Commande non linéaire

STI - Master

Série VI

Dr. Ph. Müllhaupt

Exercice VI.1

Soit le système masse ressort avec amortissement des séries IV et V. Une force qui agit sur la masse est l'entrée du système.

1. En considérant la fonction d'énergie comme fonction de stockage, déterminer une sortie qui rende le système passif (au sens de la théorie des systèmes présentée au cours).
2. Soit un deuxième système masse ressort de même structure que le précédent. Donner un montage en rétroaction qui assure la passivité de l'ensemble des deux systèmes masse-ressort.
3. Calculer la fonction de transfert résultante avant rétroaction et après rétroaction. Examiner la position des pôles et zéros et dessiner le diagramme de Nyquist et Bode pour le cas numérique $k = m = 1$, $b = 0.1$ (utiliser l'ordinateur pour le tracé).

Les équations de la dynamique sont avec $x_1 = x$ et $x_2 = \dot{x}$ et $u = F$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{u}{m} \end{aligned} \tag{1}$$

1. La fonction d'énergie est $V = \frac{1}{2}m\dot{x} + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mx_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$. En dérivant celle-ci,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= m\,x_2\,\dot{x}_2 + k\,x_1\,\dot{x}_1 = \\ &= m\,x_2\left(-\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{u}{m}\right) + k\,x_1x_2 \\ &= -k\,x_1x_2 - b\,x_2^2 + x_2\,u + k\,x_1x_2 \\ &= u\,x_2 - b\,x_2^2 \end{aligned}$$

   En comparant avec la définition différentielle de la passivité $\dot{V} = u\,y - g(x)$, on arrive à la conclusion que le système est passif si la sortie est choisie $y = x_2$ et le terme dissipatif $g(x) = bx_2^2 \geq 0$.

2. Soit le deuxième système masse-ressort avec les équations

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\frac{k}{m}z_1 - \frac{b}{m}z_2 + \frac{v}{m} \end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned} v &= x_2 \\ u &= -z_2 + u_c \end{aligned}$$

avec u_c la nouvelle entrée et $y_c = x_2$ la sortie du nouveau système, on a un système passif avec la fonction de stockage

$$V = \frac{1}{2}m(x_2^2 + z_2^2) + \frac{1}{2}k(x_1^2 + z_1^2)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= mx_2\left(-\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u\right) + mz_2\left(-\frac{k}{m}z_1 - \frac{b}{m}z_2 + \frac{1}{m}v\right) \\ &\quad +k\,x_1x_2 + k\,z_1z_2 \\ &= -bx_2^2 - bz_2^2 + x_2u + z_2v \\ &= -b(x_2^2 + z_2^2) + x_2(-z_2 + u_c) + z_2x_2 \\ &= -b(x_2^2 + z_2^2) + x_2u_c \end{aligned}$$

on a bien un système passif avec le terme dissipatif $g(x) = b(x_2^2 + z_2^2) \geq 0$ et le couple entrée u_c et sortie $y_c = x_2$.

3. En posant

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

la fonction de transfert d'un système masse-ressort isolé est

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\frac{1}{m}s}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \end{aligned}$$

On constate que cette fonction de transfert n'a pas de zéro dans le demi-plan droit du plan complexe, mais un seul zéro à l'origine. Elle est strictement stable car $b > 0$ et $k > 0$ et son degré relatif est de 1.

L'assemblage en rétroaction négative a la fonction de transfert

$$
\begin{aligned}
G_{cl} &= \frac{G}{1+G^2} \\
&= \frac{\frac{s}{m}}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}} \frac{1}{1+\frac{\frac{s^2}{m^2}}{s^4+\frac{2b}{m}s^3+\left(\frac{b^2}{m^2}+\frac{2k}{m}\right)s^2+\frac{2bk}{m^2}s+\frac{k^2}{m^2}}} \\
&= \frac{s}{m}\frac{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}}{s^4+\frac{2b}{m}s^3+\left(\frac{b^2}{m^2}+\frac{2k}{m}+\frac{1}{m^2}\right)s^2+\frac{2bk}{m^2}s+\frac{k^2}{m^2}} \\
&= \frac{s^3+0.1s^2+s}{s^4+0.2s^3+3.01s^2+0.2s+1}
\end{aligned}
$$

