

Semaine 10

# Flambage des poutres

CHAPITRE 11 de Gere and Goodno

**PARTIE 1: (slide 3 - 20)**

Flambage – modèle Euler par equ. différentielle

**PARTIE 2: (slide 21 - 33)**

Défaillance (*failure*)

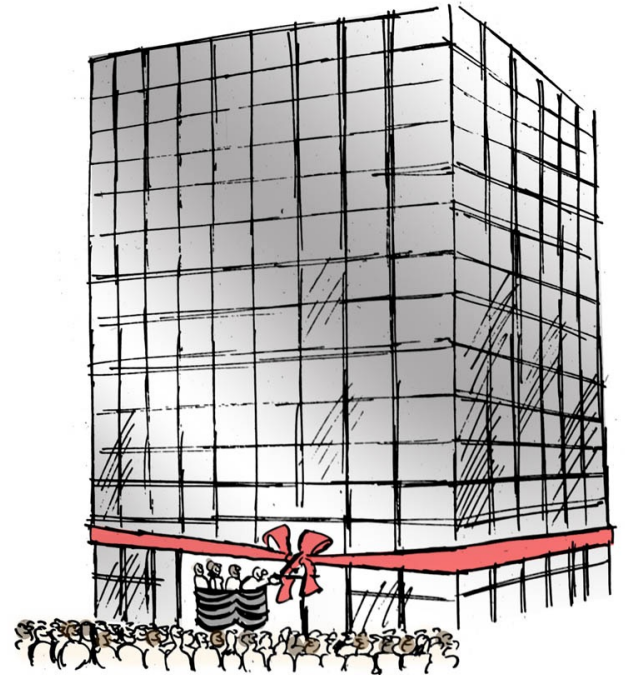
**PARTIE 3: (slide 34 - 47)**

Bistabilité

**PARTIE 4: (slide 48 - 56)**

Charges excentriques

v. 2025



# PROGRAMME DU COURS, semaines 6-10

6	14.10	Forces internes dans les poutres non-déformées	x	
6	16.10	$\varepsilon(y)$ et $\sigma(y)$ en flexion pure. Moment d'inertie	x	Série 6
7	28.10	Poutres chargées axialement. Poutres composites	x	Série 6
7	30.10	Quiz + Session questions & réponses D. Briand		Série 1-5
8	04.11	Examen mi-semester D. Briand		
8	06.11	Flèches des poutres	x	Série 7
9	11.11	Flèche pour guidage flexible	x	Série 8
9	13.11	Poutres statiquement indéterminées	x	Série 8
10	18.11	Poutres statiquement indéterminées. Flambage	x	Séries 9
10	20.11	Flambage	x	Série 10

# Semaine 10 – partie 1

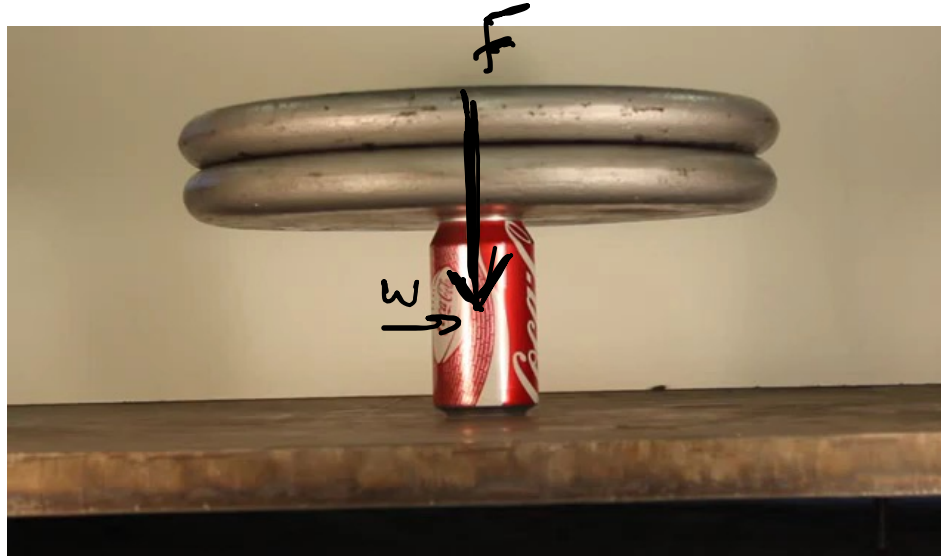
## Objectifs d'apprentissage

- Savoir définir le flambage dans une poutre, et ses conséquences
- Pouvoir Calculer la force  $F_{cri}$  critique pour flambage, en fonction des supports

# Flambage

$$\sigma_{\text{flambage}} \ll \sigma_{\text{max, matériau}} \approx \frac{F}{A}$$

- Le flambage: une instabilité qui se produit lorsqu'une poutre subit une déformation large et soudaine sous une charge compressive beaucoup plus petite que la charge nécessaire pour atteindre la contrainte maximum ( $\sigma_{\text{flambage}} \ll \sigma_{\text{max}}$ )
- Cette défaillance est liée à une déflexion dans une direction perpendiculaire à la charge

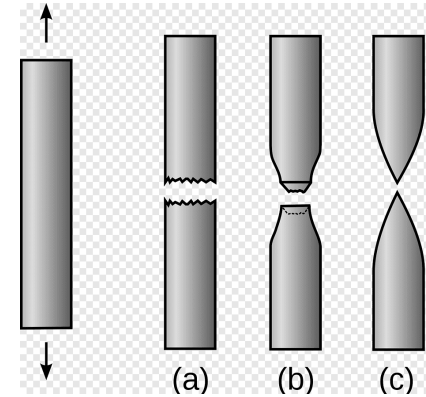


Ici, cylindre creux et non une poutre, mais c'est du flambage quand même !

On pense souvent à la contrainte max pour la rupture d'un matériau.

Mais le flambage demande un autre type de réflexion: Le flambage mène:

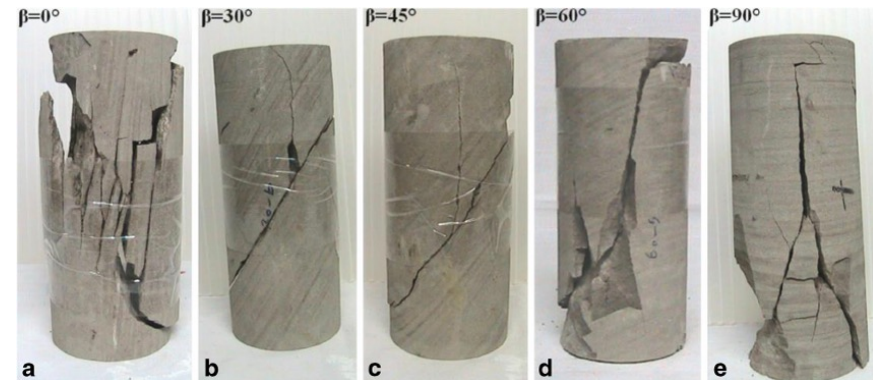
- à une défaillance de la structure (qui ne soutient plus les charges)
- à de grandes contraintes,
- et donc possiblement à une rupture (ou une déformation plastique)



Failure under static load



Failure under impact load



Exemple de flambage catastrophique: suite au flambage, de grandes déformations et des contraintes énormes, et rupture

---

### Buckling of a water-reservoir's columns

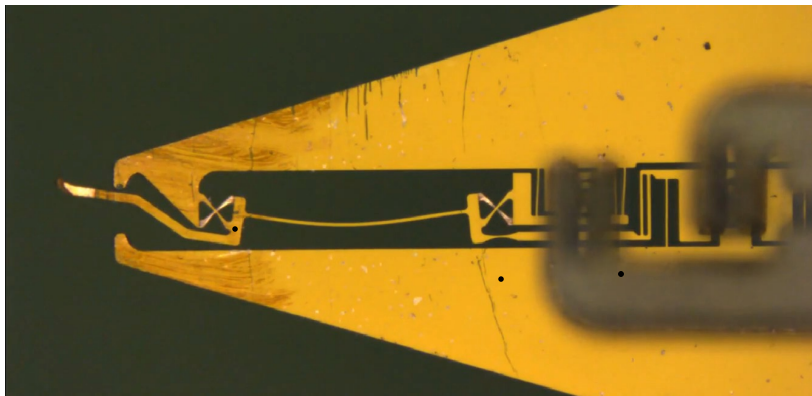


Après flambage, le support ne peut plus soutenir la charge du réservoir d'eau

Structure mince et légère, conçue pour une charge vertical

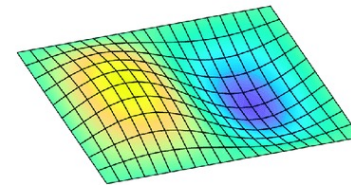
## Exemple de flambage sans défaillance structurale

- Pour l'avion à droite, c'est la structure sous-jacente qui est assez rigide pour résister aux contraintes
- Pour la pièce usinée en verre avec des guidages flexibles ci-dessous, le flambage est bi-stable et « enlève la charge »

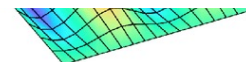


Y. Bellouard / S. Henein

Mode #1



<https://theaviationist.com/2019/11/20/lets-talk-about-the-b-52-strategic-bombers-characteristic-skin-wrinkles/>

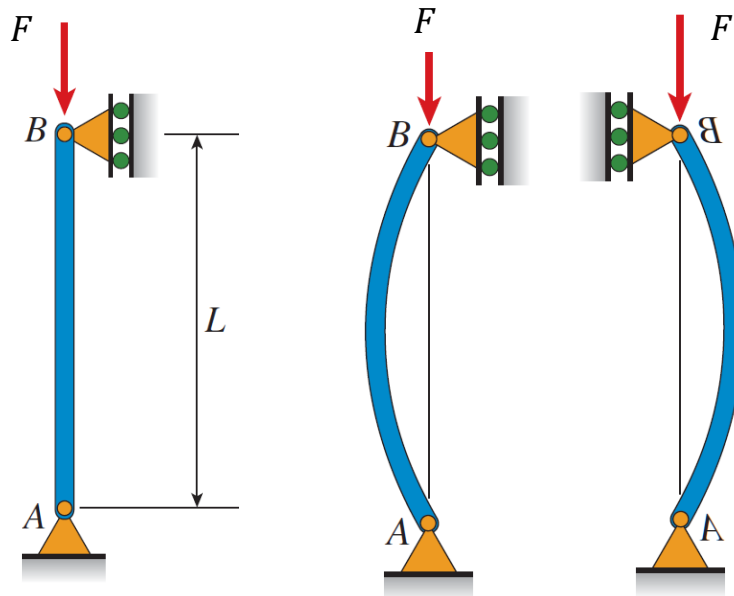


<https://www.mdpi.com/1996-1944/12/8/1262>

# Flambage d'une poutre (charge purement axiale)

Deux régimes de déformation lorsqu'une poutre est chargée en compression:

- $F < F_{cr}$  : Quand la charge axiale est petite, le changement de longueur sera simplement dû à la contrainte compressive.
- $F > F_{cr}$  Si la charge axiale dépasse une charge critique  $F_{cr}$ , la poutre devient instable et toute perturbation entraînera un flambage (la poutre se plie).
  - Dès qu'elle plie, la poutre risque fort de se casser car les contraintes ( $\sigma_x$ ) peuvent dépasser les seuils critiques, avec très grande flèche
  - Cas (bi)stable: poutre qui flambe avec une course limitée



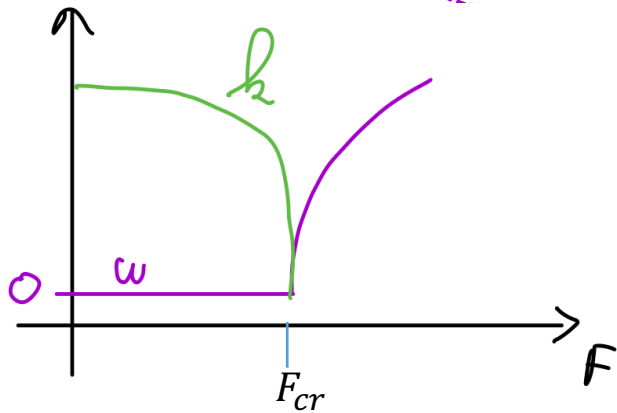
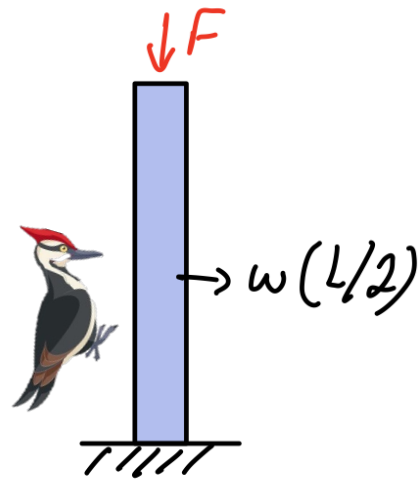
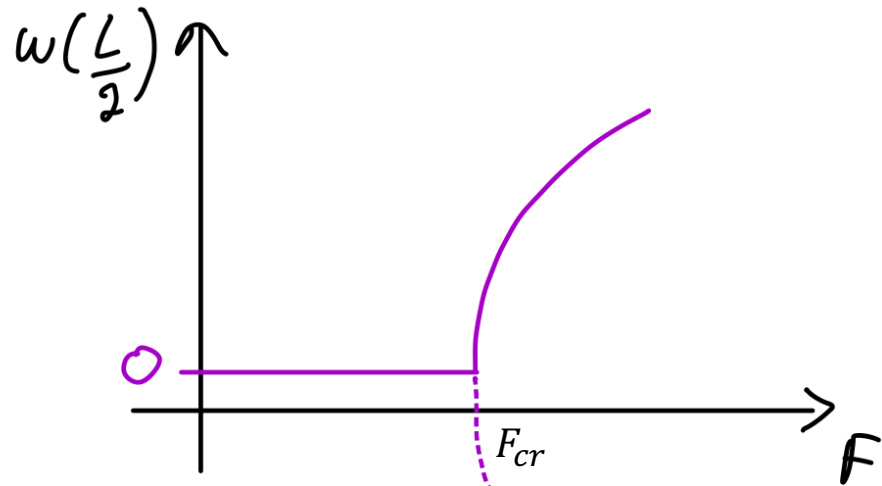
$$F < F_{cr}$$

