

Exercice VII.1

Soit le système en représentation d'état

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 3x_2 + u.\end{aligned}$$

Déterminer la solution P de l'équation de Lyapunov

$$A^T P + P A = -I.$$

Construire une sortie y (de dimension un) tel que le système résultant soit passif et calculer la fonction de transfert résultante. Vérifier la position des pôles et des zéros ainsi que le degré relatif résultant.

En procédant directement en posant

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$$

et en développant $A^T P + P A$, on aboutit au système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{aligned}1 - 2p_{12} &= 0 \\ p_{11} - 3p_{12} - p_{22} &= 0 \\ 1 + 2p_{12} - 6p_{22} &= 0\end{aligned}$$

ce qui donne $p_{11} = \frac{11}{6}$, $p_{12} = \frac{1}{2}$ et $p_{22} = \frac{1}{3}$.

Pour trouver une sortie telle que le système résultant soit passif, on applique le théorème de Kalman-Yakubovich-Popov (Th. 5.22 du livre en page 165). La sortie $y = Cx$ sera celle pour laquelle la matrice C satisfait l'équation $PB = C^T$. Autrement dit, en posant $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

et donc la sortie $y = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2$ garantit la passivité du système résultant.

Il reste à vérifier la position des pôles et des zéros, ainsi que le degré relatif ne dépasse pas un. Pour cela, calculons simplement la fonction de transfert :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} s & -1 \\ 1 & 3+s \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) = \frac{\frac{1}{3}s + \frac{1}{2}}{s^2 + 3s + 1}$$

Le degré relatif est bien de 1. Le zéro est $z = -\frac{3}{2}$ qui est dans le demi-plan gauche du plan complexe et les deux pôles $p_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ ($p_1 \approx -2.61$ et $p_2 \approx -0.38$) sont dans le demi-plan gauche. Toutes les conditions nécessaires sont vérifiées.

Exercice VII.2

Soit la fonction de transfert

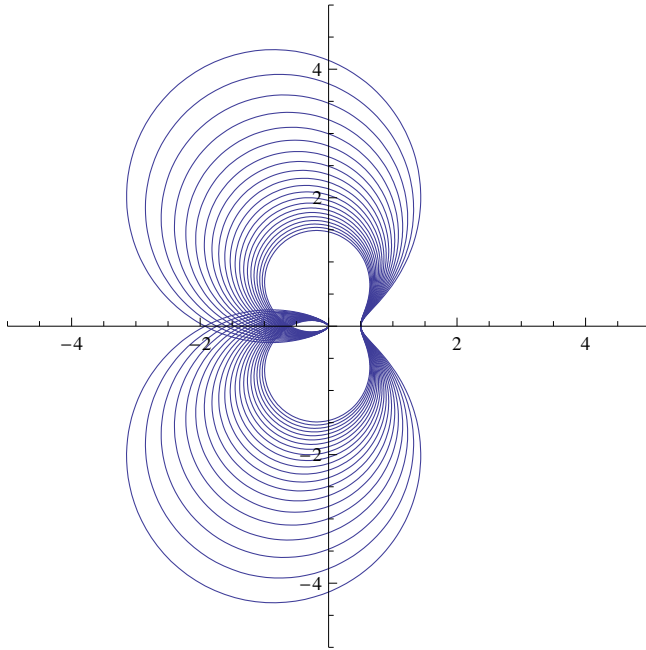
$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s^2+as+b)}$$

Trouver le plus grand secteur $[k_1; k_2]$ tel que le système soit stable au sens absolu du paragraphe 5.9; ceci signifie que la fonction de transfert $G(s)$, bouclée par une non-linéarité statique ϕ telle que $k_1 y^2 \leq \phi(y)y \leq k_2 y^2$ pour tout y , demeure stable quelle que soit cette non-linéarité.

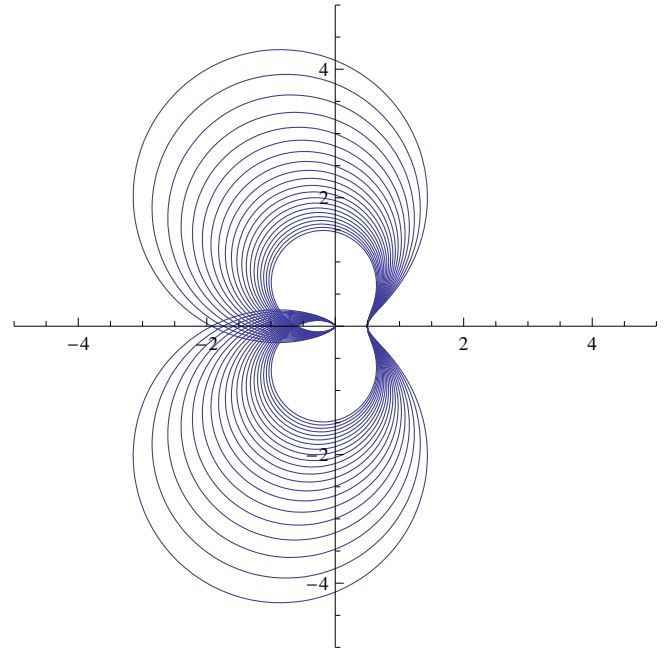
Fabriquer quelques unes de telles non-linéarités et simuler les systèmes résultants pour $a = 0.1$ et $b = 1$. Essayer alors quelques non-linéarités qui sortent du secteur et, en simulation, vérifier ce qu'il se passe.