Les zéros :

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 0 \\
z_2 &= -0.05+0.9975\,j \\
z_3 &= -0.05-0.9975\,j
\end{aligned}
$$

Les pôles

$$
\begin{aligned}
-7.2379\times 10^{-2}+1.6171\,j \\
-7.2379\times 10^{-2}-1.6171\,j \\
-2.7621\times 10^{-2}+0.61714\,j \\
-2.7621\times 10^{-2}+0.61714\,j
\end{aligned}
$$

Exercice VI.2

Soit le système en représentation d'état

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -x_1-3x_2+u.
\end{aligned}
$$

Déterminer la solution P de l'équation de Lyapunov

$$A^TP+PA=-I.$$

Construire une sortie y (de dimension un) tel que le système résultant soit passif et calculer la fonction de transfert résultante. Vérifier la position des pôles et des zéros ainsi que le degré relatif résultant.

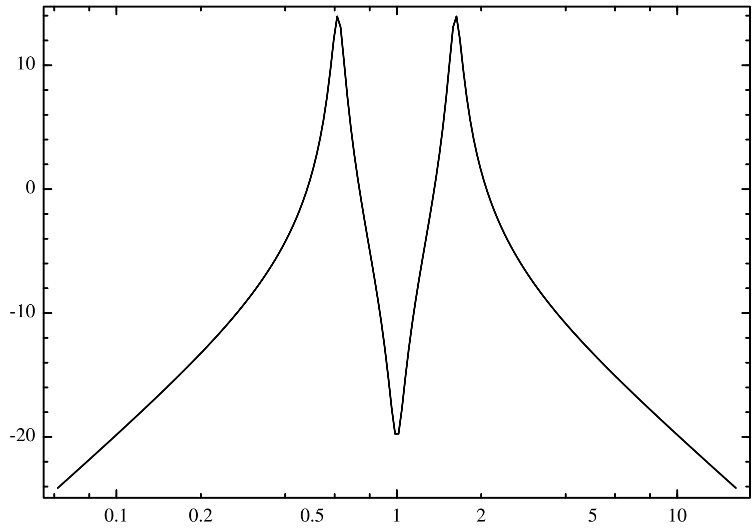

Figure 1 – Diagramme de Bode en amplitude $\log_{10} \|G_{cl}(j\omega)\|$ en fonction de ω en échelle logarithmique.

En procédant directement en posant

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$$

et en développant $A^T P + PA$, on aboutit au système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{aligned} 1 - 2p_{12} &= 0 \\ p_{11} - 3p_{12} - p_{22} &= 0 \\ 1 + 2p_{12} - 6p_{22} &= 0 \end{aligned}$$

ce qui donne $p_{11} = \frac{11}{6}$, $p_{12} = \frac{1}{2}$ et $p_{22} = \frac{1}{3}$.

Pour trouver une sortie telle que le système résultant soit passif, on applique le théorème de Kalman-Yakubovich-Popov (Th. 5.22 du livre en page 165). La sortie $y = Cx$ sera celle pour laquelle la matrice C satisfait l'équation $PB = C^T$. Autrement dit, en posant $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

et donc la sortie $y = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2$ garantit la passivité du système résultant.

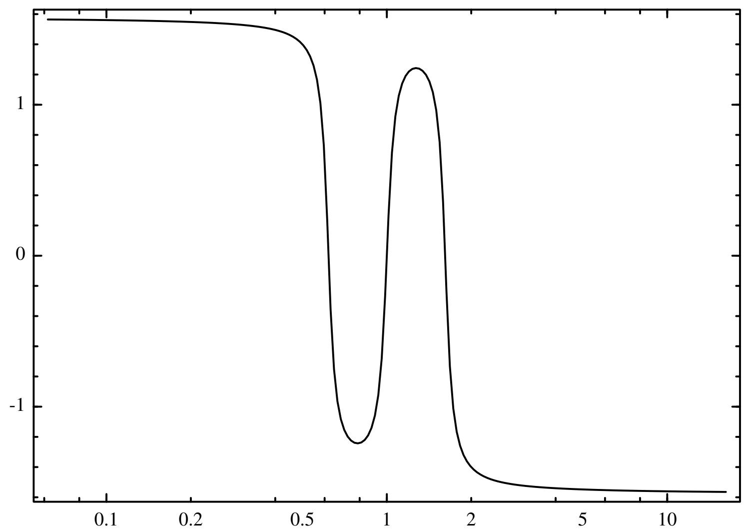

Figure 2 – Diagramme de Bode de la phase de $G_{cl}(j\omega)$ en fontion de ω en échelle logarithmique. La phase est bien comprise entre $-\frac{\pi}{2} = -1.570796$ et $+\frac{\pi}{2} = 1.570796$.

