$ pour $d < x < 2d$

$M_3(x)$ pour $2d < x < 2d + e$

$w_1(x)$ pour $0 < x < d$

$w_2(x)$ pour $d < x < 2d$

$w_3(x)$ pour $2d < x < 2d + e$



Aux bords: $w_1(0) = 0$ $w_2(2d) = 0$

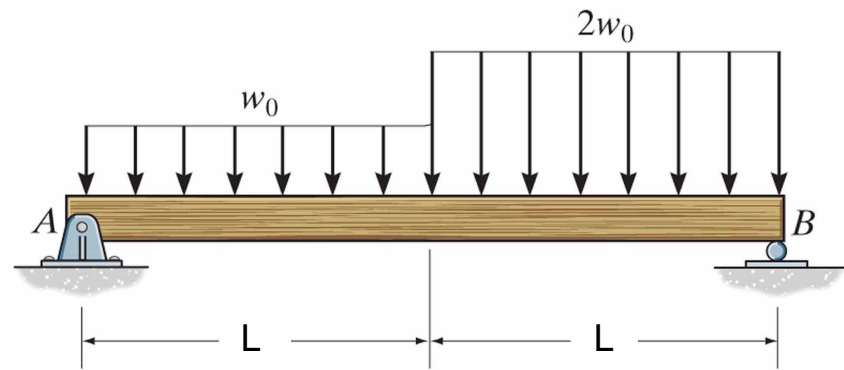
Continuité de flèche $w_1(d) = w_2(d)$ $w_2(2d) = w_3(2d)$

Continuité de pente $w_1'(d) = w_2'(d)$ $w_2'(2d) = w_3'(2d)$

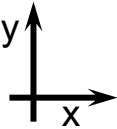
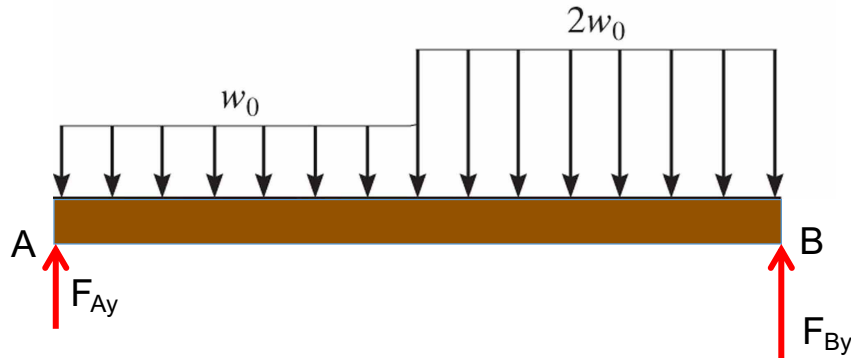
Pour trouver $w_1(x)$, $w_2(x)$, $w_3(x)$, il faut non seulement $M_1(x)$, $M_2(x)$, $M_3(x)$ mais aussi les conditions aux bords (incluant 4 eq de continuité) afin de trouver toutes les constantes d'intégration.

Q: Trouver $w(x)$ le long de cette poutre

w_0 en N/m



2 zones



$$M_1(x) = \frac{5}{4} w_0 Lx - \frac{1}{2} w_0 x^2 \quad 0 < x < L$$

$$M_2(x) = \frac{9}{4} w_0 Lx - \frac{1}{2} w_0 L^2 - w_0 x^2 \quad L < x < 2L$$

Conditions au bords:

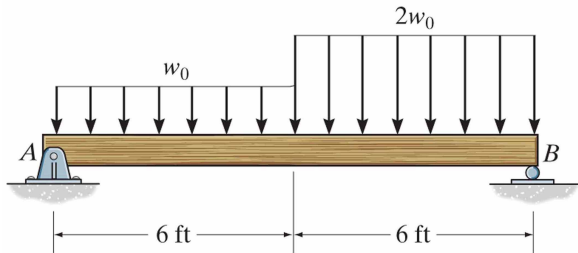
$$w_1(x = 0) = 0$$

$$w_2(x = 2L) = 0$$

Conditions de continuité:

$$w_1(x = L) = w_2(x = L)$$

$$w_1'(x = L) = w_2'(x = L)$$



$$M_1(x) = \frac{5}{4}w_0Lx - \frac{1}{2}w_0x^2 \quad 0 < x < L$$

$$M_2(x) = \frac{9}{4}w_0Lx - \frac{1}{2}w_0L^2 - w_0x^2 \quad L < x < 2L$$

pour $0 < x < 6$

$$EI_z w_1'(x) = \frac{5}{4}w_0L \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}w_0 \frac{x^3}{3} + \alpha$$

$$EI_z w_1(x) = \frac{5}{4}w_0L \frac{x^3}{6} - \frac{1}{24}w_0x^4 + \alpha x + \beta$$

Pour $6 < x < 12$

$$EI_z w_2'(x) = \frac{9}{4}w_0L \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}w_0L^2x - w_0 \frac{x^3}{3} + \gamma$$

$$EI_z w_2(x) = \frac{9}{8}w_0L \frac{x^3}{3} - \frac{1}{4}w_0L^2x^2 - w_0 \frac{x^4}{12} + \gamma x + \delta$$

- 4 inconnues, 4 équations
- On peut résoudre!

