

# Méthode des éléments finis

Généralisation du problème modèle de la barre en traction

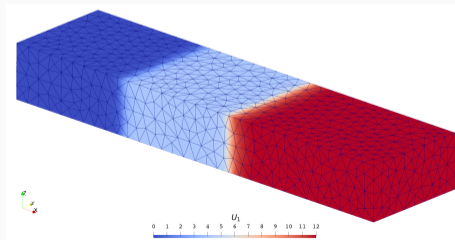
---

ME-372 Méthode des éléments finis

2025-2026

François Gallaire

Stefano Burzio



## Plan

- Résumé de la semaine 5
- Modifications du problème modèle
- Formulations forte et faible du problème
- Conditions aux limites particulières
- Discrétisation basée sur la méthode des éléments finis
- Exemple d'application : barre encastree comportant des discontinuités

## Références bibliographiques

- ① T. Gmür, Méthode des éléments finis (§§ 3.1 – §§ 3.3.3)

## Résumé de la semaine 5

---

# Quadrature de Gauss-Legendre

- Les intégrales des matrices et vecteurs élémentaires ( ${}^e\mathbf{K}$ ,  ${}^e\mathbf{r}$ ) sont évaluées numériquement en utilisant la **quadrature de Gauss-Legendre** :

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^r \omega_i f(\xi_i)$$

où  $\xi_i$  et  $\omega_i$  sont les points et poids de Gauss.

r	Points de Gauss $\xi_i$	Poids de Gauss $\omega_i$	Précision
1	0	2	ordre 1
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	ordre 3
3	$0, \pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{8}{9}, \frac{5}{9}, \frac{5}{9}$	ordre 5

- L'intégration est exacte si  $f$  est un **polynôme de degré**  $\leq 2r - 1$ .

# Estimations d'erreur a priori avec des fonctions de base linéaires

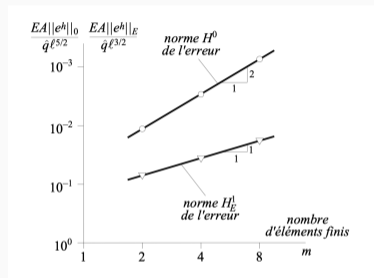
Soit  $e^h = u - u^h$  l'erreur et  $h$  la taille caractéristique du maillage ( $h = \max_e e \ell$ ).

**Convergence des déplacements :**

$$\|e^h\|_0 \leq C_0 h^2$$

**Convergence des contraintes :**

$$\|e^h\|_E \leq C_E h$$



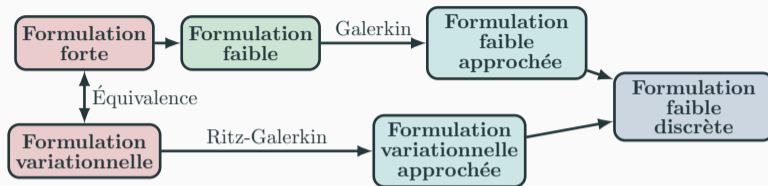
$$\|e^h\|_0 = \left( \int_0^\ell (e^h)^2 dx \right)^{1/2}$$

Norme euclidienne de l'erreur ou norme  $L^2$

$$\|e^h\|_E = \left( \int_0^\ell \left( \frac{de^h}{dx} \right)^2 dx \right)^{1/2}$$

Norme de l'énergie de déformation

# Formulation variationnelle



## Minimization de l'énergie potentielle totale

$$J(w) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^\ell EA \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx}_{\text{Énergie de déformation interne}} - \underbrace{\left[ \int_0^\ell qw dx + Pw(\ell) \right]}_{\text{Travail des forces externes}}$$

Sous-estimation des déplacements et surestimation de la rigidité

# Modifications du problème modèle

---

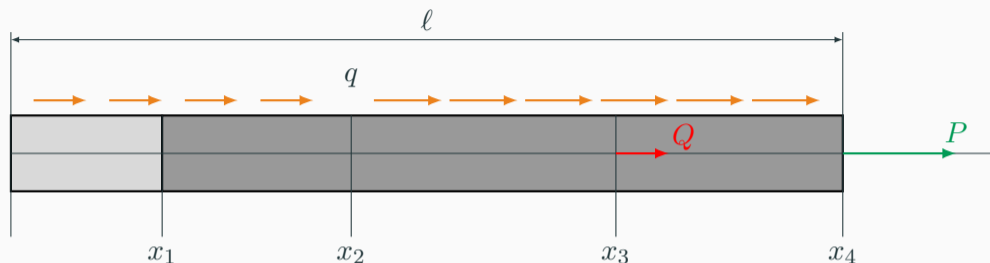
## Insertion d'une discontinuité matérielle