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\epsilon = F/EA$$

$$F > F_{cr}$$

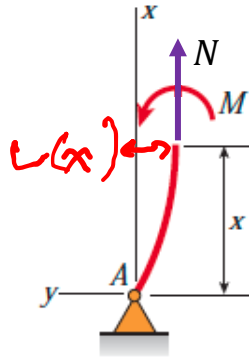
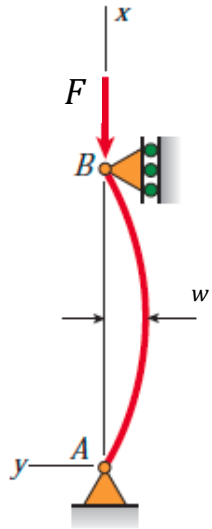
$$\epsilon = ?$$



# Flambage- modèle Euler

Pour des poutre non-encastées (*pinned-pinned*). Force centrées

- Nous pouvons dériver le modèle Euler pour la force critique de flambage en utilisant la méthode des sections (couper la poutre).



$$N = -F$$

$$M_z(x) = -F w(x)$$

**!! M(x) dépend de w(x) !!**

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = -\frac{F}{EI} w(x)$$

$$w(x) = C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right) + C_2 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right)$$

## Flambage- modèle Euler

$$w(x) = C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right) + C_2 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right)$$

### Conditions aux bord

1-  $w(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0,$

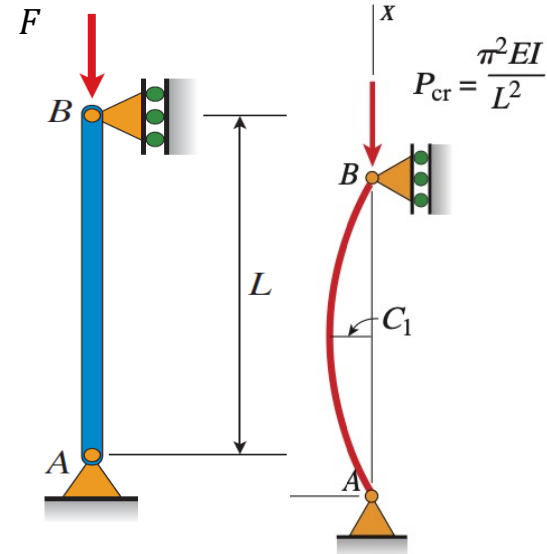
$$w(x) = C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right)$$

2-  $w(L) = 0$

$$\rightarrow C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} L\right) = 0$$

- Soit  $C_1 = 0$ , et la poutre reste droite  $w(x) = 0$

- Soit  $\sqrt{\frac{F}{EI}} L = n\pi$  et  $w(x) = C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right)$   
 $\uparrow \rightarrow F_{cr}$   $n = 1, 2, \dots$



$$F_{cr} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EI$$

## Flambage- modèle Euler

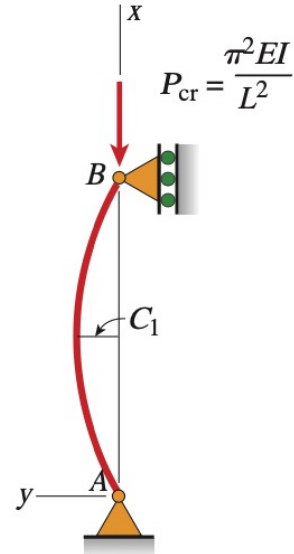
$$F_{cr} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EI$$

$$w(x) = C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right)$$

Si  $F < F_{crit}$ ,  $C_1 = 0$  et la poutre sera droite

Si  $F = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EI$  la poutre se déformera

Et si  $F > \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI$  ???



Nous ne connaissons pas  $C_1$ : nous savons que la poutre se déforme, mais pas encore de combien.  $C_1$  peut être négatif

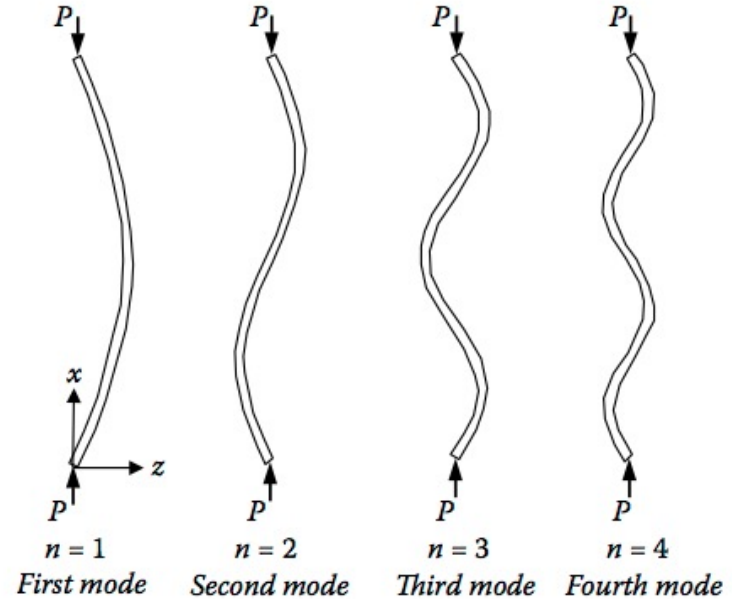
(mais voir slide 16 et 356)

# Flambage- modèle Euler

- L'équation différentielle comporte une infinité de solutions
- Il en résulte plusieurs modes de flambage
- On ne peut atteindre les modes  $n > 1$  que si des supports bloquent certains modes

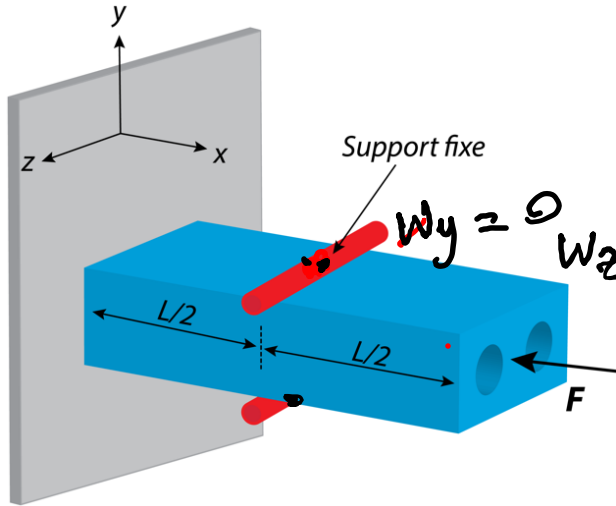
$$F_{cr} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EI$$

$$\sigma_{cr} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{EI}{A}$$



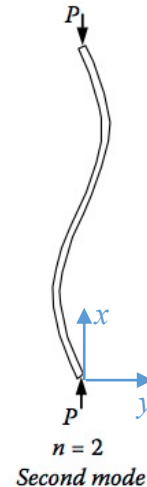
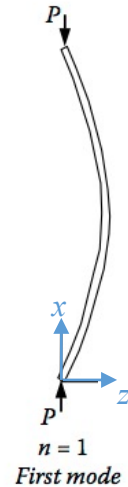
$$F_1 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI < F_2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 EI < F_3 = \left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 EI < F_4 = \left(\frac{4\pi}{L}\right)^2 EI$$

# Exemple de modes de flambage



$$F_{cr} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EI$$

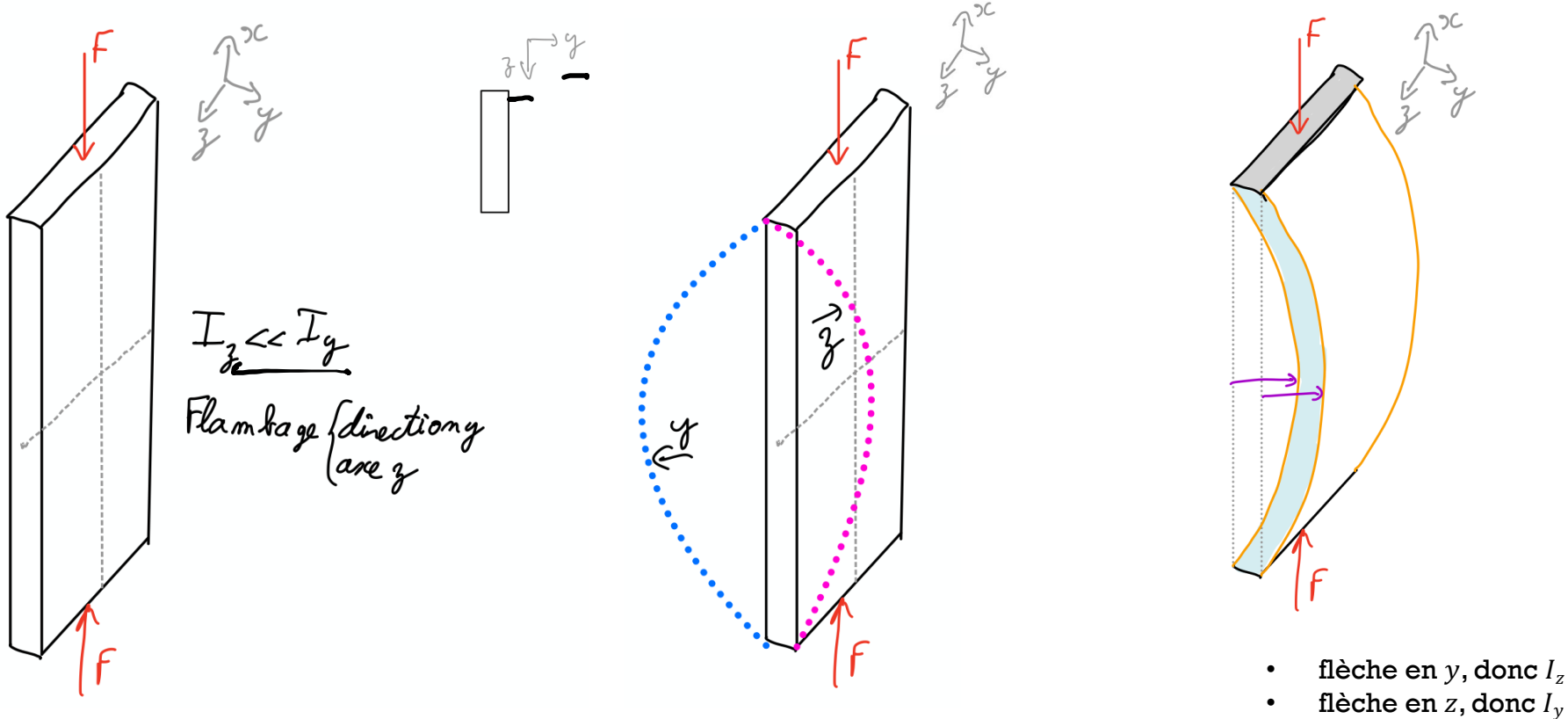
- Le support rouge bloque le mode  $n=1$  selon la direction  $y$ , mais permet  $n=2$ . (selon  $y$ , donc  $I_z$ )  $w_y$
- Le support rouge ne bloque pas le mode  $n=1$  selon la direction  $z$ ,  $n=1$  est permis. (selon  $z$ , donc  $I_y$ )  $w_z$



# Quel Axe de flambage?

$$F_{cr} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 E I_{z\text{-ou-}y}$$

La poutre pliera selon l'axe avec le plus petit  $I$ : il faut comparer  $I_z$  et  $I_y$



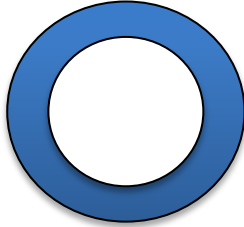
Quelle poutre supportera la plus grande charge avant flambage? (n=1)