Algèbre pour trouver $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

Poutres avec section non-constante

poutre encastée, avec moment M_0 appliqué en extrémité de la poutre

Trouver la flèche le long de cette poutre de section carrée. Module Young E constant

$0 < x < 2L/3$, section de coté $2t$,

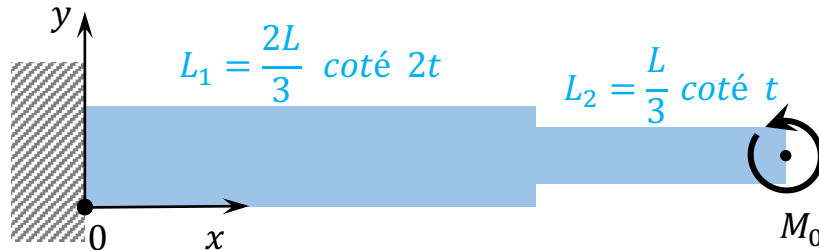
$2L/3 < x < L$, section de coté t

- d'abord, calculer le moment de flexion

$$M_z(x) = M_0 \quad \text{Pour toute la poutre}$$

- Puis intégrer pour trouver la flèche:

$$w''(x) = \frac{M_0}{EI(x)} \rightarrow w''(x) = \begin{cases} \frac{M_0}{EI_{z1}}; & 0 \leq x \leq 2L/3 \\ \frac{M_0}{EI_{z2}}; & \frac{2L}{3} < x < L \end{cases}$$



attention, $I_{z,1} \neq I_{z,2}$

$$I_{z,1} = \frac{4}{3}t^4$$

$$I_{z,2} = \frac{1}{12}t^4$$

poutre encadrée, avec moment M_0 appliqué en extrémité de la poutre

- Intégrer deux fois $M(x)$. 4 constantes d'intégration (2 par zone)
- utiliser les 2 conditions à $x = 0$ et la continuité de flèche et de pente à $x = 2L/3$

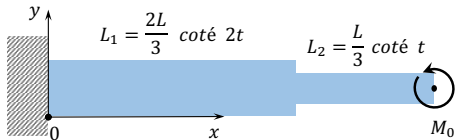
$$\begin{aligned} w_1(x=0) &= 0 \\ w'_1(x=0) &= 0 \end{aligned}$$

$$w_1\left(x = \frac{2L}{3}\right) = w_2\left(x = \frac{2L}{3}\right)$$

$$w'_1\left(x = \frac{2L}{3}\right) = w'_2\left(x = \frac{2L}{3}\right)$$

$$\begin{cases} w'_1(x) = \frac{3M_0}{4Et^4} x & 0 \leq x \leq 2L/3 \\ w'_2(x) = \frac{12M_0}{Et^4} \left(x - \frac{2L}{3}\right) + \frac{M_0L}{2Et^4} & x \geq \frac{2L}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1(x) = \frac{3M_0}{8Et^4} x^2 & 0 \leq x \leq 2L/3 \\ w_2(x) = \frac{6M_0}{Et^4} \left(x - \frac{2L}{3}\right)^2 + \frac{M_0L}{2Et^4} \left(x - \frac{2L}{3}\right) + \frac{M_0L^2}{6Et^4} & x \geq \frac{2L}{3} \end{cases}$$



Quelle équation est juste pour $w''(x)$ si E est différent pour les différentes parties de la poutre?

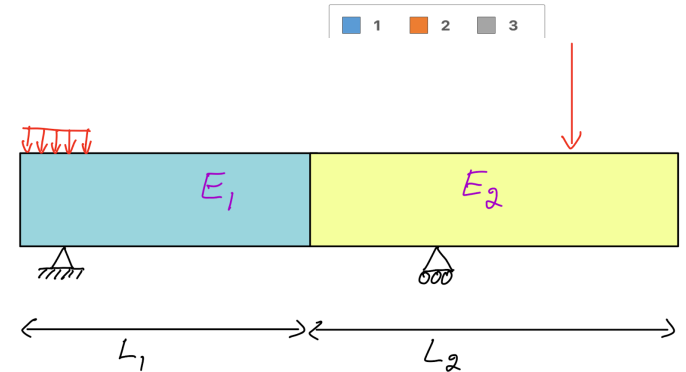
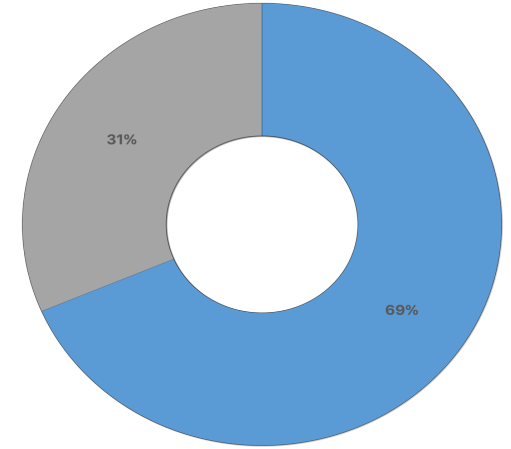
Question