Pour la première partie de la question, on va dans un premier temps essayer de contenir la droite de pente $k_1 = 0$ dans le secteur. Cela n'est possible que si les pôles de la fonctions de transfert soient à partie réelle strictement plus petite que zéro.

Quelques représentations graphiques en faisant varier a et b de manière indépendante sont représentées ci-dessous.



le paramètre a varie



le paramètre b varie

Toutes les réponses harmonique ont la même forme. On constate qu'un droite verticale limite celle-ci sur la gauche. Elle correspond à la pente maximale du secteur recherché. On peut inscrire également toute la réponse harmonique à l'intérieur d'un cercle. Ceci aura deux conséquences. D'une part, on tolère ainsi un retour avec gain positif (pente négative pour la limite inférieur du secteur). D'autre part on aura une limite du secteur inférieur à la pente déterminée par la droite verticale décrite ci-dessus. Ainsi, pour ne pas sacrifier sur cette pente maximale, on est obligé de ne pas tolérer de retour avec gain positif. Sous ces conditions, on ne peut donc pas inscrire la réponse harmonique à l'intérieur d'un cercle. Pour calculer la pente limite supérieur du secteur, il faut calculer la droite verticale la plus à gauche possible qui sépare le plan complexe de telle sorte que toute la réponse harmonique se situe dans le demi-plan droit ainsi constitué.

$$G(j\omega) = \frac{1}{(4 + \omega^2)(b^2 + a^2\omega^2 - 2b\omega^2 + \omega^4)}$$

La dérivé de la partie réelle est nulle au point de tangence verticale (au point d'intersection entre la droite verticale et la réponse harmonique).

Ainsi la condition est

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \frac{-a\omega^2 + 2b\omega - 2\omega^2}{(4 + \omega^2)(b^2 + a^2\omega^2 - 2b\omega^2 + \omega^4)} = 0$$

Ceci conduit à l'annulation du polynôme en ω suivant

$$(8 + 4a)\omega^6 + (16 + 8a + 4a^2 + 2a^3 - 20b - 4ab)\omega^4 + (-32b - 8a^2b + 16b^2)\omega^2 \dots \\ \dots - 16a^2b + 16b^2 - 8ab^2 - 4b^3 = 0$$

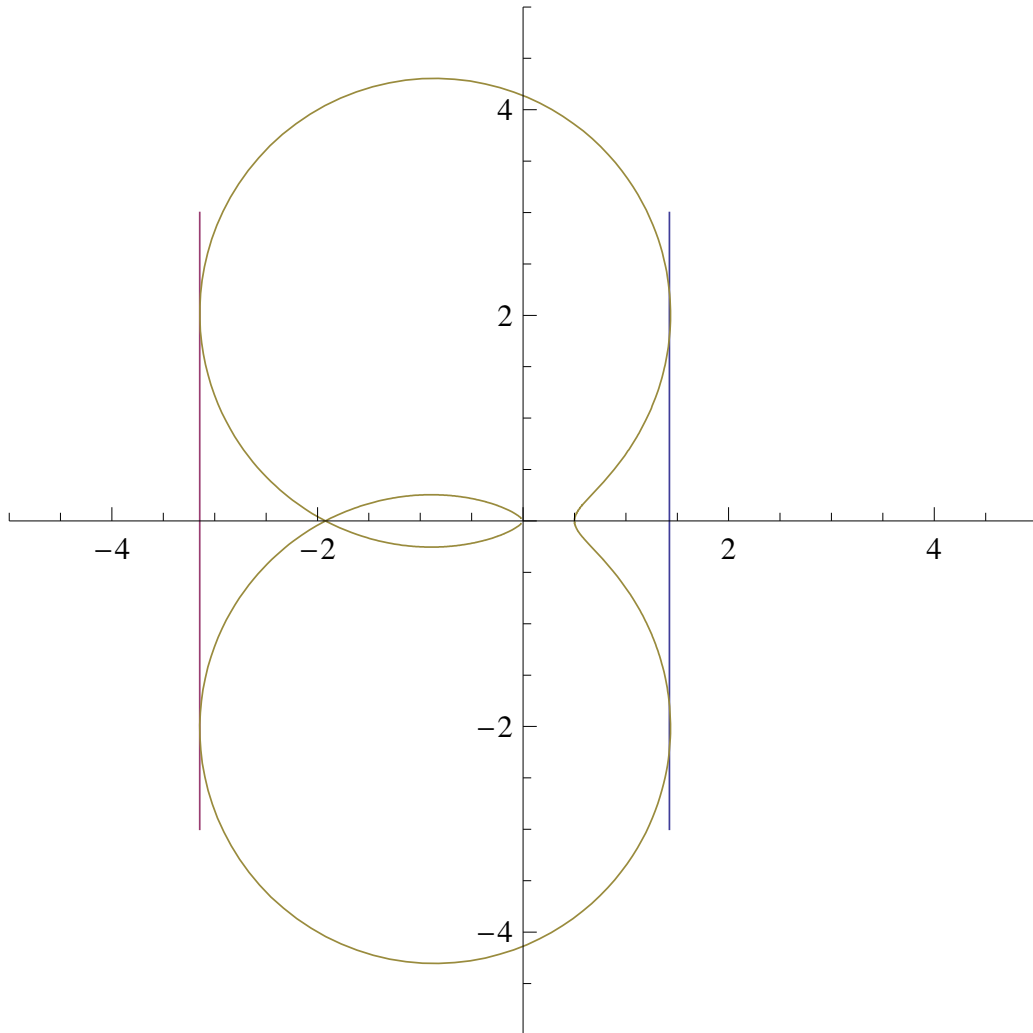
qui devient un polynôme d'ordre 3 en ν lorsqu'on pose