Question

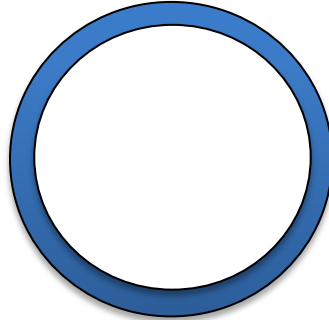
- A. D
- B. 2D
- C. 3D



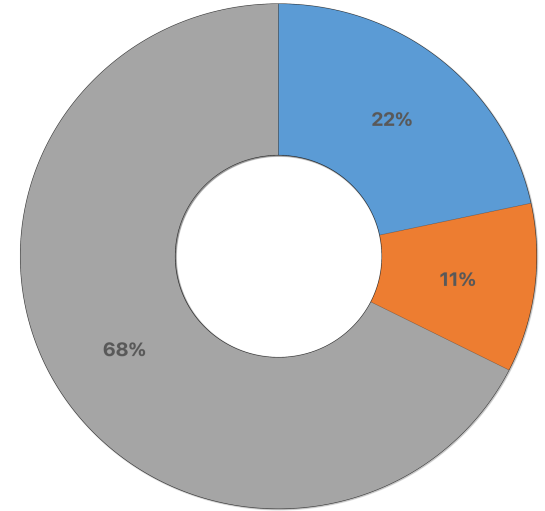
Diamètre D



Diamètre 2D



Diamètre 3 D



Mêmes section A, mêmes longueur L

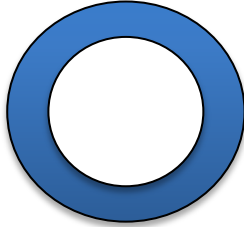
**Solution**

- A. D
- B. 2D
- C. 3D**

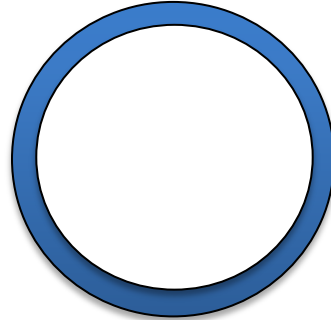
Quelle poutre supportera la plus grande charge avant flambage? (n=1)



Diamètre D



Diamètre 2D

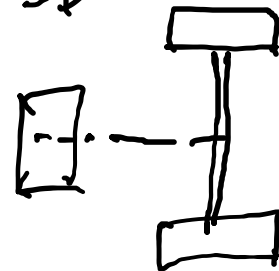


Diamètre 3 D

Mêmes section A, mêmes longueur L

$$F_{cr} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EI$$

$$I_{3D} > I_{2D} > I_D$$

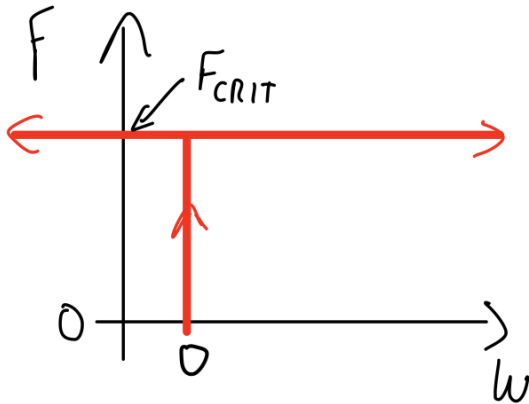


# Que vaut $C_1$ ?

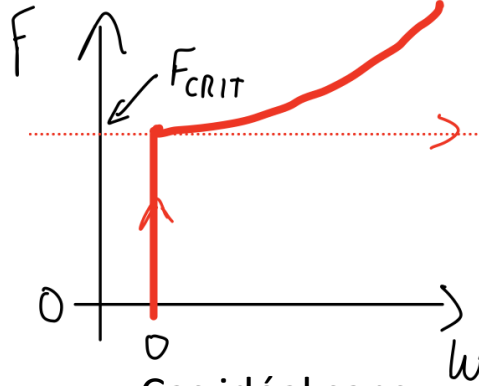
$$w(x) = C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}}x\right)$$

- Notre analyse était limitée aux petits déplacements, car nous avons utilisé l'approximation de  $\kappa = w''$  pour la courbure
- Avec cette simplification,  $C_1$  est indéfini

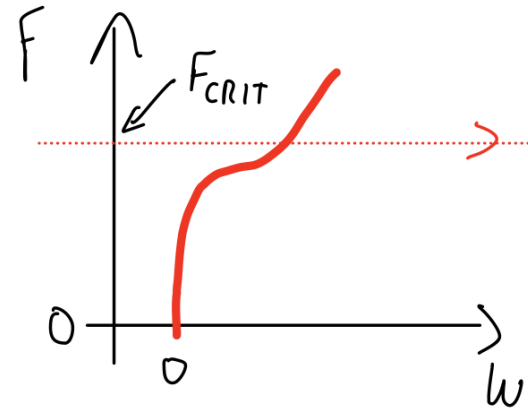
$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$



Cas idéal simplifié



Cas idéal sans approximation



Cas poutre non-idéale

# Flambage - formule d'Euler

- Contrainte et charge critiques: Formule d'Euler (1744) pour le flambage:

$$F_{cr} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EI \quad \rightarrow \quad \sigma_{crit} = \pi^2 E \left(\frac{nr}{L}\right)^2 ; \quad r^2 = \frac{I}{A}$$

Souvent  $n = 1$

- $r = \sqrt{I/A}$  : Rayon de Giration (*Radius of gyration*) en [m].  $A$  = section de la poutre
- $\left(\frac{L}{r}\right)$ : Coefficient d'élanement (*Slenderness ratio*). Sans unités

- Flèche de la poutre flambée:

$$w(x) = C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right)$$

- Attention: pour une force selon  $x$ , la poutre peut fléchir selon  $y$  ou selon  $z$ . C'est autour de l'axe avec le plus petit moment d'inertie qu'il y aura flambage.
- Le moment d'inertie ( $I_y$  ou  $I_z$ ) doit donc être choisi pour « plier » autour de l'axe de flambage  $z$  ou selon  $y$ .

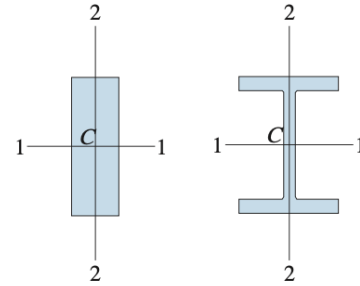
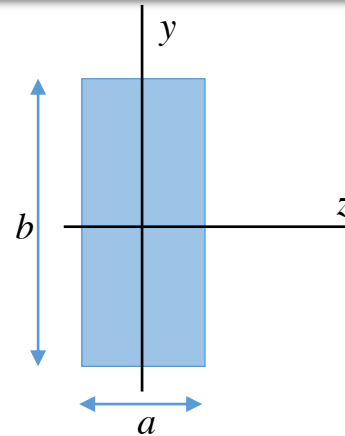
## Rayon de giration $r$

$r \sim$  épaisseur de la poutre dans le sens du mouvement

■  $r^2 = \frac{I}{A}$

□  $I_z = \frac{ab^3}{12}$  et donc  $r_z = \frac{b}{2\sqrt{3}}$

□  $I_y = \frac{ba^3}{12}$  et donc  $r_y = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

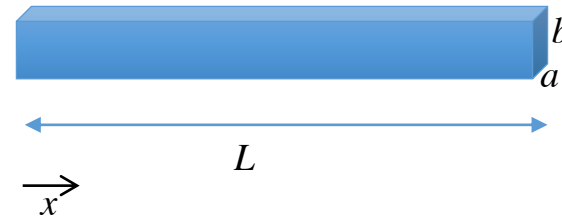


■  $\left(\frac{L}{r}\right)$ : Coefficient d'élanement

□ prendre  $I_x$  ou  $I_y$  qui correspond au bon axe

□  $\frac{L}{r} = \frac{2\sqrt{3}L}{b}$  si flambage selon  $y$

□  $\frac{L}{r} = \frac{2\sqrt{3}L}{a}$  si flambage selon  $z$



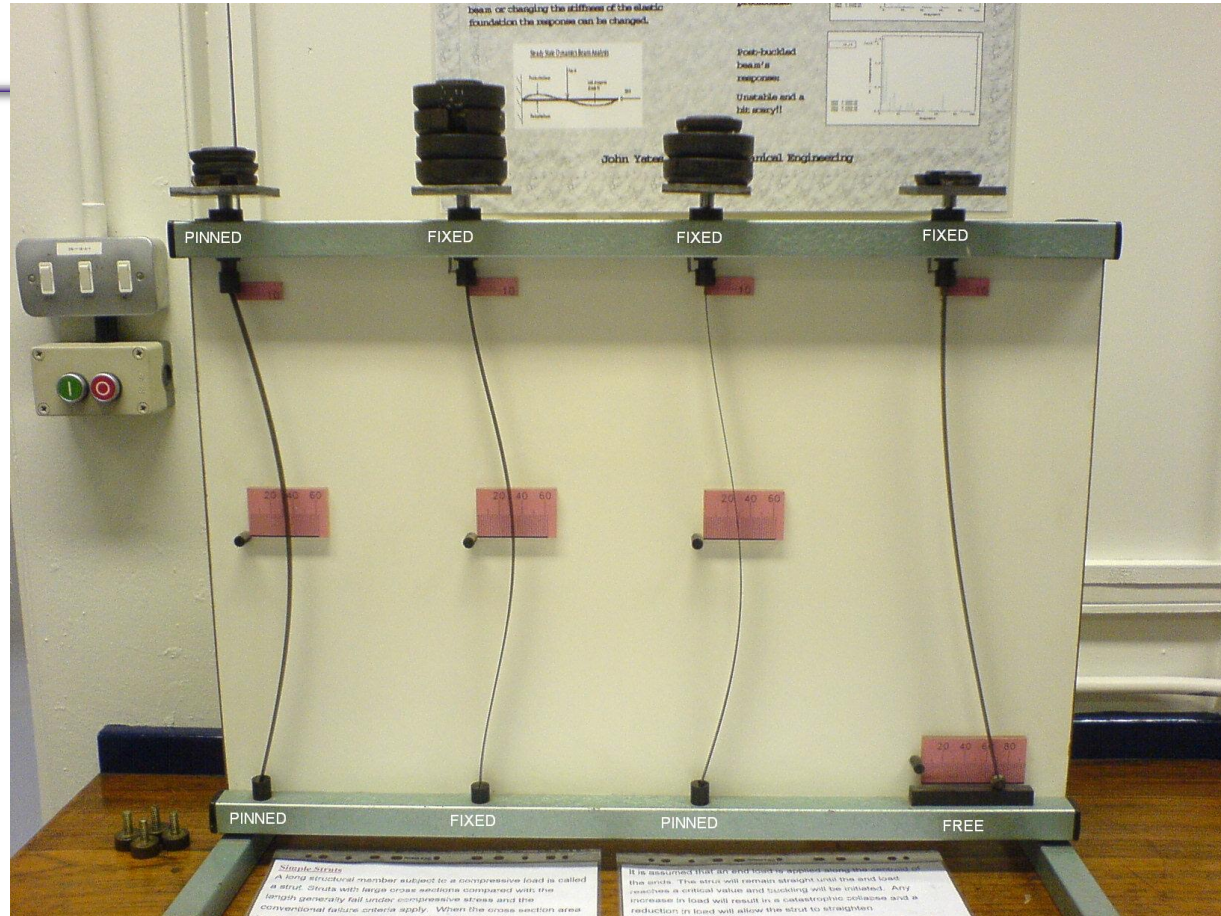


# Flambage: $F_{cr}$ dépend des supports

*Pinned* = pivot

*Fixed* = encastée

*Free* = libre

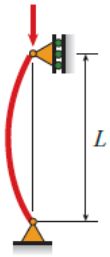

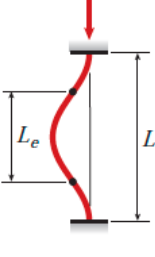
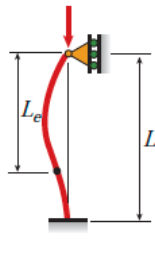


# Flambage: dépend des supports

## Longueur effective

- La formule d'Euler peut être généralisée vers d'autres types de supports en utilisant le concept de la longueur effective  $L_{eff}$

$$F_{cr} = \left( \frac{\pi}{L_{eff}} \right)^2 EI \quad \rightarrow \quad \sigma_{crit} = \pi^2 E \left( \frac{r}{L_{eff}} \right)^2$$

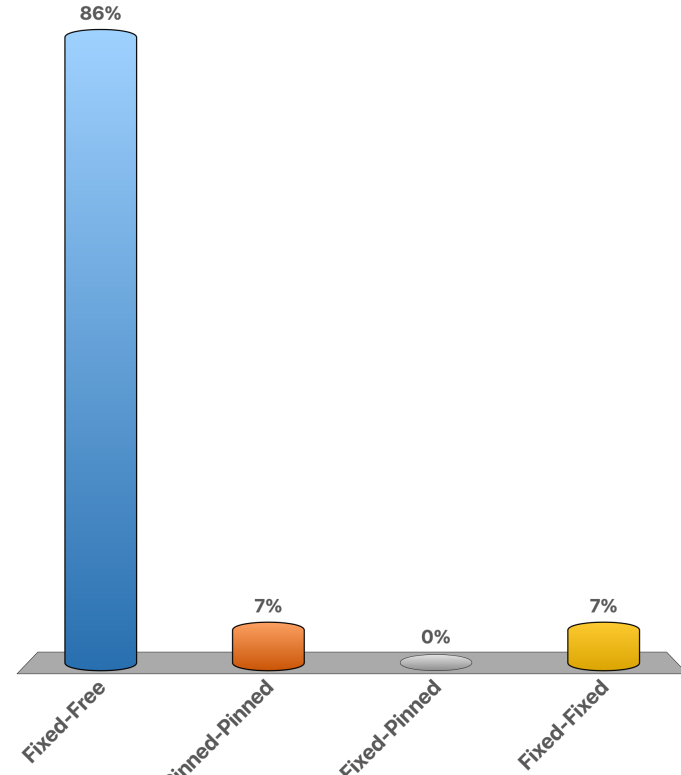
(a) Pinned-pinned column	(b) Fixed-free column	(c) Fixed-fixed column	(d) Fixed-pinned column
$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{2.046 \pi^2 EI}{L^2}$
			
$L_e = L$	$L_e = 2L$	$L_e = 0.5L$	$L_e = 0.699L$

*Pinned* = pivot  
*Fixed* = encadrée  
*Free* = libre

**Question**

4 poutres, mêmes dimensions, différents supports. On augmente doucement la charge. Laquelle flambera en premier?