- A. 1
- B. 2
- C. 3

$$w''(x) = \begin{cases} \frac{M_z(x)}{E_1 I_z}; & 0 \leq x \leq L_1 \\ \frac{M_z(x)}{E_2 I_z}; & L_1 < x < L_1 + L_2 \end{cases}$$

$$w''(x) = \frac{M_z(x)}{\langle E I_z \rangle} \quad 0 \leq x \leq L_1 + L_2$$

$$w''(x) = \begin{cases} \frac{M_z(x)}{E_1 I_z}; & 0 \leq x \leq L_1 \\ \frac{M_z(x)}{E_1 I_z} + \frac{M_z(x)}{E_2 I_z}; & L_1 < x < L_1 + L_2 \end{cases}$$



Quelle équation est juste pour $w''(x)$ si E est différent pour les différentes parties de la poutre?

Solution

$$w''(x) = \begin{cases} \frac{M_z(x)}{E_1 I_z}; & 0 \leq x \leq L_1 \\ \frac{M_z(x)}{E_2 I_z}; & L_1 < x < L_1 + L_2 \end{cases}$$

A. 1

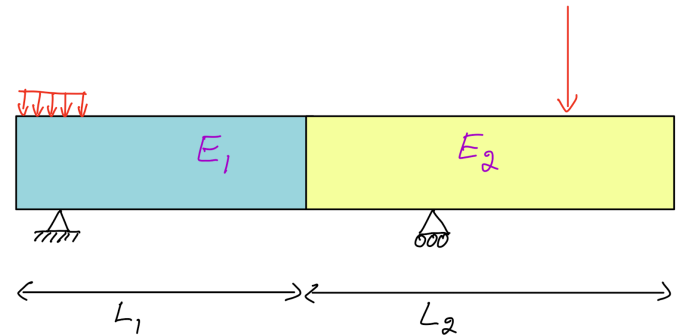
B. 2

C. 3

$$w''(x) = \frac{M_z(x)}{\langle E I_z \rangle} \quad 0 \leq x \leq L_1 + L_2$$

$$w''(x) = \begin{cases} \frac{M_0}{E_1 I_z}; & 0 \leq x \leq L_1 \\ \frac{M_0}{E_2 I_z}; & L_1 < x < L_2 \end{cases}$$

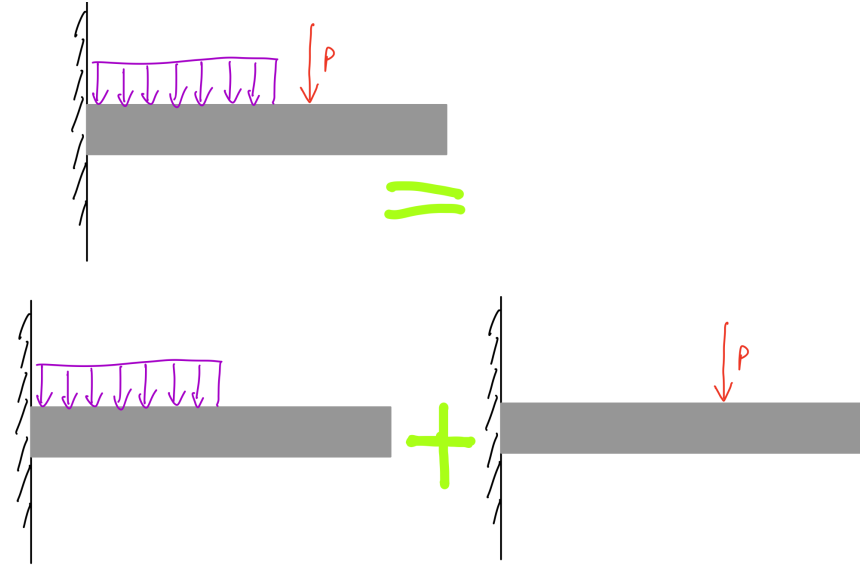
$$w''(x) = \begin{cases} \frac{M_z(x)}{E_1 I_z}; & 0 \leq x \leq L_1 \\ \frac{M_z(x)}{E_1 I_z} + \frac{M_z(x)}{E_2 I_z}; & L_1 < x < L_1 + L_2 \end{cases}$$



Flèche-partie 3: Superposition

Objectifs d'apprentissage

- Savoir utiliser la superposition pour (plus) facilement trouver la flèche de poutres avec de multiples charges



Outil puissant!