$$\nu = \omega^2$$

On obtient, pour le cas numérique $a = 0.1$ et $b = 1$, deux solutions :

$$\begin{array}{ll} \nu = 1.05958 & G(j\sqrt{\nu}) = -3.14539 \\ \nu = 0.840231 & G(j\sqrt{\nu}) = 1.43413 \end{array}$$

La première solution correspond à la droite verticale cherchée. La seconde droite est la droite verticale qui limite la réponse harmonique sur la droite :

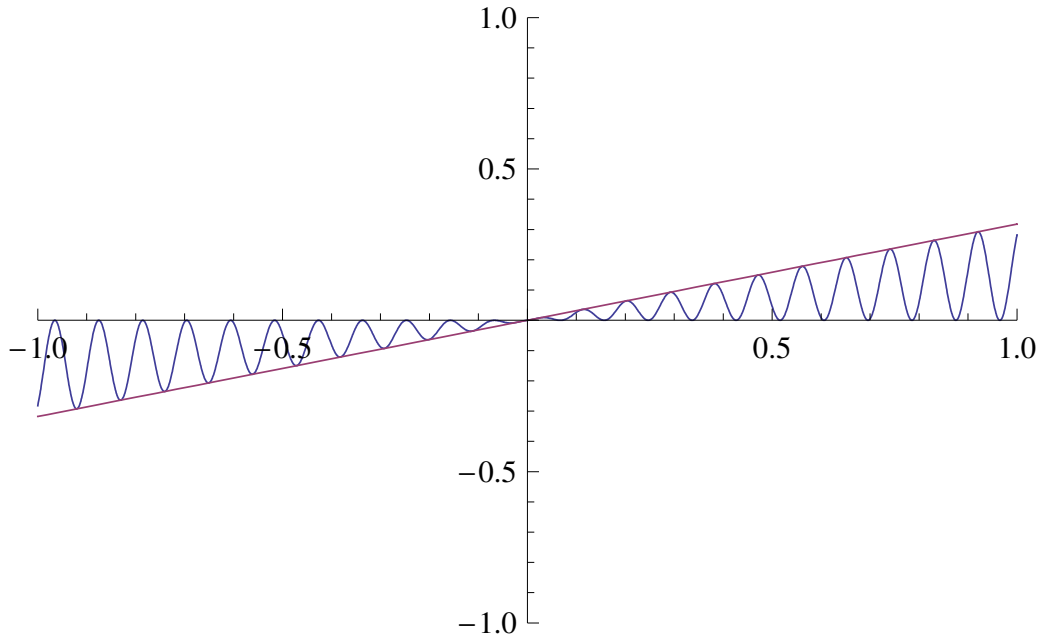


Puisque l'abscisse de la droite verticale est -3.14539 , la pente maximale du secteur est de $k_2 = \frac{1}{3.14539}$ et $k_1 = 0$.

Une non-linéarité possible qui soit comprise dans le secteur envisagé est

$$\phi(y) = \sin(70y) \left| \frac{1}{2 \cdot 3.14539} y \right| + \frac{1}{2 \cdot 3.14539} y$$

qui est représentée (avec le secteur $[k_1; k_2]$) ci-dessous.



Un résultat de simulation confirme la stabilité en boucle fermée (bien que localement la dérivée de la non-linéarité sorte complètement du secteur envisagé) :