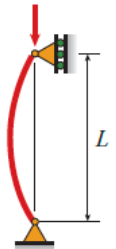
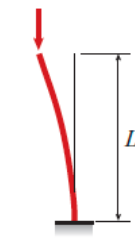
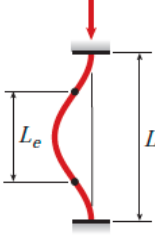
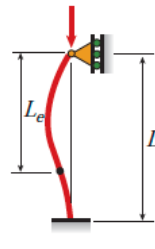
- A. Fixed-Free
- B. Pinned-Pinned
- C. Fixed-Pinned
- D. Fixed-Fixed



**Solution**

4 poutres, mêmes dimensions, différents supports. On augmente doucement la charge. Laquelle flambera en premier?

- A. Fixed-Free
- B. Pinned-Pinned
- C. Fixed-Pinned
- D. Fixed-Fixed

(a) Pinned-pinned column	(b) Fixed-free column	(c) Fixed-fixed column	(d) Fixed-pinned column
$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{2.046 \pi^2 EI}{L^2}$
			
$L_e = L$	$L_e = 2L$	$L_e = 0.5L$	$L_e = 0.699L$

*Handwritten notes:*  
 easiest <sup>to buckle</sup> difficult to buckle

# Semaine 10 – partie 2

## Objectifs d'apprentissage

- Prédire si une poutre va se casser par:
  - i) rupture de matériau
  - ou
  - ii) par flambage (=structurelle)
- Choisir les dimensions d'une poutre pour avoir un facteur de sécurité donné par rapport aux deux modes de défaillance

# Défaillance

## Matériau ou Flambage?

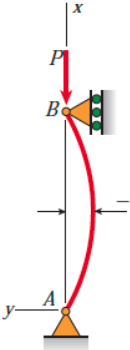
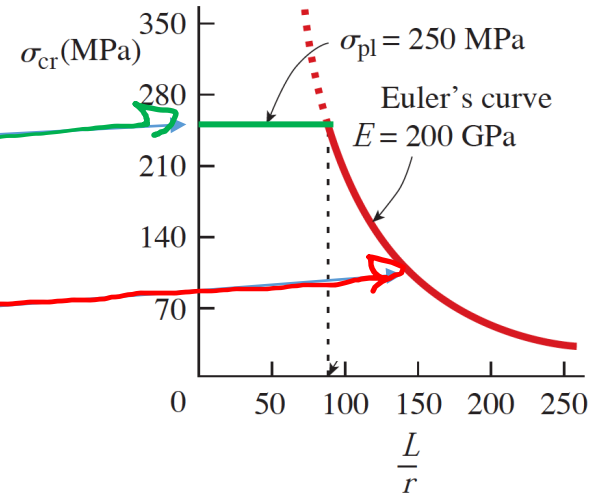
- Sous une charge, un poutre ne tient plus la charge car soit:

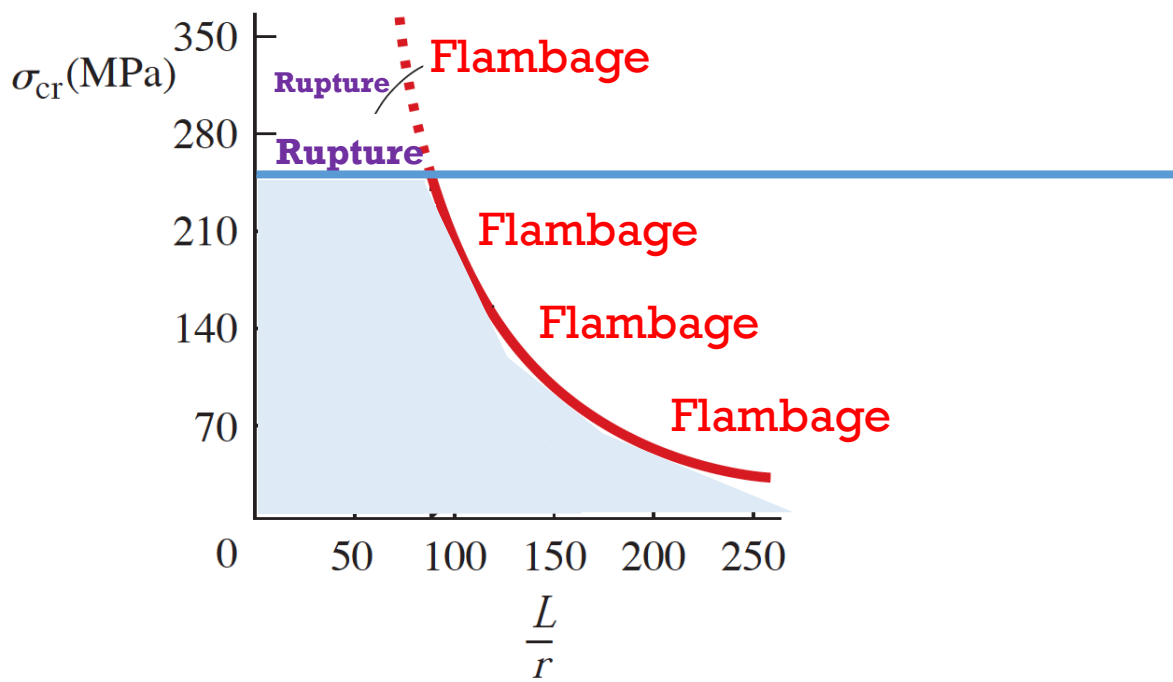
- on dépasse la contrainte max pour rupture du matériau  $\sigma_{rupture}$  (ne dépend pas de  $L$ , mais dépend de  $A$ )
- On dépasse la contrainte max pour flambage  $\sigma_{flambage}$  (dépend de  $L$  et de  $I$ ). La poutre se plie (puis peut-être se casse)

$\sigma_{rupture}$  est une propriété du matériau

$$\sigma_{flambage} = \frac{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 EI}{A} \sim \pi^2 E \left(\frac{r}{L}\right)^2$$

Graph of Euler's curve [from Eq. (11-19)] for structural steel with  $E = 200$  GPa and  $\sigma_{pl} = 250$  MPa

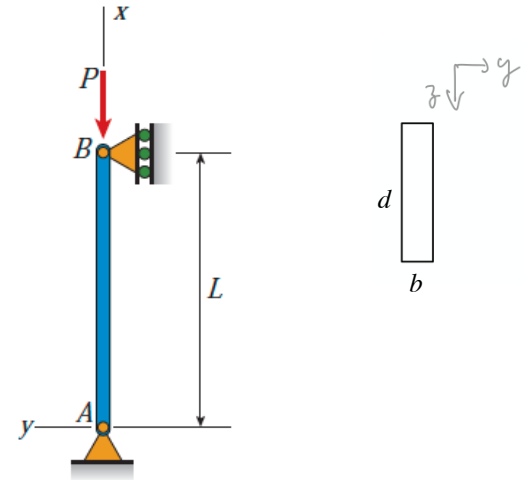




# Exemple F1

## Flambage et facteur de sécurité.

- Poutre de section rectangulaire, support “Pinned-Pinned” (pivot-pivot)
- $b = 12 \text{ cm}$ ,  $d = 50 \text{ cm}$ ,  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_{Yield} = 250 \text{ MPa}$ .
  - a) Pour une longueur  $L = 5 \text{ m}$ , quelle est la charge max axiale pour un facteur de sécurité  $SF=2$ ?
  - b) Si la colonne est soumise à une charge axiale  $F=79 \text{ kN}$ , quelle est la longueur maximale, pour  $SF=2$ ?
  - c) Pour les deux cas, quelle sera la direction de la flexion (direction axe  $y$  ou  $z$ )?



# Exemple F1

Flambage et facteur de sécurité.

*rupture*

*flambage*

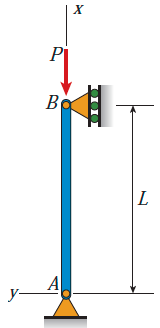
a)  $L=5$  m. Trouver Charge  $F_{max}$ : Défaillance du matériau ou défaillance structurelle?

Critère Défaillance du matériau:

$$SF = 2 = \frac{\sigma_{défaill}}{\sigma_{x,max}} \quad \text{c'est à dire} \quad \sigma_{x,max} = \frac{\sigma_{défaill}}{2}$$

$$F_{max, Matériau} = \sigma_{x,max} A = \frac{\sigma_{défaill}}{2} A = 7.5 \text{ MN}$$

$F_{max, Matériau}$  ne dépend pas de L



Critère Défaillance structurelle (flambage):

$$SF = 2 = \frac{F_{Crit,flamb}}{F_{max,flamb}}$$

$$F_{max, Flamb} = \frac{F_{crit,Flamb}}{2}$$

# Exemple F1

Flambage et facteur de sécurité.

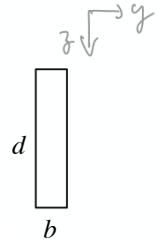
$$F_{max,Flamb} = \frac{1 \pi^2}{2 L^2} EI$$

$$= \frac{\pi^2}{L^2} \frac{Eb^3d}{2 \times 12} = 288\pi^2 \text{kN} \approx \underline{2.84 \text{ MN}}$$

failure  
(premier mode)

$$I_z = \frac{b^3 d}{12}$$

$$I_y = \frac{d^3 b}{12}$$



plus facile de plier selon axe z que selon axe y ( car  $I_z < I_y$  vu que  $b < d$  )  
donc on utilise  $I_z = \frac{b^3 d}{12}$  car flexion de flambage selon y

On trouve  $F_{max, Buckling} < F_{max, Matériau}$        $2.84 \text{ MN} < 7.5 \text{ MN}$

donc **défaillance par flambage et non par rupture pour L=5 m, et charge axiale max de 2.84 MN**

# Exemple F1

Flambage et facteur de sécurité.

**b) longueur max de la poutre pour F=79 kN ?**

79 kN  $\ll$  7.5 MN, donc ce sera une défaillance par flambage et non par rupture du matériau

$$\text{Défaillance structurelle (flambage): } SF = 2 = \frac{F_{cr,flambage}}{F_{ext}} \rightarrow F_{ext} = \frac{\pi^2}{2L_{crit}^2} EI$$

$$\underline{L_{crit}} = \sqrt{\pi^2 \frac{EI}{2F}} = \sqrt{\pi^2 \frac{2 \cdot 12^3 \cdot 50 \cdot 10^3}{2 \cdot 12 \cdot 79 \cdot 10^3}} \approx \underline{15 \text{ m}}$$

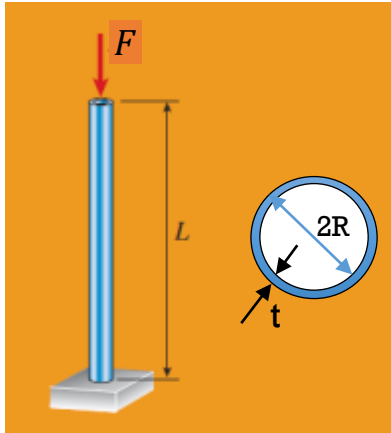
7.7 MN pour rupture  
2.84 MN flambage à 5 m  
0.079 MN flambage à 15 m

- Dans les deux cas (a et b), la structure se casse par flambage (et non par rupture)
- défaillance en flambage pour une force qui est 100x plus petite que force pour rupture !
- La flexion sera perpendiculaire à la dimension la plus mince de la poutre, ici  $b$  et non  $d$ .