Principe de superposition pour flèche des poutres

- Pour des poutres linéairement élastiques, nous avons des équations différentielles linéaires.
- Pour une telle situation, nous pouvons séparer une charge compliquée $q_{total}(x)$ en plusieurs charges plus simples :

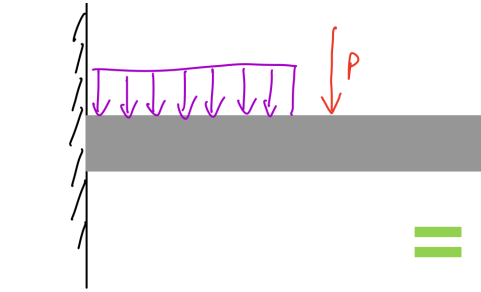
$$q_{total}(x) = q_{1facile}(x) + q_{2facile}(x) \dots$$

- Nous pouvons ensuite faire les intégrations pour $w_i(x)$ de chaque $q_i(x)$ séparément
- Puis nous ajoutons les flèches dues à chaque charge

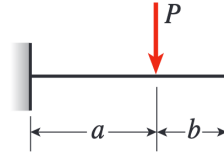
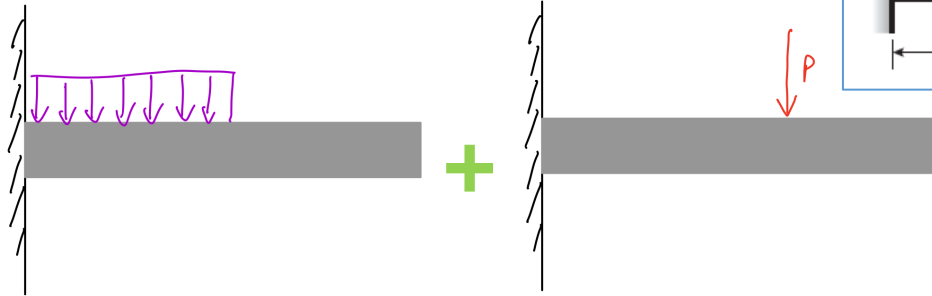
$$w(x) = w_1(x) + w_2(x) \dots$$

- Nous pouvons utiliser un tableau des flèches correspondants aux cas habituels ...

On peut ajouter linéairement les déplacements dues à différentes forces (somme pondérée)



=

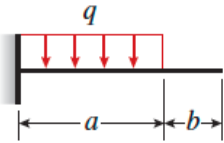


$$v = -\frac{Px^2}{6EI}(3a - x) \quad v' = -\frac{Px}{2EI}(2a - x) \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$v = -\frac{Pa^2}{6EI}(3x - a) \quad v' = -\frac{Pa^2}{2EI} \quad (a \leq x \leq L)$$

$$\text{At } x = a: \quad v = -\frac{Pa^3}{3EI} \quad v' = -\frac{Pa^2}{2EI}$$

$$\delta_B = \frac{Pa^2}{6EI}(3L - a) \quad \theta_B = \frac{Pa^2}{2EI}$$



$$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6a^2 - 4ax + x^2) \quad (0 \leq x \leq a)$$

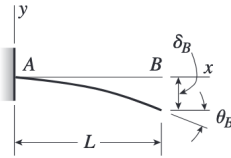
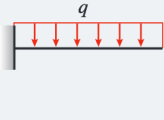
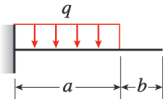
$$v' = -\frac{qx}{6EI}(3a^2 - 3ax + x^2) \quad (0 \leq x \leq a)$$

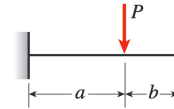
annexe G ou H de Gere et Goodno

- voir fichier sur Moodle semaine 8. tableau très complet pour poutres sous différentes contraintes
- (tableau G ou H: dépend de l'édition du livre)

Table G-1

Deflections and Slopes of Cantilever Beams

	<p>v = deflection in the y direction (positive upward) $v' = dv/dx$ = slope of the deflection curve $\delta_B = -v(L)$ = deflection at end B of the beam (positive downward) $\theta_B = -v'(L)$ = angle of rotation at end B of the beam (positive clockwise) EI = constant</p>
<p>1</p> 	$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \quad v' = -\frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$ $\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} \quad \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$
<p>2</p> 	$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6a^2 - 4ax + x^2) \quad (0 \leq x \leq a)$ $v' = -\frac{qx}{6EI}(3a^2 - 3ax + x^2) \quad (0 \leq x \leq a)$ $v = -\frac{qa^3}{24EI}(4x - a) \quad v' = -\frac{qa^3}{6EI} \quad (a \leq x \leq L)$ <p>At $x = a$: $v = -\frac{qa^4}{8EI} \quad v' = -\frac{qa^3}{6EI}$</p> $\delta_B = \frac{qa^3}{24EI}(4L - a) \quad \theta_B = \frac{qa^3}{6EI}$