- **Discontinuité du module d'élasticité  $E$  en  $x_1$  :**

$$E(x) = \begin{cases} E_1 & 0 < x < x_1 \\ E_2 & x_1 < x < \ell \end{cases}$$

## Insertion de deux discontinuités de charges

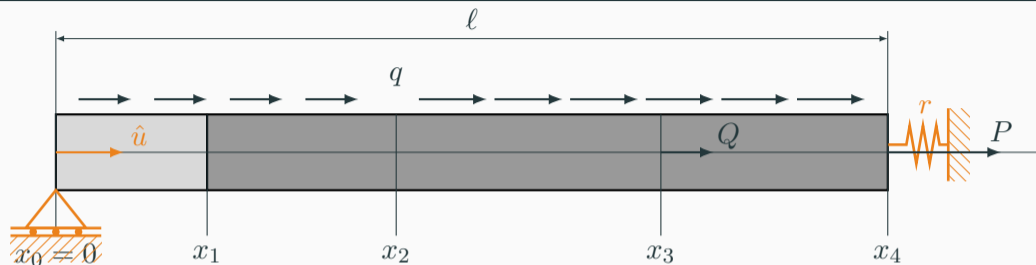


- **Discontinuité de la charge répartie  $q$  en  $x_2$  :**

$$q(x) = \begin{cases} q_1 & 0 < x < x_2 \\ q_2 & x_2 < x < \ell \end{cases}$$

- **Ajout d'une force ponctuelle  $Q$  en  $x_3$ .**
- **Force ponctuelle  $P$  en  $x_4 = \ell$ .**

# Modification des conditions aux limites



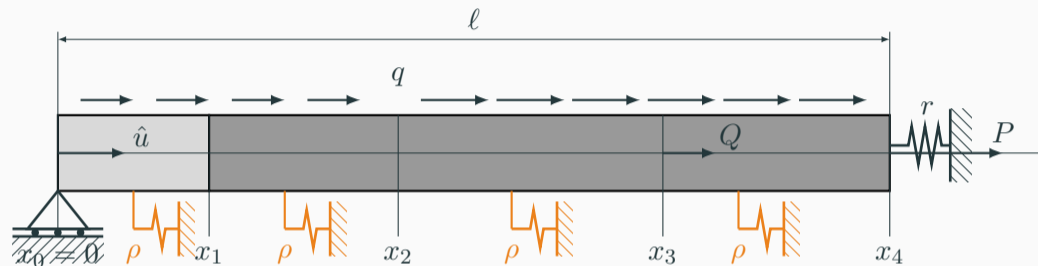
- **Condition essentielle en  $x_0 = 0$  non homogène :**

$$u(0) = \hat{u}$$

- **Condition naturelle mixte en  $x_4 = \ell$  :** force proportionnelle au déplacement

$$N(\ell) = -ru(\ell) + P \quad \Leftrightarrow \quad EA \frac{du}{dx}(\ell) = -ru(\ell) + P$$

## Modification de l'équation différentielle



Ajout d'une charge axiale proportionnelle au déplacement :

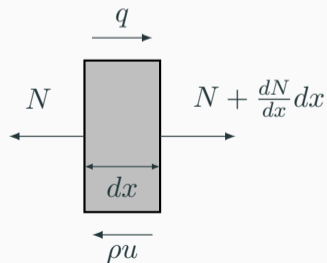
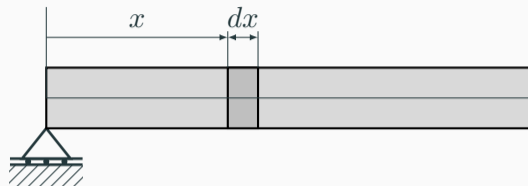
$$-\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) + \rho u = q$$

$\rho$  facteur de proportionnalité.