# Exemple F2

## Flambage et facteur de sécurité

- Cylindre creux, conditions “encastré – libre” (= “fixed-free”). Donc  $L_{eff} = 2L$
- $R = 7.07 \text{ cm}$ ,  $L = 3.1416 \text{ m}$ ,  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_{y,max} = 250 \text{ MPa}$
- Trouver l'épaisseur minimum  $t_{min}$  de la paroi pour supporter une charge de  $F=250 \text{ kN}$  avec un facteur de sécurité  $SF=2$



on considère les 2 modes de défaillance:

$$SF = \frac{\sigma_{y,max}}{\sigma_{charge}} \geq 2 \quad \text{rupture matériau}$$

$$SF = \frac{\sigma_{cr,flambage}}{\sigma_{charge}} = \frac{F_{crit,flambage}}{F_{charge}} \geq 2 \quad \text{flambage}$$

# Exemple F2

## Flambage et facteur de sécurité

### critère 1:

pas de rupture du matériau  
sous la charge de 250 kN

$$\sigma_{charge} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi(R^2 - (R-t)^2)} \approx \frac{F}{2\pi Rt}$$

$t \ll R$

Pour simplifier les maths, j'ai pris que  $\frac{t}{R} \ll 1$ . Vous pouvez résoudre plus correctement sans cette approximation.

$$SF = \frac{\sigma_{y,max}}{\sigma_{load}} = 2$$

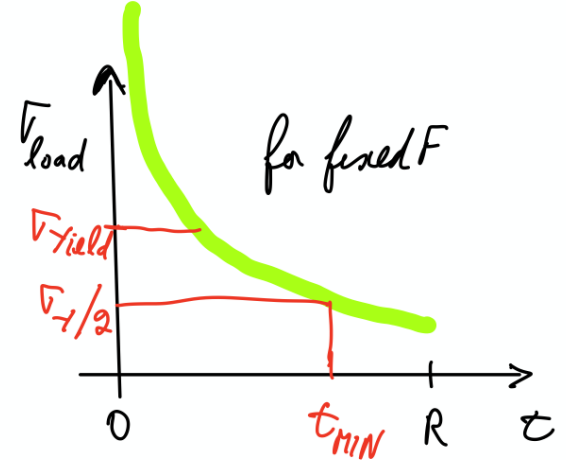
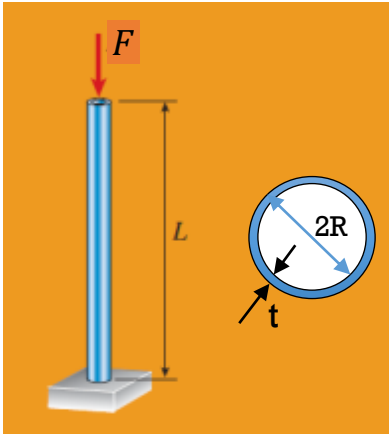
$$\frac{F}{2\pi R t_{min}} = \frac{\sigma_{y,max}}{2}$$

$$t_{min} = F / \pi R \sigma_{y,max}$$

$$t_{min,rupture} = 4 \text{ mm}$$

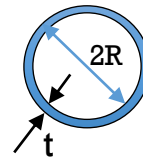
Et en effet  $t \ll R$  avec  $R = 7.07 \text{ cm}$

Rupture si  $t < t_{min}$



# Exemple F2

## Flambage et facteur de sécurité



**critère 2: pas de flambage**

$$F_{cr,flambage} = \left( \frac{\pi}{L_{eff}} \right)^2 EI = \frac{\pi^2}{4L^2} E \frac{\pi}{4} (R^4 - (R-t)^4)$$

$$\frac{F_{crit,flambage}}{F_{charge}} \geq 2$$

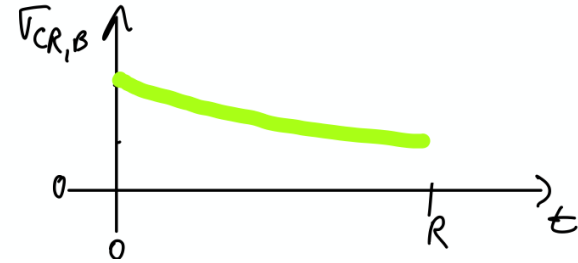
$$\pi^2 \frac{E}{4L^2} \frac{\pi}{4} (R^4 - (R-t)^4) = 2F$$

$$t = R - \sqrt[4]{R^4 - \frac{32FL^2}{\pi^3 E}}$$

$$t_{min,flambage} = 11.5 \text{ mm}$$

$$t_{min,rupture} = 4 \text{ mm}$$

$t_{min,flambage} > t_{min,rupture}$  il faut donc une paroi plus épaisse que 11.5 mm pour résister au flambage



**= 11.5 mm**

on veut que la contrainte critique pour le flambage soit max ½ de la contrainte due au 250 kN pour assurer de ne pas avoir de flambage.

on s'intéresse donc au ratio  $\frac{\sigma_{charge}}{\sigma_{cr,Flamb}}$  et non  $\frac{\sigma_{y,max}}{\sigma_{cr,Flamb}}$

- Une paroi mince peut donner un grand  $I_z$  pour une faible section, et donc une grande résistance au flambage
- (mais en réalité flambage localisé)

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

Rayon de giration

$$I = r^2 A$$

Quelle poutre supportera la plus grande charge avant flambage?

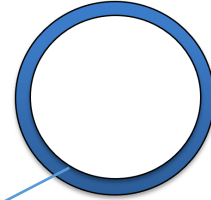
- A. D
- B. 2D
- C. 3D



Diamètre D



Diamètre 2D



Diamètre 3 D

- Pour section circulaire pleine

$$r = \frac{R}{2}$$

- Pour section circulaire

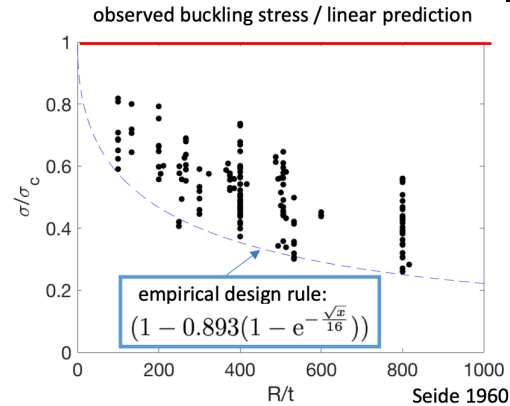
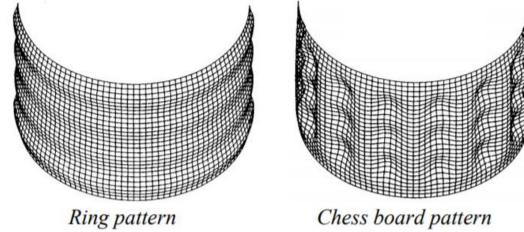
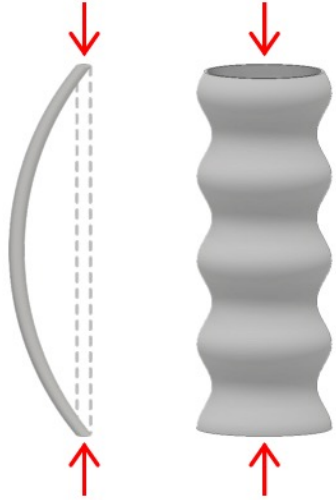
$$\text{d'épaisseur } t \ll R \quad r = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$\sigma_{flambage} = \frac{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI}{A}$$

$$\sigma_{flambage_{3R}} = \frac{9}{\sqrt{2}} \sigma_{flambage_{1R}} \approx 6.4 \sigma_{flambage_{1R}}$$

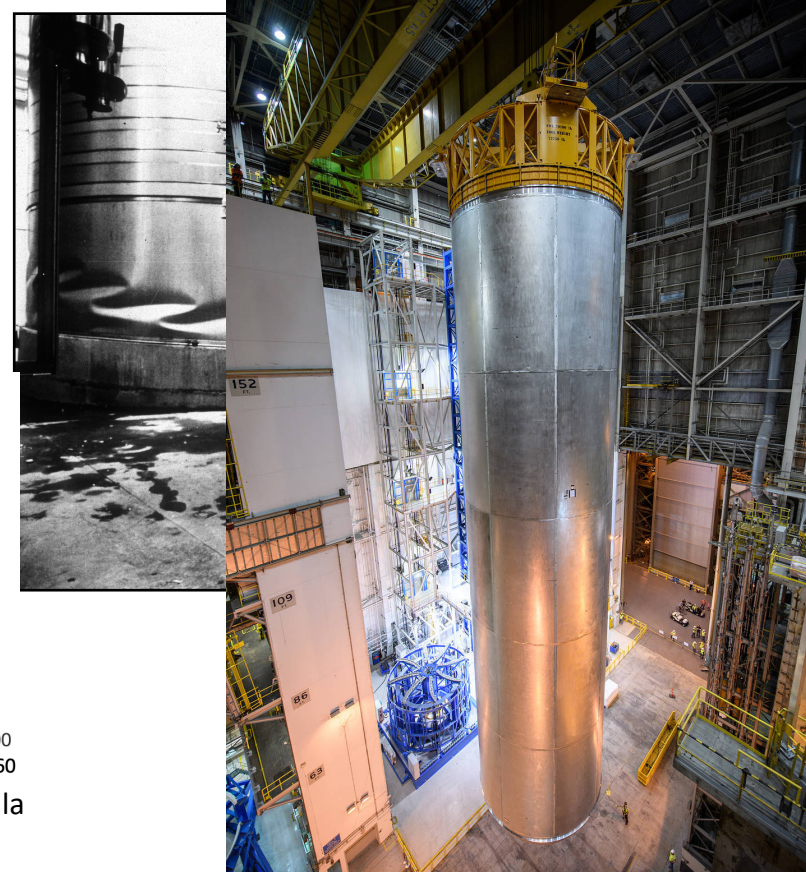
# Shell buckling

- Le flambage est aussi un mode de défaillance pour des structures à paroi mince (« shell »)



$$\sigma_{crit-shell} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{t}{R}$$

$t$ : épaisseur paroi.  $R$ : rayon du cylindre.  
 $E$ : module de Young.  $\nu$ : ratio de Poisson



Petit défauts réduisent beaucoup la  
 contrainte critique pour flambage

## Semaine 10b –partie 3

### Objectifs d'apprentissage de cette partie

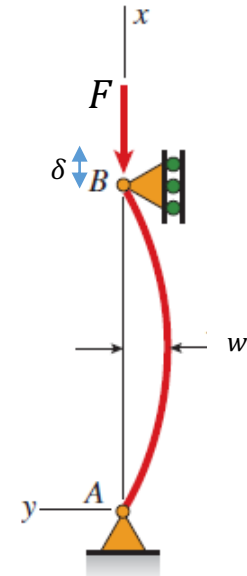
- Flambage- calcul par l'énergie
- Bistabilité de poutres
- Flambage par expansion thermique
- Flambage pour poutre à faible élancement

# Flambage – calcul par l'énergie

- L'énergie stockée dans une poutre qui a flambée due à une charge axiale :

$$\begin{aligned}
 U_{tot} &= U_{m\acute{e}canique} + U_{charge} \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L EI w''(x)^2 dx + F\delta
 \end{aligned}$$

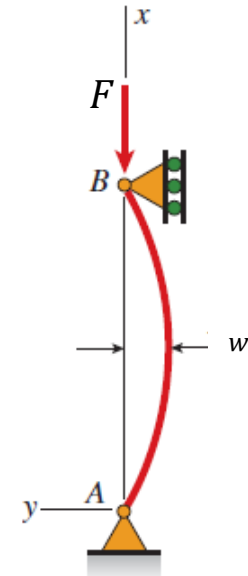
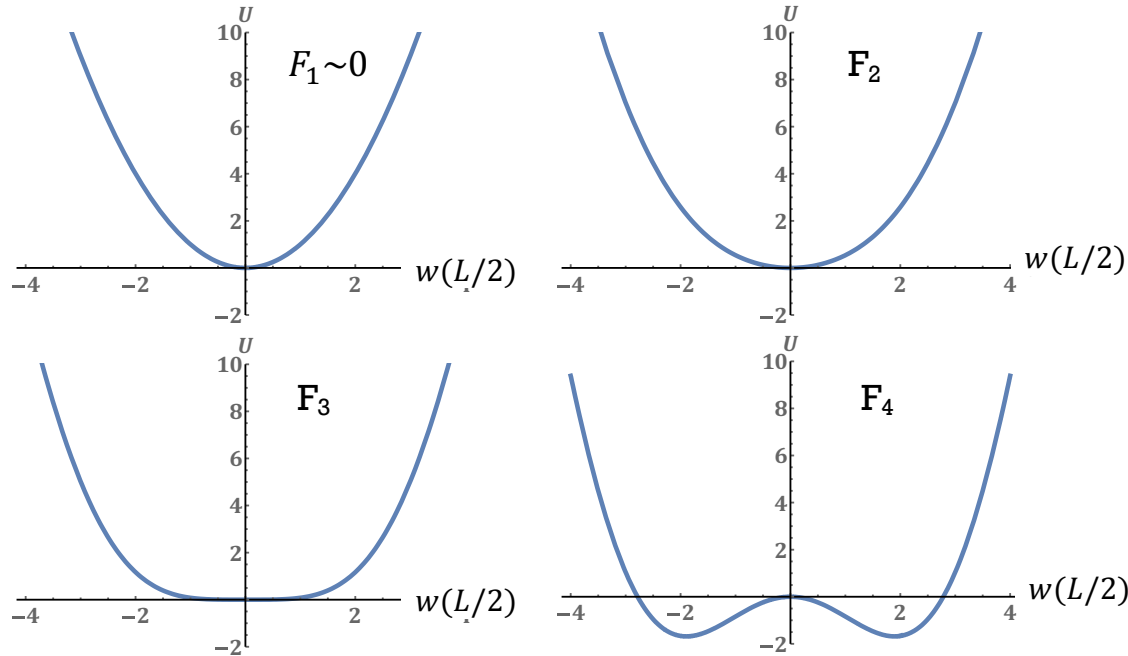
- $\delta$ : déplacement selon  $x$  du point B
- Pour une petite charge  $F$ , la situation stable est  $w = 0$  et donc  $\delta = 0$  (sauf petite déformation due à la compression du matériau)
- Lorsque  $F$  augmente,  $w = 0$  devient un maximum local d'énergie, et des solutions stables apparaissent avec  $\delta > 0$  (modes en flambage)
- On calcule  $U_{tot}$  et cherche les minima et maxima
- Ça donne les flèches après flambage