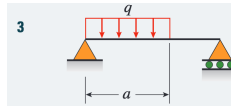


$$v = -\frac{Px^2}{6EI}(3a - x) \quad v' = -\frac{Px}{2EI}(2a - x) \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$v = -\frac{Pa^2}{6EI}(3x - a) \quad v' = -\frac{Pa^2}{2EI} \quad (a \leq x \leq L)$$

At $x = a$: $v = -\frac{Pa^3}{3EI} \quad v' = -\frac{Pa^2}{2EI}$

$$\delta_B = \frac{Pa^2}{6EI}(3L - a) \quad \theta_B = \frac{Pa^2}{2EI}$$



$$v = -\frac{qx}{24EI}(a^4 - 4a^3L + 4a^2L^2 + 2a^2x^2 - 4aLx^2 + Lx^3) \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$v' = -\frac{q}{24EI}(a^4 - 4a^3L + 4a^2L^2 + 6a^2x^2 - 12aLx^2 + 4Lx^3) \quad (0 \leq x \leq a)$$

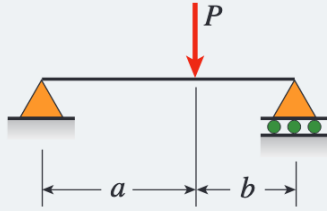
$$v = -\frac{qa^2}{24EI}(-a^2L + 4L^2x + a^2x - 6Lx^2 + 2x^3) \quad (a \leq x \leq L)$$

$$v' = -\frac{qa^2}{24EI}(4L^2 + a^2 - 12Lx + 6x^2) \quad (a \leq x \leq L)$$

$$\theta_A = \frac{qa^2}{24EI}(2L - a)^2 \quad \theta_B = \frac{qa^2}{24EI}(2L^2 - a^2)$$

Attention, y est positif vers le haut pour ces formules!

5



$$v = -\frac{Pbx}{6LEI}(L^2 - b^2 - x^2) \quad v' = -\frac{Pb}{6LEI}(L^2 - b^2 - 3x^2) \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$\theta_A = \frac{Pab(L+b)}{6LEI} \quad \theta_B = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$$

$$\text{If } a \geq b, \quad \delta_C = \frac{Pb(3L^2 - 4b^2)}{48EI} \quad \text{If } a \leq b, \quad \delta_C = \frac{Pa(3L^2 - 4a^2)}{48EI}$$

Et pour $a > x > L$??

Changement de variables!

Pour les cas symétriques (pas encastéré!)

$$a \rightarrow b$$

$$b \rightarrow a$$

$$x \rightarrow (L - x)$$

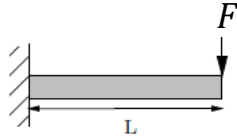
Pour le cas ci-dessus:

$$v = -\frac{Pa(L-x)}{6LEI}(L^2 - a^2 - (L-x)^2)$$

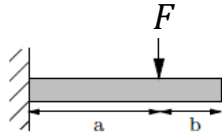
$$v = -\frac{Pa(L-x)}{6LEI}(2Lx - a^2 - x^2)$$

Formules utiles

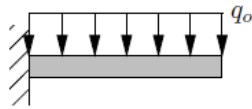
On peut ajouter linéairement les déplacements dues à différentes forces (somme pondérée)



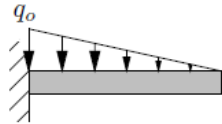
$$w(x) = -\frac{FL^3}{6EI} \left(3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right)$$



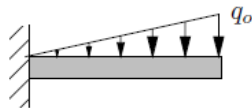
$$w(x) = \begin{cases} -\frac{Fa^3}{6EI} \left(3 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{x}{a} \right)^3 \right); & x \leq a \\ -\frac{Fa^3}{6EI} \left(3 \left(\frac{x}{a} \right) - 1 \right); & x > a \end{cases}$$



$$w(x) = -\frac{q_0 L^4}{24EI} \left(6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \left(\frac{x}{L} \right)^4 \right)$$



$$w(x) = -\frac{q_0 L^4}{120EI} \left(10 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 10 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 5 \left(\frac{x}{L} \right)^4 - \left(\frac{x}{L} \right)^5 \right)$$