## Formulation forte du problème

---

# Équilibre des forces axiales



## Equation d'équilibre

Soit  $N$  l'effort intérieure axiale, l'équilibre de la section droite de longueur  $dx$  s'écrit :

$$N + \frac{dN}{dx} dx - N - \rho u dx + q dx = 0$$

$$-\frac{dN}{dx} + \rho u = q$$

# Equation constitutive et linéarité de la déformation

## Loi de Hooke

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

## Linéarité de la déformation

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$$

Où  $\sigma_x$  est la contrainte normale et  $\varepsilon_x$  est la déformation axiale.

## Relation entre l'effort normal $N$ et le déplacement axial $u$

$$N = A \sigma_x = EA \varepsilon_x = EA \frac{du}{dx}$$

## Formulation forte

Trouver la fonction  $u \in C^2([0, \ell])$  telle que :

- les quatre équations différentielles du deuxième ordre soient vérifiées :  
( $j = 1, 2, 3, 4$ )

$$-\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) + \rho u = q \quad \text{dans } I_j = ]x_{j-1}, x_j[,$$

- les six *équations de continuité en déplacement et en contrainte* soient vérifiées en chaque point de discontinuité  $x_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,
- les deux *conditions aux limites* soient vérifiées :

$$u(0) = \hat{u} \quad \text{et} \quad N(\ell) = -ru(\ell) + P$$

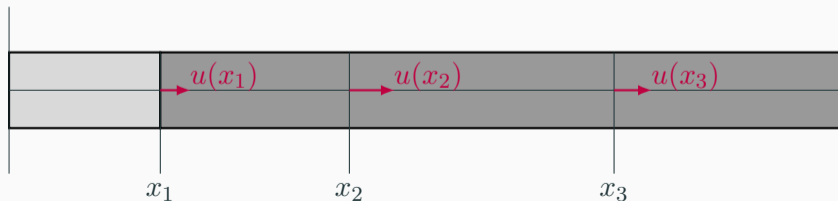
# Équations de continuité en déplacement

En chaque point de discontinuité,  $x_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , il faut que le déplacement soit continu, i.e. que :

$$u(x_j^+) = u(x_j^-)$$

c'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow x_j^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_j^-} u(x).$$



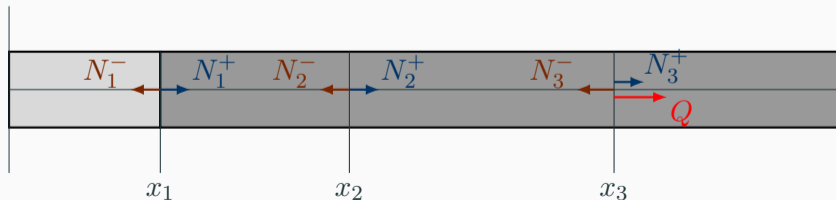
# Équations de continuité en contrainte

En chaque point de discontinuité,  $x_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , il faut que la l'effort intérieur  $N = EA \frac{du}{dx}$  soit continu, i.e. que :

$$N(x_1^+) = N(x_2^-)$$

$$N(x_2^+) = N(x_3^-)$$

$$N(x_3^+) + Q = N(x_3^-)$$



# Exemples de problèmes aux limites à caractère linéaire

Problème physique	Loi de conservation	Variable d'état $u(x)$	Flux $\sigma(x)$	Facteur de proportionnalité $p(x)$	Source $s(x)$	Equation constitutive $\sigma(x) = p(x)\varepsilon(x)$
Déformation d'une barre	Équilibre des forces	Déplacement	Contrainte normale	Module d'élasticité	Force volumique	Loi de Hooke
Conduction thermique dans une barre	Conservation de l'énergie	Température	Flux de chaleur	Conductivité thermique	Source de chaleur	Loi de Fourier
Écoulement d'un fluide	Conservation de la quantité de mouvement	Vitesse	Contrainte tangentielle	Viscosité dynamique	Force volumique	Loi de Stokes
Écoulement dans un milieu poreux	Conservation de la masse	Niveau piézométrique	Flux volumique	Conductivité hydraulique	Taux de recharge uniforme	Loi de Darcy
Électrostatique	Conservation du flux électrique	Potentiel électrique	Flux électrique	Permittivité diélectrique	Charge	Loi de Coulomb