# Flambage – calcul par l'énergie

$$U_{tot} = U_{m\acute{e}canique} + U_{charge}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L EI w''(x)^2 dx + F \delta$$

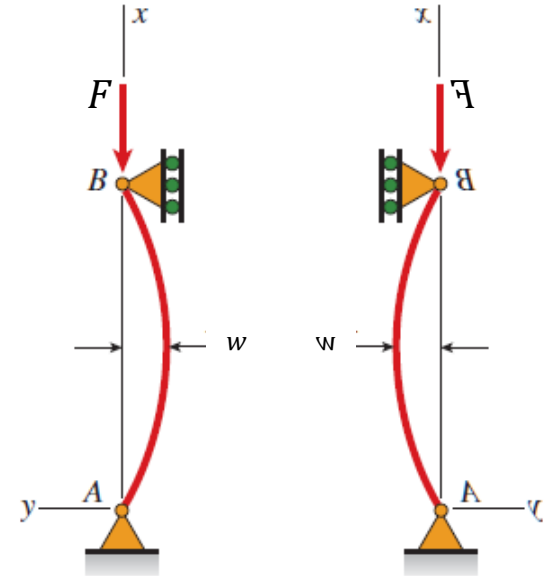
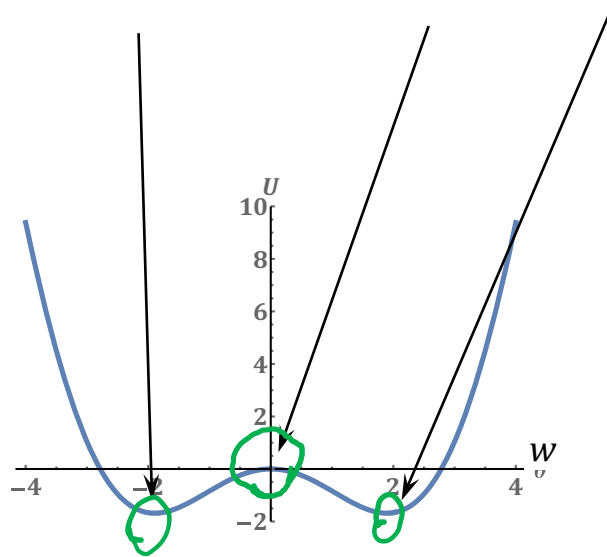


$$F_{sys} = -\frac{dE}{dw} \quad k_{sys} = \frac{dF}{dw}$$

$$F_1 < F_2 < F_3 < F_4$$

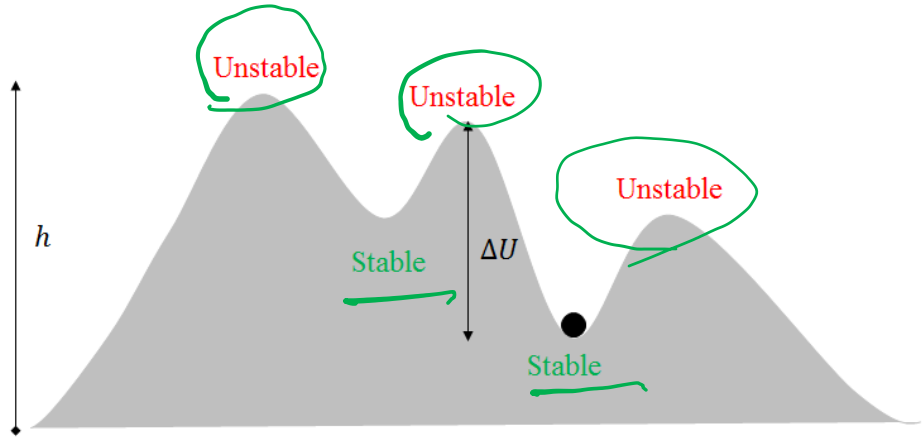
# Bistables

position stable    position instable    position stable



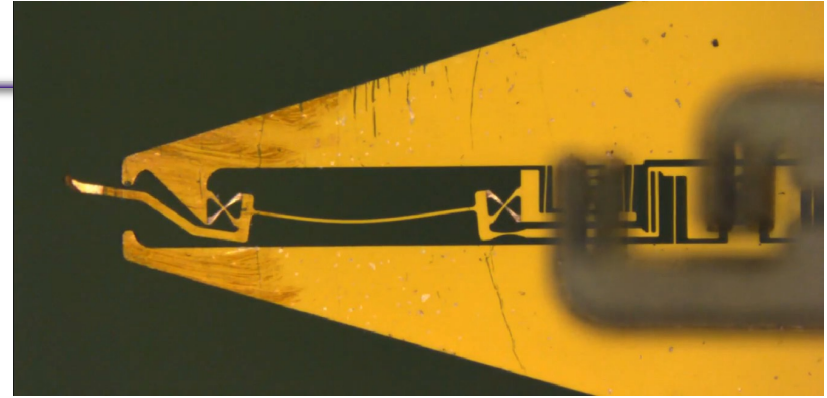
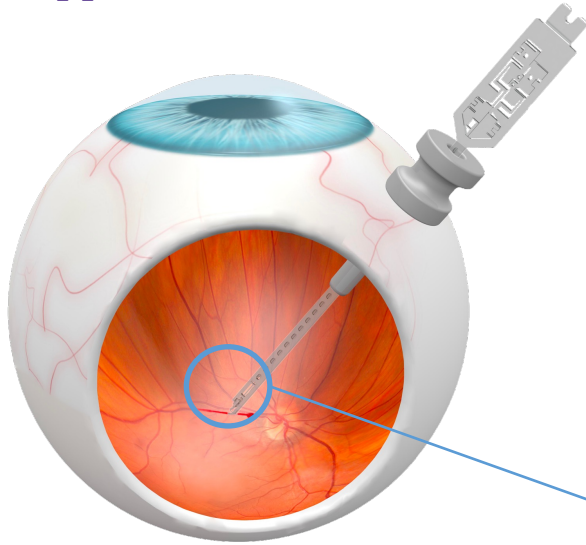
$$F_{sys} = -\frac{dE}{dw} \quad k_{sys} = \frac{dF}{dw}$$

# Bistables



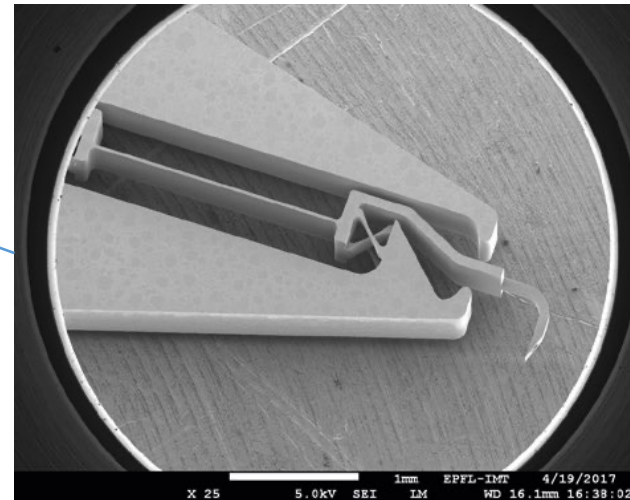
# Systèmes Bistables

Applications médicales:



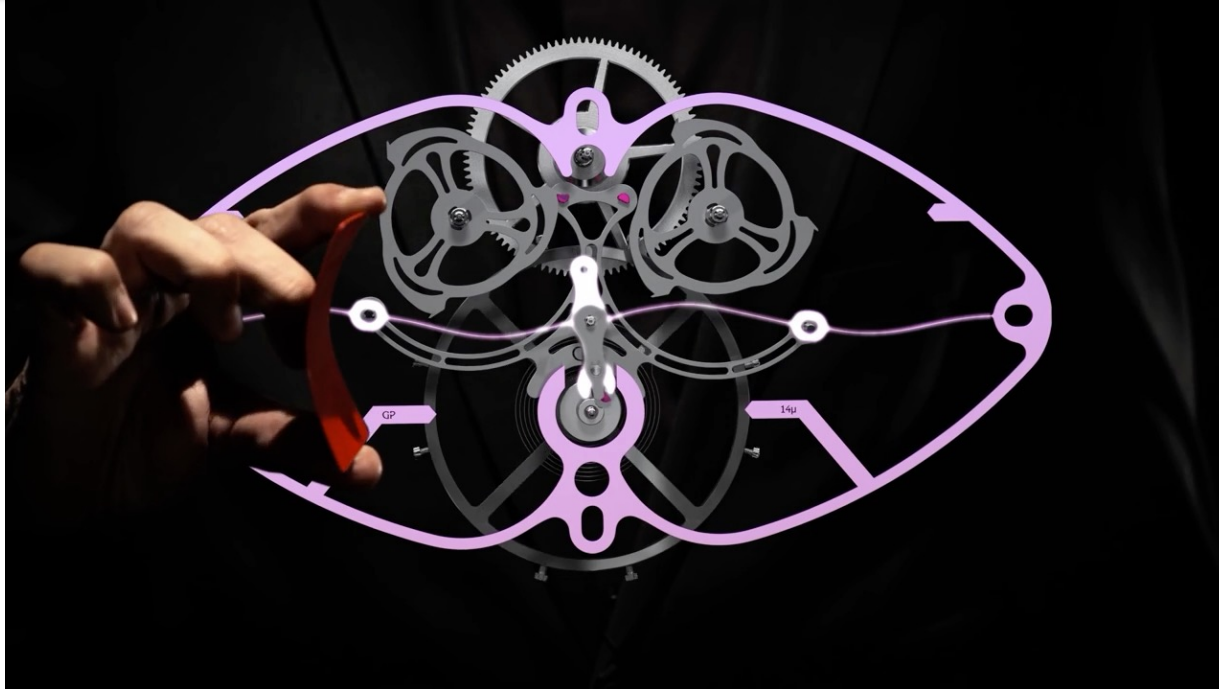
Un outil qui perce une veine rétinienne pour injecter des produits pour éliminer une occlusion (labos S. Henein et Y. Bellouard)

Usiné en verre!!!



# Bistables en horlogerie (GP constant escapement)

<https://www.youtube.com/watch?v=MQJFRt-2hDk>



«whatever the energy of the barrel, the escapement will transmit a constant energy to the regulator (or balance). In order to do so, the idea was to integrate a silicon intermediary device into the escapement which contained an extremely thin blade, accumulating energy up to a threshold close to instability; always the same. It then transmits this energy completely ...»