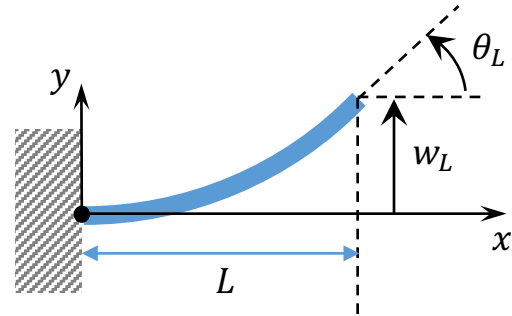
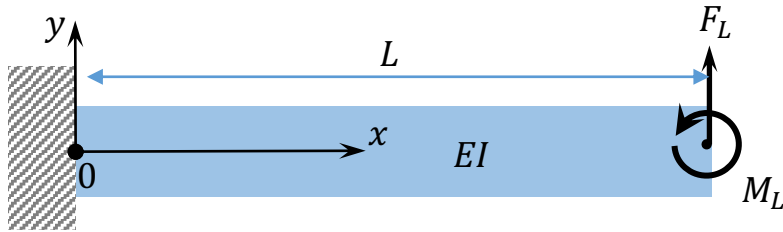


$$w(x) = -\frac{q_0 L^4}{120EI} \left(20 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 10 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \left(\frac{x}{L} \right)^5 \right)$$

Exemple

Poutre encastrée. Force F_L et moment externe M_L appliqués à l'extrémité libre (à $x = L$)

Trouver $w(x)$ et $\theta_L = w'(x = L)$ en fonction de F_L et de M_L



Solution

(d'abord, un peu péniblement, sans superposition)

Moment de flexion: $M(x) = M_L + F_L(L - x)$

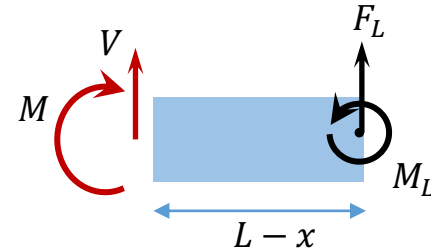
$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{M_L + F_L(L - x)}{EI}$$

Intégration :

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \frac{1}{EI} \left[M_L x + F_L \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) + c_1 \right]$$

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left[\frac{M_L x^2}{2} + F_L \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + c_1 x + c_2 \right]$$

les constantes d'intégration c_1 et c_2 seront calculées à l'aide de conditions limites



Solution

Conditions limites (encastree à $x=0$)

$$1- w(0) = 0$$

$$2- \theta(0) = \frac{dw(0)}{dx} = 0$$

$$\theta(0) = \frac{1}{EI} \left[F_L \left(L \times 0 - \frac{0^2}{2} \right) + c_1 \right] = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

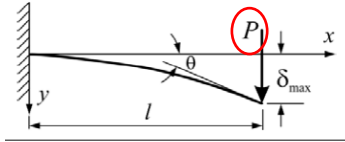
$$w(0) = \frac{1}{EI} \left[\frac{M_L 0^2}{2} + F_L \left(\frac{L 0^2}{2} - \frac{0^3}{6} \right) + c_1 \times 0 + c_2 \right] = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \left[M_L x + F_L \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) \right] \Rightarrow \theta_L = \theta(L) = \frac{M_L L}{EI} + \frac{F_L L^2}{2EI}$$

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left[\frac{M_L x^2}{2} + F_L \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \right] \Rightarrow w_L = w(L) = \frac{M_L L^2}{2EI} + \frac{F_L L^3}{3EI}$$

Résolution par superposition directement (en nous servant des tables de réponses)

1. Cantilever Beam – Concentrated load P at the free end



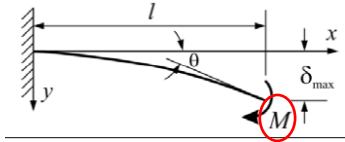
$$\theta = \frac{Pl^2}{2EI}$$

on remplace le "P" par notre force F_L

$$y = \frac{Px^2}{6EI}(3l-x)$$

$$\delta_{\max} = \frac{Pl^3}{3EI}$$

5. Cantilever Beam – Couple moment M at the free end



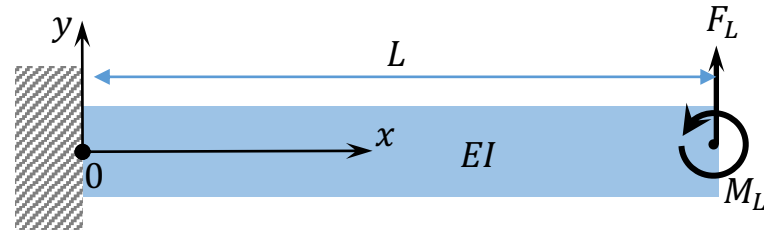
$$\theta = \frac{Ml}{EI}$$

on remplace le "M" par notre moment M_L

$$y = \frac{Mx^2}{2EI}$$

$$\delta_{\max} = \frac{Ml^2}{2EI}$$

$$w(x) = \frac{1}{EI} \left[\frac{M_L x^2}{2} + F_L x^2 \left(\frac{L}{2} - \frac{x}{6} \right) \right]$$



c'est 10x plus rapide... (car le travail a déjà été fait !)

mais faites bien attention aux conventions dans les tableaux et à bien pondérer.