## Formulation faible du problème

---

## Écriture de la forme intégrale par tronçon régulier

- ① Intégrale pondérée de la **fonction résiduelle** sur  $I_j = ]x_{j-1}, x_j[$  :

$$\int_{I_j} R \delta u \, dx = \int_{I_j} \left[ -\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) + \rho u - q \right] \delta u \, dx$$

- ② Intégrale pondérée sur l'ensemble du domaine :

$$\int_0^\ell R \delta u \, dx = \sum_{j=1}^4 \int_{I_j} R \delta u \, dx = 0$$

- ③ Intégration par parties du travail virtuel des forces internes :

$$\int_{I_j} -\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) \delta u \, dx = \int_{I_j} EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} \, dx - \left[ EA \frac{du}{dx} \delta u \right]_{x_{j-1}}^{x_j}$$

- ④ Intégrale pondérée de la fonction résiduelle sur  $I_j = ]x_{j-1}, x_j[$  :

$$\int_{I_j} R \delta u \, dx = \int_{I_j} EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} \, dx + \int_{I_j} (\rho u - q) \delta u \, dx - \left[ N \delta u \right]_{x_{j-1}}^{x_j}$$

## Prise en compte des conditions de continuité

- ⑤ Sommation des formes intégrales partielles,  $\int_0^\ell R \delta u dx = 0$  :

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} + \rho u \delta u dx = \left[ N \delta u \right]_0^{x_1^-} + \left[ N \delta u \right]_{x_1^+}^{x_2^-} + \left[ N \delta u \right]_{x_2^+}^{x_3^-} + \left[ N \delta u \right]_{x_3^+}^\ell + \int_0^\ell q \delta u dx$$

- ⑥ Utilisation des équations de continuité en déplacement et en contrainte :

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} + \rho u \delta u dx = -N(0)\delta u(0) + Q\delta u(x_3) + N(\ell)\delta u(\ell) + \int_0^\ell q \delta u dx$$

## Prise en compte des conditions aux limites

- ⑦ Utilisation de la **condition essentielle non homogène**  $u(0) = \hat{u}$  et imposition d'un déplacement virtuel cinématiquement admissible  $\delta u(0) = 0$  :

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} + \rho u \delta u dx = Q\delta u(x_3) + N(\ell)\delta u(\ell) + \int_0^\ell q\delta u dx$$

- ⑧ Utilisation de la **condition naturelle mixte**  $N(\ell) = -ru(\ell) + P$  :

$$\int_0^\ell \left[ EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} + \rho u \delta u \right] dx + ru(\ell)\delta u(\ell) = Q\delta u(x_3) + P\delta u(\ell) + \int_0^\ell q\delta u dx$$

## Forme faible de l'élastostatique du barreau généralisé

Trouver la fonction  $u \in \mathcal{U}$  telle que pour tout déplacement virtuel  $\delta u \in \mathcal{V}$ , on ait :

$$\int_0^\ell \left[ EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} + \rho u \delta u \right] dx + ru(\ell)\delta u(\ell) = Q\delta u(x_3) + P\delta u(\ell) + \int_0^\ell q\delta u dx$$

Classes des fonctions admissibles :

$$\mathcal{U} = \{u \in H^1(]0, \ell[), u(0) = \hat{u}\}$$

$$\mathcal{V} = \{\delta u \in H^1(]0, \ell[), \delta u(0) = 0\}$$

**Remarque :** les espaces des fonctions admissibles pour le déplacement et le déplacement virtuel sont différents :  $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$ .

## Formulation forte :

- Quatre équations différentielles du deuxième ordre.
- Six équations de continuité en déplacement et en contrainte.
- Deux conditions aux limites.