Il reste à vérifier la position des pôles et des zéros, ainsi que le degré relatif ne dépasse pas un. Pour cela, calculons simplement la fonction de transfert :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & 3+s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\frac{1}{3}s + \frac{1}{2}}{s^2 + 3s + 1}$$

Le degré relatif est bien de 1. Le zéro est $z = -\frac{3}{2}$ qui est dans le demi-plan gauche du plan complexe et les deux pôles $p_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ ($p_1 \approx -2.61$ et $p_2 \approx -0.38$) sont dans le demi-plan gauche. Toutes les conditions nécessaires sont vérifiées.

Exercice VI.3

Soit le système sous la forme générale

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

avec une entrée bien spécifique et satisfaisant, en absence d'entrée, à une équation de Lyapunov

$$A^T P + PA = -Q$$

Déterminer la condition sur la sortie $y = Cx$ pour que le système soit passif.

Vérifier que les résultats des deux exercices précédents se conforment à cette théorie.

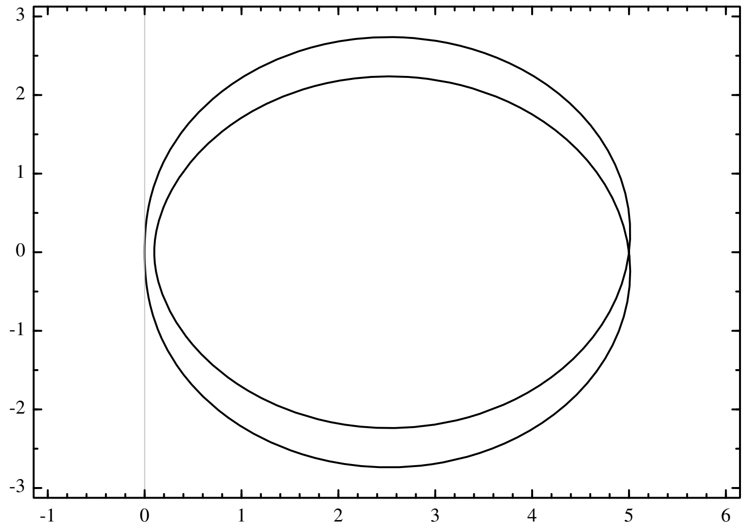

Figure 3 – Diagramme de Nyquist de $G_{cl}(j\omega)$. La réponse harmonique est bien dans le demi-plan droit.

Prenons comme fonction de stockage la fonction de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}x^T P x$$

En dérivant celle-ci,

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{1}{2}\dot{x}^T P x + \frac{1}{2}x^T P \dot{x} \\
&= \frac{1}{2}(Ax + Bu)^T P x + \frac{1}{2}x^T P(Ax + Bu) \\
&= \frac{1}{2}x^T(A^T P + PA)x + \frac{1}{2}u^T B^T P x + \frac{1}{2}x^T P B u \\
&= -\frac{1}{2}x^T Q x + \frac{1}{2}u^T B^T P x + \frac{1}{2}x^T P B u
\end{aligned}$$

Les deux derniers termes sont identiques, car ce sont des scalaires et donc chacun est égal aussi à sa transposée autrement dit pour l'avant dernier terme

$$(u^T B^T P x)^T = x^T P B u$$

(car $P^T = P$). Ainsi,

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}x^T Q x + x^T P B u$$

et on aurait un système passif si $y^T = x^T PB$, c.-à-d. lorsque $y = Cx$ avec

$$C = PB^T$$

On constate que ceci était le cas avec les deux exercices VI.1 et VI.2. Par exemple, on avait

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on a bien $PB = C^T$ et pour VI.2,

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} \frac{11}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et également $PB = C^T$.