La forme matricielle de $w(L)$ permet de voir la superposition

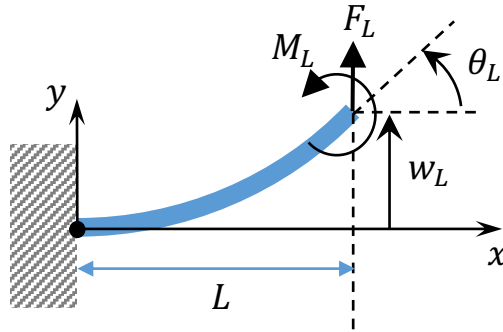
Présentation matricielle

Variables adimensionnelles

$$\widetilde{w}_L = \frac{w_L}{L}$$

$$\widetilde{F}_L = \frac{F_L L^2}{EI}$$

$$\widetilde{M}_L = \frac{M_L L}{EI}$$



$$\begin{bmatrix} \widetilde{w}_L \\ \theta_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{F}_L \\ \widetilde{M}_L \end{bmatrix}$$

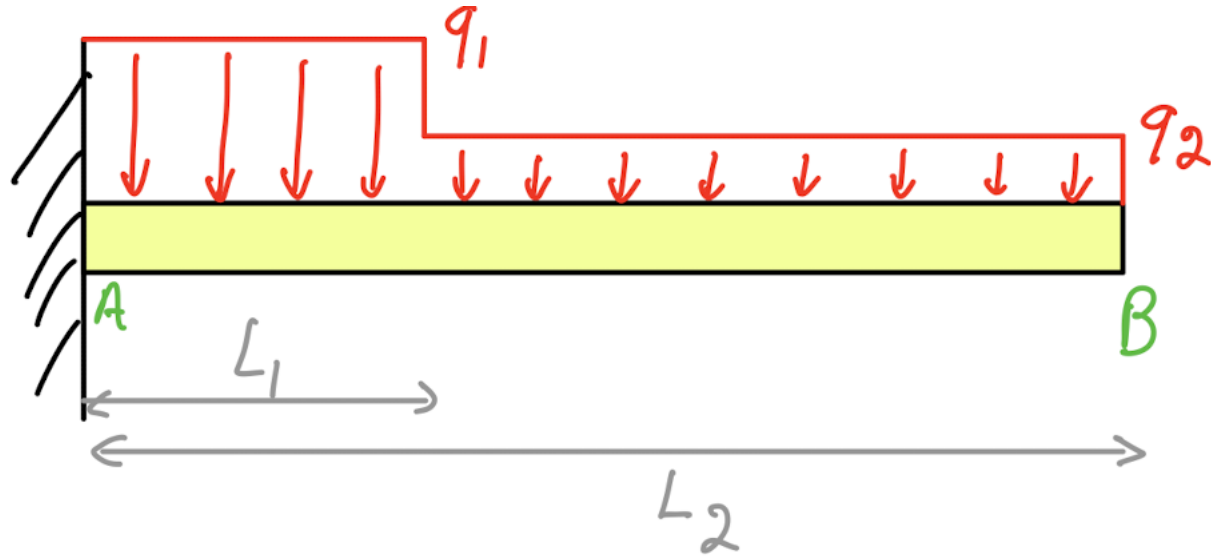
matrice de souplesse

$$\begin{bmatrix} \widetilde{F}_L \\ \widetilde{M}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{w}_L \\ \theta_L \end{bmatrix}$$

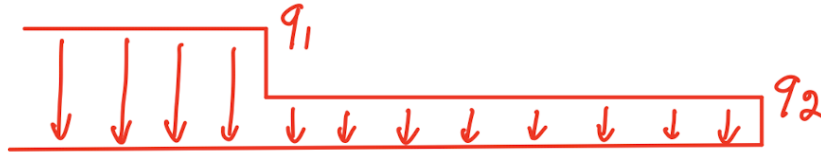
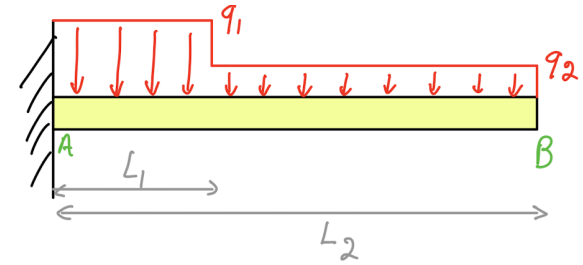
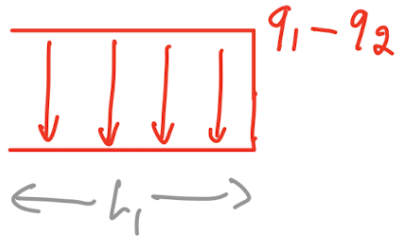
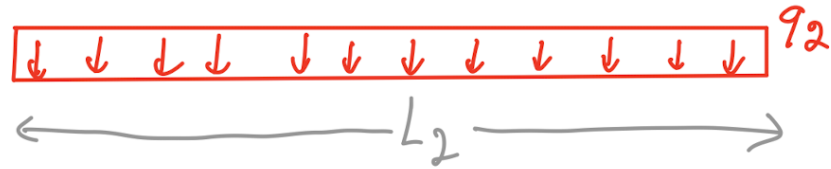
matrice de rigidité