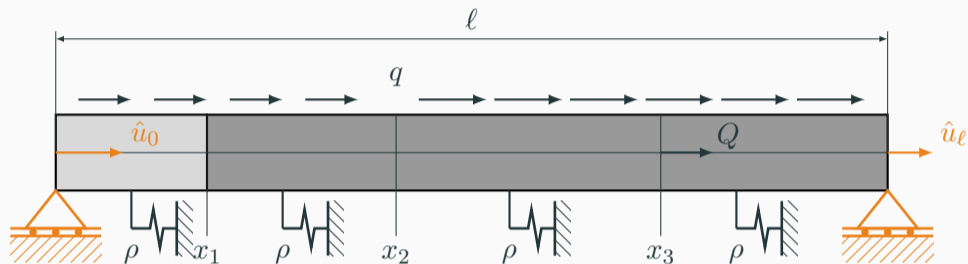
## Formulation faible :

- Une seule équation intégrale.
- Continuité en déplacement et en contrainte implicitement prises en compte.
- Conditions aux limites *naturelles* prises en compte dans l'équation intégrale.
- Conditions aux limites *essentiels* imposées dans la définition de  $\mathcal{U}$  et de  $\mathcal{V}$ .

# Conditions aux limites particulières

---

# Conditions aux limites non homogènes de Dirichlet



**Condition essentielle en  $x = 0$  non homogène :**

$$u(0) = \hat{u}_0$$

**Condition essentielle en  $x = \ell$  non homogène :**

$$u(\ell) = \hat{u}_\ell$$

Les déplacements virtuels cinématiquement admissibles doivent vérifier des **conditions aux limites homogènes** :

$$\delta u(0) = 0 \quad \text{et} \quad \delta u(\ell) = 0.$$

- Adaptation de la forme faible aux nouvelles conditions de bord :

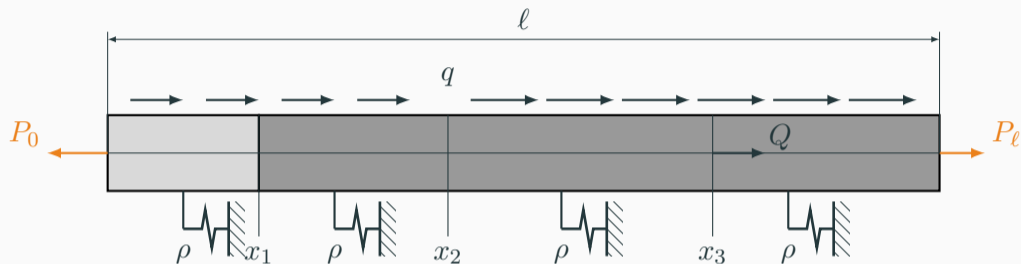
$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} + \rho u \delta u \, dx = Q \delta u(x_3) + \int_0^\ell q \delta u \, dx$$

- Classes des fonctions admissibles modifiées :

$$\mathcal{U} = \{u \in H^1(]0, \ell[), \quad u(0) = \hat{u}_0, \quad u(\ell) = \hat{u}_\ell\}$$

$$\mathcal{V} = \{\delta u \in H^1(]0, \ell[), \quad \delta u(0) = 0, \quad \delta u(\ell) = 0\}$$

# Conditions aux limites non homogènes de Neumann



Condition naturelle en  $x = 0$  homogène :

$$N(0) = P_0 \quad \Leftrightarrow \quad EA \frac{du}{dx}(0) = P_0$$

Condition naturelle en  $x = \ell$  homogène :

$$N(\ell) = P_\ell \quad \Leftrightarrow \quad EA \frac{du}{dx}(\ell) = P_\ell$$

Les déplacements virtuels cinématiquement admissibles doivent vérifier des **conditions aux limites non homogènes** :

$$\delta u(0) \neq 0 \quad \text{et} \quad \delta u(\ell) \neq 0.$$

- Adaptation de la forme faible aux nouvelles conditions de bord :

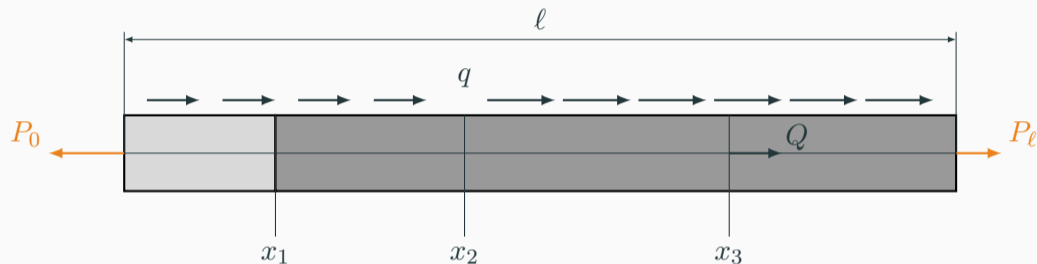
$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} + \rho u \delta u \, dx = Q \delta u(x_3) - P_0 \delta u(0) + P_\ell \delta u(\ell) + \int_0^\ell q \delta u \, dx$$