<https://www.girard-perregaux.com/en/bridges/constant-escapement-lm-93505-21-631-ba6e>

# Effet de la Température

---



# Flambage

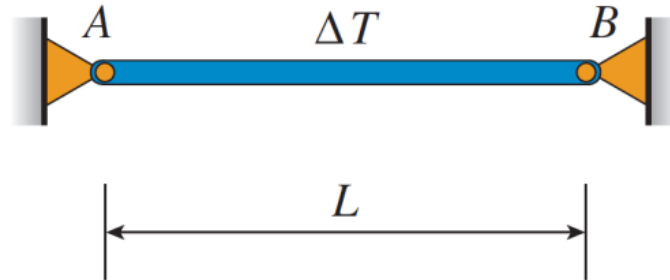
## Effet de la Température

- Si  $\alpha\Delta T > 0$ , cette “expansion” provoque une contrainte compressive dans la poutre
- Si cette contrainte est trop élevée, il y aura flambage.

$$\sigma_{crit,Thermal} = \alpha \cdot \Delta T \cdot E = \pi^2 E \left( \frac{r}{L_{eff}} \right)^2$$

$$\Delta T_{flamb} = \frac{\pi^2}{\alpha} \left( \frac{r}{L_{eff}} \right)^2$$

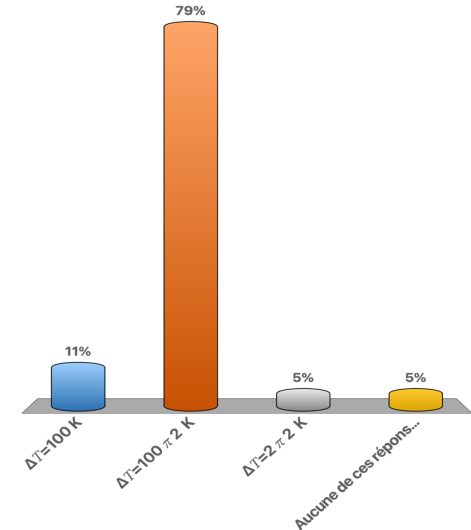
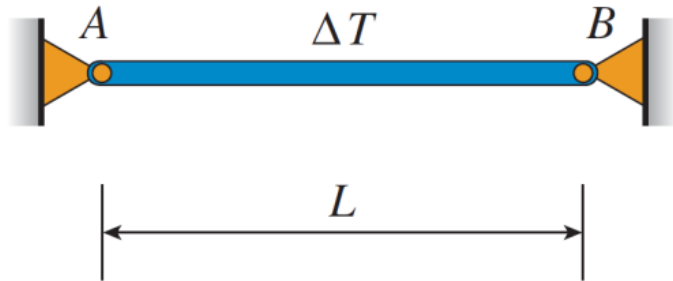
$\Delta T$  pour flambage ne depend pas de E!



## Question

$L/r = 100$ ;  $\alpha = 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$   
Quel  $\Delta T$  pour flambage?

- A.  $\Delta T = 100 \text{ K}$
- B.  $\Delta T = 100\pi^2 \text{ K}$
- C.  $\Delta T = 2\pi^2 \text{ K}$
- D. Aucune de ces réponses



## Solution

$L/r = 100$ ;  $\alpha = 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ;  $E = 200 \text{ GPa}$   
Quel  $\Delta T$  pour flambage?

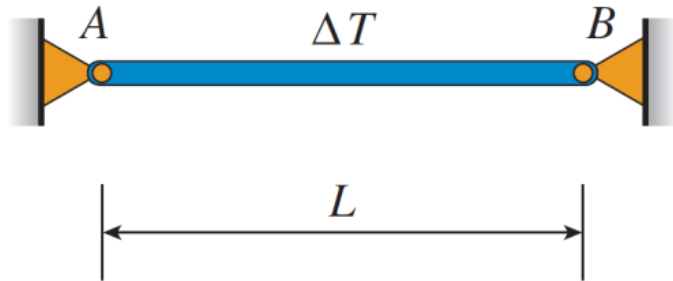
A.  $\Delta T = 100 \text{ K}$

B.  $\Delta T = 100\pi^2 \text{ K}$

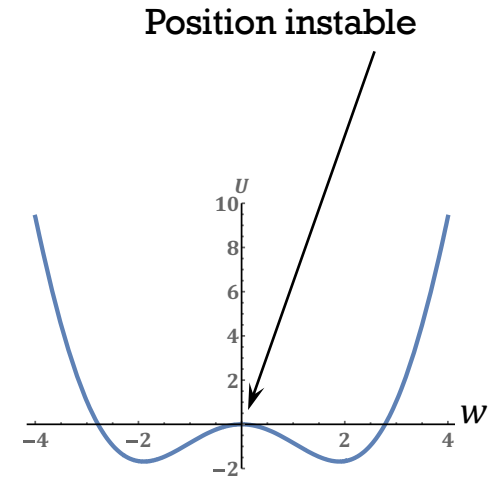
C.  $\Delta T = 2\pi^2 \text{ K}$

D. Aucune de ces réponses

$$\Delta T_{\text{flamb}} = \frac{\pi^2}{\alpha} \left( \frac{r}{L_{\text{eff}}} \right)^2$$



# flambage – déformation plastique

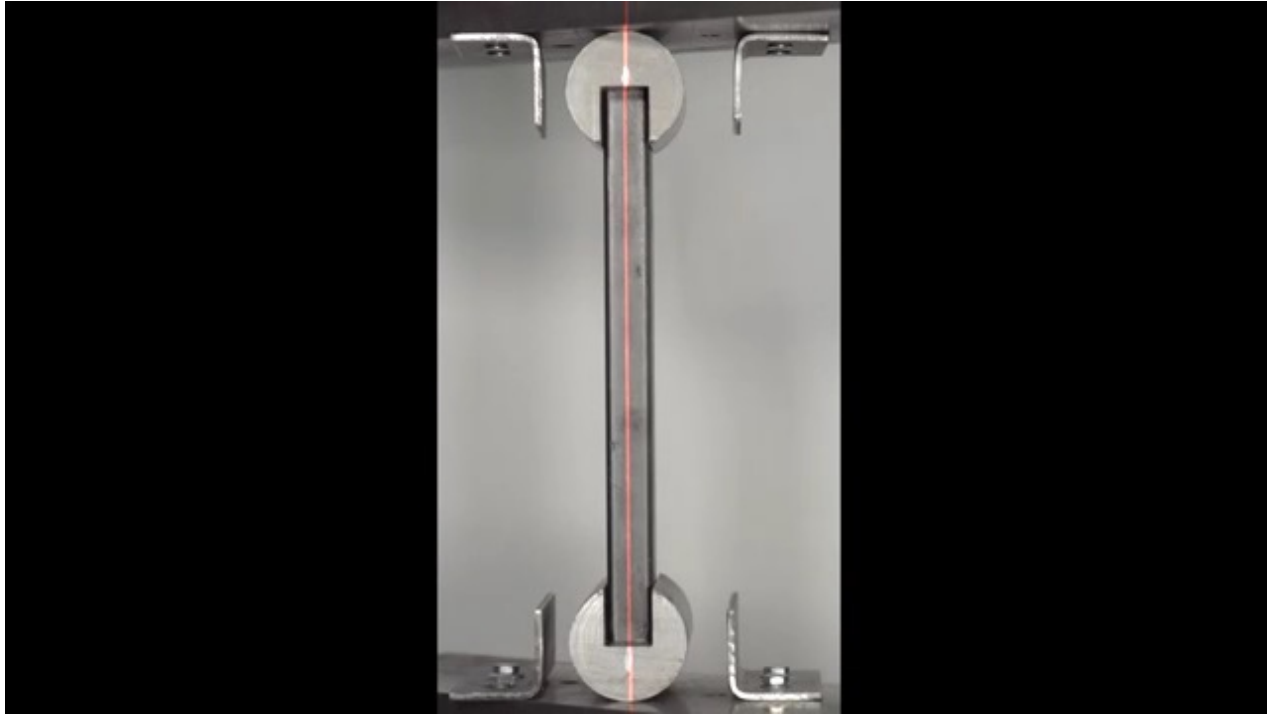


Canette: déformation plastique suite au flambage

# Flambage de poutres “pas minces”

(faible coefficient d'élancement,  $L/r$  pas  $\gg 1$ )

---

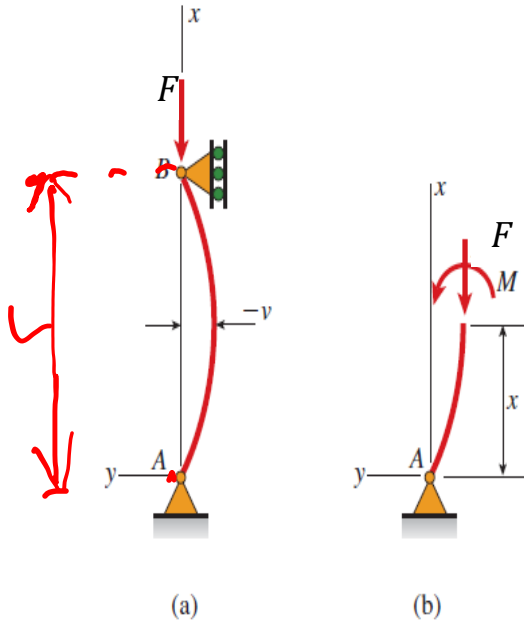


<https://www.youtube.com/watch?v=jNwvub8718o>

# Flambage

## Faible coefficient d'élanement

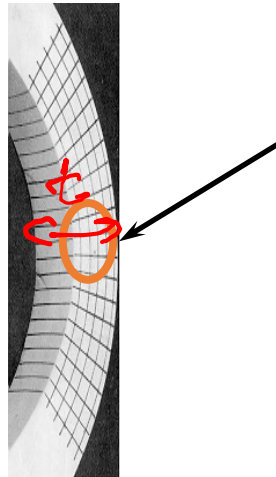
- Contrainte  $\sigma(x, y)$  = dans une poutre qui se plie soumise à une force axiale  $F$



$$M(x) = -Fw(x)$$

$$\sigma_{courbure}(x, y) = \frac{Fw(x)}{I}(y - y_0)$$

$$\sigma_{comp,Max,courbure} = \frac{Ft}{2I}w(x)$$



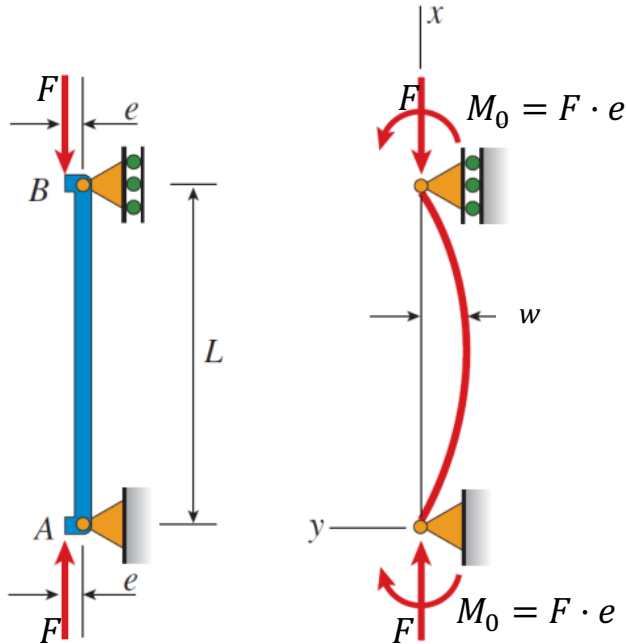
Si  $t/l$  est grand, défaillance par déformation plastique car forte contrainte due à la courbure.

## Semaine 10b – partie 4

### Objectifs d'apprentissage de cette partie

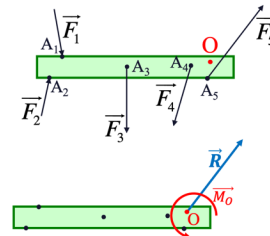
- Calculer la contrainte max dans une poutre avec charges excentriques

# Flambage avec des charges excentriques



- Jusqu'à présent, la force/charge passait par le centroïde de la poutre
- Mais en pratique, la charge est souvent décalée de cet axe : chargement excentrique. Décalage  $e$
- Nous pouvons modéliser l'excentricité avec une **charge axiale  $F$**  et un **moment  $M_0$  au support au point B**
  - Force externe en B:  $F = F$
  - Moment externe en B:  $M_0 = F \cdot e$

Tout ensemble de forces peut être réduit à 2 éléments



Force Résultante (en O)

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$$

et

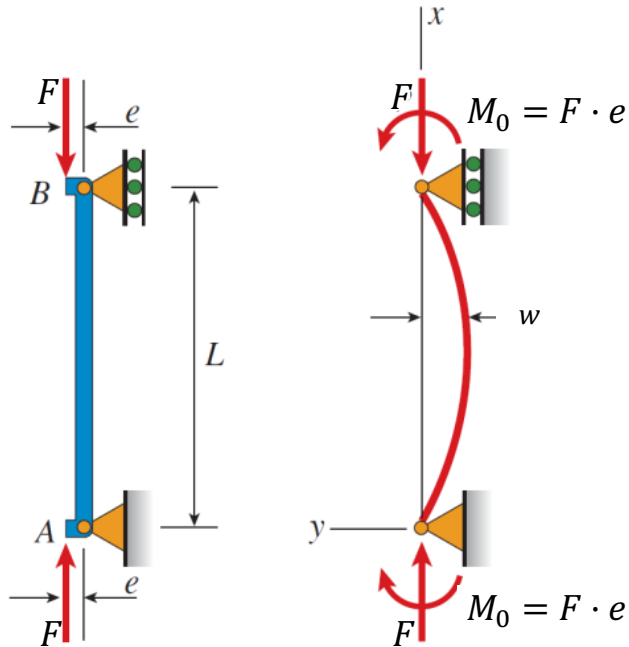
$$\vec{M}_O = \sum (\vec{OA}_i \times \vec{F}_i)$$

(ce moment dépend du choix de O)

Le choix du point O est arbitraire  
**Mais attention:  $\vec{M}_O$  dépend de O !**

# Flambage

## Charges excentriques



Avec une charge excentrique, la poutre se déforme même sous de petites charges (car moments externes non-nuls aux deux extrémités)