Nous allons utiliser plusieurs fois cette représentation pour les guidages flexibles dans le cours qui suit, à la semaine 9a

Exemple: Trouver la déflexion au point B



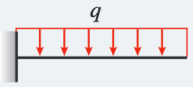
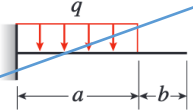
Décomposer la charge en charges "simples"


 F_1

 $+$

 F_2

Trouver la déflexion en B pour chaque charge simple

$$\delta_{BF_1} = \frac{(q_1 - q_2)L_1^3(4L_2 - L_1)}{24EI}$$

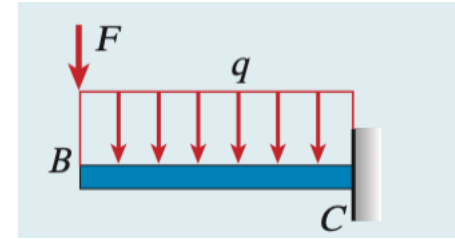
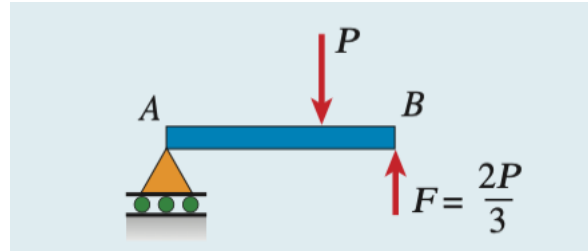
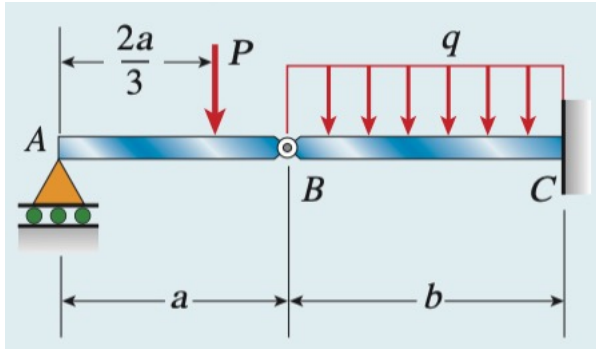
$$\delta_{BF_2} = \frac{q_2L_2^4}{8EI}$$

1		$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6L^2 - 4Lx + x^2) \quad v' = -\frac{qx}{6EI}(3L^2 - 3Lx + x^2)$ $\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} \quad \theta_B = \frac{qL^3}{6EI}$
2		$v = -\frac{qx^2}{24EI}(6a^2 - 4ax + x^2) \quad (0 \leq x \leq a)$ $v' = -\frac{qx}{6EI}(3a^2 - 3ax + x^2) \quad (0 \leq x \leq a)$ $v = -\frac{qa^3}{24EI}(4x - a) \quad v' = -\frac{qa^3}{6EI} \quad (a \leq x \leq L)$ <p>At $x = a$: $v = -\frac{qa^4}{8EI} \quad v' = -\frac{qa^3}{6EI}$</p> $\delta_B = \frac{qa^3}{24EI}(4L - a) \quad \theta_B = \frac{qa^3}{6EI}$

$$\delta_B = \delta_{BF_1} + \delta_{BF_2} = \frac{(q_1 - q_2)L_1^3(4L_2 - L_1)}{24EI} + \frac{q_2L_2^4}{8EI}$$

Exemple en apparence plus complexe

(9.20 de Geere et Goodno). **Trouver la flèche en B**



$$\delta_B = \frac{qb^4}{8EI} + \frac{Fb^3}{3EI}$$

Flèche de charge distribuée
+
Flèche de force ponctuelle

$$\delta_B = \frac{qb^4}{8EI} + \frac{2Pb^3}{9EI}$$

Charges → Flèche → Forces internes

Ou

Charges → Forces internes → Flèche

On vous donne les charges, on demande $M(x)$ et $V(x)$. Les possibilités:

1. Trouver $w(x)$ par superposition, puis dériver $w(x)$ pour obtenir $M(x)$ et $V(x)$

Ou

2. Méthodes des sections, trouver $M(x)$ et $V(x)$
3. Méthode différentielle, trouver $M(x)$ et $V(x)$ en intégrant $q(x)$

■ Ça dépend

- Qu'est-ce qu'on demande? $N(x)$?
- Complexité
- Risque