Moment de flexion  $M_z(x)$  dans la poutre

$$M_z(x) = \underbrace{F \cdot e}_{\text{external moment}} - Fw(x)$$

Equation différentielle inhomogène:

$$EI \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = M_z(x)$$

$$\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} + \frac{F}{EI} w(x) = \frac{F}{EI} e$$

# Flambage

## Charges excentriques

- Flèche, une fois l'équation résolue:

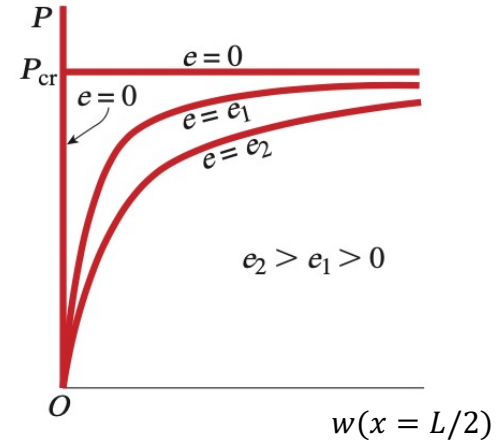
$$w(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right) + e$$

- Conditions aux bords pour trouver  $C_1$  et  $C_2$ :

$$w(x=0) = 0$$

$$w(x=L) = 0$$

$$w(x) = -e \left( \tan\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} \frac{L}{2}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right) - 1 \right)$$



Si  $e = 0$  on a

$$w(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right)$$

ou  $w(x) = 0$

# Flambage avec charge excentrique

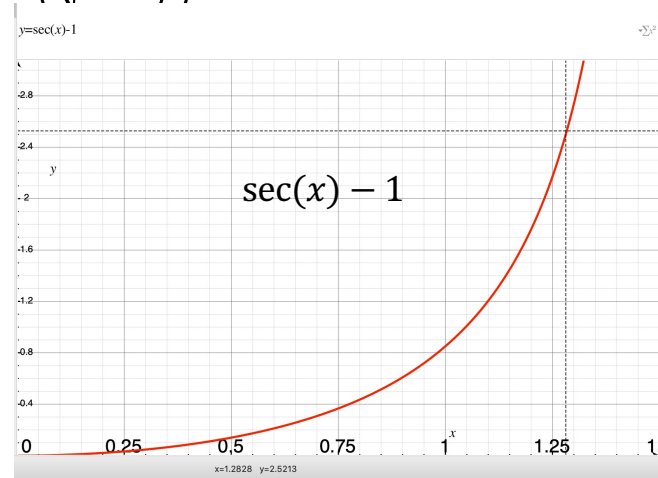
formule secant (1/cos)

- La flèche maximale de cette poutre est au milieu (à  $x = L/2$ ).
- C'est à ce point, **avant le flambage**, que le moment interne et la flèche sont maximaux, pour un F donné:

$$|w|_{max} = \left| w \left( \frac{L}{2} \right) \right| = e \left( -1 + \cos \left( \sqrt{\frac{F L}{EI}} \frac{L}{2} \right) + \tan \left( \sqrt{\frac{F L}{EI}} \frac{L}{2} \right) \sin \left( \sqrt{\frac{F L}{EI}} \frac{L}{2} \right) \right) =$$

$$= e \left( \frac{1}{\cos \left( \sqrt{\frac{F L}{EI}} \frac{L}{2} \right)} - 1 \right)$$

$$|w|_{max} = e \left( \sec \left( \sqrt{\frac{F L}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right)$$



(Si  $e = 0$ , on retombe sur  $w = 0$ )

$$\sec(x) = 1/\cos(x)$$

# Flambage avec charge excentrique

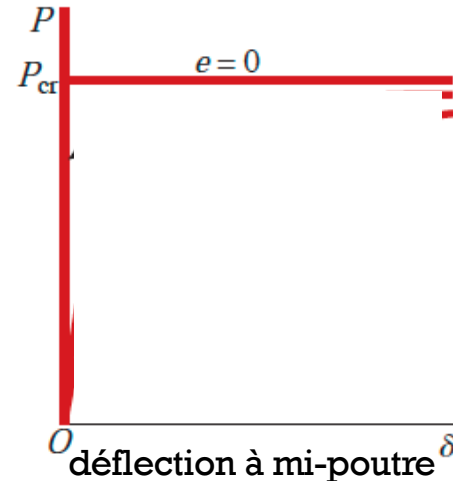
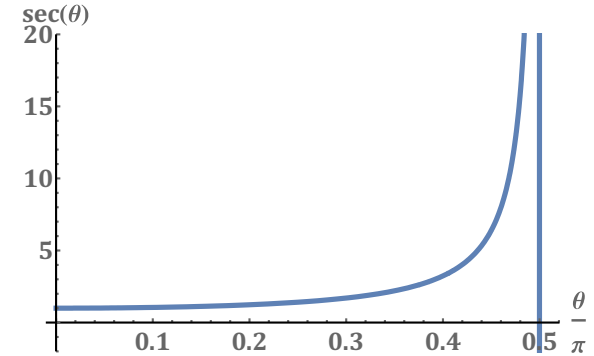
$$|w|_{max} = e \left( \sec \left( \sqrt{\frac{F L}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right)$$

- la fonction  $\sec(\theta)$  tend vers l'infini pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$
- Cela détermine une valeur critique de la charge où  $w(x)$  serait « infini »:

$$\alpha = \sqrt{\frac{F_{crit} L}{EI}} = \frac{\pi}{2}$$

$$F_{crit} = \pi^2 \frac{EI}{L^2}$$

c'est le même  $F_{crit}$  que charge non-excentrique!  
mais la déflexion commence pour tout  $F > 0$



# Flambage avec charge excentrique

Quelle est la Contrainte maximale?

- Moment de flexion :  $M_z(x) = F \cdot e - Fw(x)$

$$|w|_{max} = e \left( \sec \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right)$$

$$M_{max} = Fe + F|w|_{max}$$

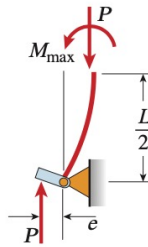
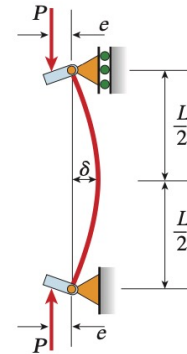
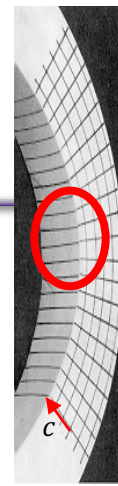
$$M_{max} = F \cdot e \sec \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} \frac{L}{2} \right) = F e \sec \left( \sqrt{\frac{F}{F_{crit}}} \frac{\pi}{2} \right)$$

- Contrainte maximum est **compressive**:

$$\sigma_{max} = -\frac{F}{A} - \frac{M_{max} \cdot c}{I}$$

rappel:  $c$  est la distance maximale à l'axe neutre (en  $y$ ).

$$\sigma_{max} = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{A}{I} e \cdot c \cdot \sec \left( \sqrt{\frac{F}{F_{crit}}} \frac{\pi}{2} \right) \right)$$



$|\sigma_{max,compression}| > |\sigma_{max,traction}|$  car force axiale compressive

# Flambage avec charge excentrique

(comparer à slide 25)

- Contrainte compressive maximum (côté concave) exprimée en fonction du rayon de giration  $r$  en fonction de charge  $F$

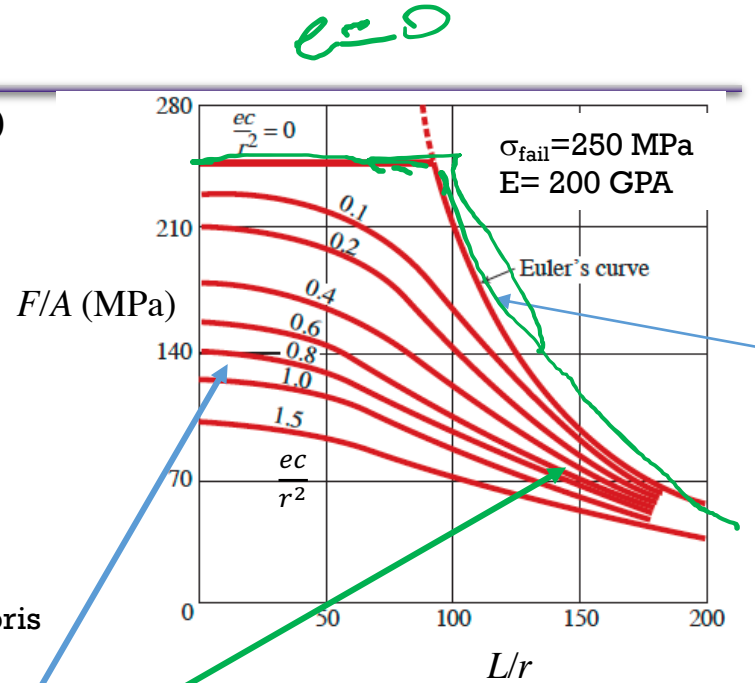
$$r^2 = \frac{I}{A}$$

$$\sigma_{max} = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left( \sqrt{\frac{F}{EA}} \frac{L}{2r} \right) \right)$$

où  $\frac{ec}{r^2}$  est le rapport d'excentricité, typiquement compris entre 0 et 3, mais souvent < 1.

La charge excentrique a un effet relatif plus prononcé sur les poutres peu élancées.

La contrainte maximum (la charge externe max avant défaillance) décroît quand  $L/r$  augmente



$$\begin{aligned} \sigma_{crit, e=0} &= \pi^2 \frac{EI}{AL^2} \\ &= \pi^2 \frac{E}{(L/r)^2} \end{aligned}$$

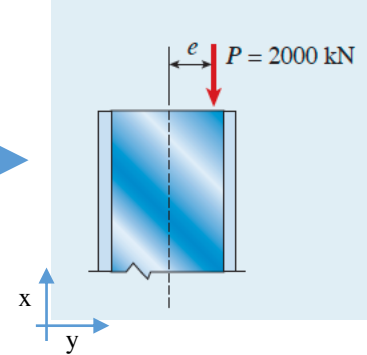
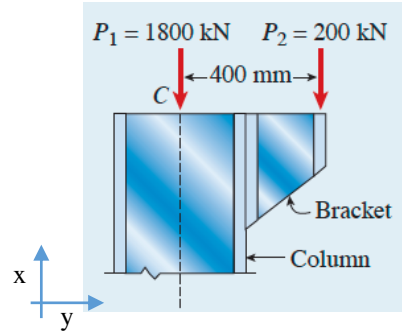
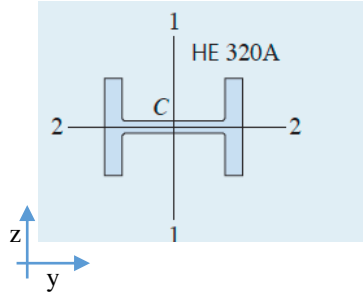
courbes avec  $\sigma_{max} = \sigma_{fail}$

La charge  $F$  doit être choisie pour être en-dessous de la ligne rouge



# Exemple charge excentrique

Trouver la contrainte compressive maximum dans cette poutre pour la charge imposée



On trouve  $e$  qui donne le même moment des forces en C que les 2 forces

Une poutre en acier de longueur 7,5 m.

On trouve les valeurs de géométrie dans des tableaux pour une poutre H 320A

$$A = 124.4 \text{ cm}^2 \quad r = 13.58 \text{ cm} \quad c = \frac{310 \text{ mm}}{2} = 155 \text{ mm}$$

On applique la formule

$$\sigma_{max} = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left( \sqrt{\frac{F}{EA} \frac{L}{2r}} \right) \right) = 236 \text{ MPa}$$

Et on compare au limite pour le matériau (mais c'est une grande contrainte)

- 
- **Les longues poutres avec un grands  $L/r$  : flambage à faible contrainte**
  - **Les courtes poutres avec un faible  $L/r$  : défaillance par rupture du matériau**
  - **Les poutres intermédiaires: défaillance par flambage plastique**

# PROGRAMME DU COURS, semaines 6-10

---

6	14.10	Forces internes dans les poutres non-déformées	x	
6	16.10	$\varepsilon(y)$ et $\sigma(y)$ en flexion pure. Moment d'inertie	x	Série 6
7	28.10	Poutres chargées axialement. Poutres composites	x	Série 6
7	30.10	Quiz + Session questions & réponses D. Briand		Série 1-5
8	04.11	Examen mi-semester D. Briand		
8	06.11	Flèches des poutres	x	Série 7
9	11.11	Flèche pour guidage flexible	x	Série 8
9	13.11	Poutres statiquement indéterminées	x	Série 8
10	18.11	Poutres statiquement indéterminées. Flambage	x	Séries 9
10	20.11	Flambage	x	Série 10

- 
- Fin de la matière avec Dimitrios Karampinos
  - Vous pouvez me poser des questions par mail ([Dimitrios.Karampinos@epfl.ch](mailto:Dimitrios.Karampinos@epfl.ch)) , ou prendre rdv pour parler sur zoom (avec moi ou un assistant). Svp n'hésitez pas!
  - Bon courage pour la fin du semestre!