- Classes des fonctions admissibles modifiées :

$$\mathcal{U} = \{u \in H^1(]0, \ell[)\}$$

$$\mathcal{V} = \{\delta u \in H^1(]0, \ell[)\}$$

# Déplacement de corps rigide



La structure est supposée libre :

- ☞ Pour certaines cas de charge, le déplacement est déterminé à une constante près. Cela correspond à un **déplacement de corps rigide**.

## Déplacement de corps rigide

- Adaptation de la forme faible en l'absence de terme de raideur ( $\rho = 0$ ) :

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} dx = Q\delta u(x_3) - P_0\delta u(0) + P_\ell\delta u(\ell) + \int_0^\ell q\delta u dx$$

- Supposons que la solution de la forme faible soit définie à une constante près (i.e. un déplacement de corps rigide):

$$u(x) \rightarrow u(x) + c$$

$$\delta u(x) \rightarrow \delta u(x) + \delta c$$

La forme faible devient :

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} dx = Q[\delta u(x_3) + \delta c] - P_0[\delta u(0) + \delta c] + P_\ell[\delta u(\ell) + \delta c] + \int_0^\ell q(\delta u + \delta c) dx$$

La forme faible est invariante par translation si et seulement si

$$-P_0 + P_\ell + Q + \int_0^\ell q \, dx = 0$$

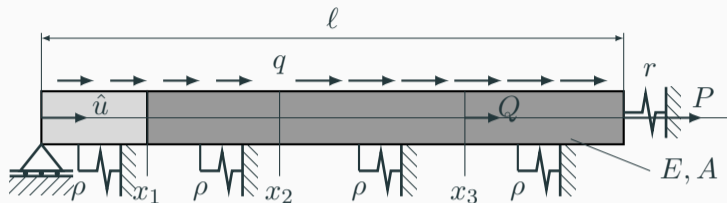
**Si cette condition est satisfaite, la structure se déplace comme un corps rigide, i.e. sans déformation.**

- Cette condition correspond à l'équilibre global des forces appliquées.
- Pour éviter un déplacement de corps rigide, on peut :
  - Imposer une condition essentielle homogène (ex.  $u(0) = 0$ )
  - Imposer une condition essentielle non homogène (ex.  $u(0) = \hat{u}_0$ )

# Discrétisation basée sur la méthode des éléments finis

---

## Forme faible de l'élastostatique du barreau généralisé (*rappel*)



Trouver le déplacement axial  $u \in \mathcal{U}$  telle que pour tout déplacement virtuel  $\delta u \in \mathcal{V}$ , on ait :

$$\int_0^\ell \left[ EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} + \rho u \delta u \right] dx + r u(\ell) \delta u(\ell) = Q \delta u(x_3) + P \delta u(\ell) + \int_0^\ell q \delta u dx$$

Classes des fonctions admissibles :

$$\mathcal{U} = \{u \in H^1(]0, \ell[), u(0) = \hat{u}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{V} = \{\delta u \in H^1(]0, \ell[), \delta u(0) = 0\}$$

Approximation des déplacements axiaux réel et virtuel :

$$u \approx u^h \in \mathcal{U}^h \subset \mathcal{U} \quad \text{et} \quad \delta u \approx \delta u^h \in \mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$$

## Forme faible approchée

Trouver  $u^h \in \mathcal{U}^h$  telle que, pour tout  $\delta u^h \in \mathcal{V}^h$ , on ait

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \left[ EA \frac{du^h}{dx} \frac{d\delta u^h}{dx} + \rho u^h \delta u^h \right] dx + ru^h(\ell) \delta u^h(\ell) \\ = Q \delta u^h(x_3) + P \delta u^h(\ell) + \int_0^\ell q \delta u^h dx \end{aligned}$$

$$u^h(x) = \mathbf{H}(x)\mathbf{q} = \sum_{i=1}^p h_i(x)q_i \quad \text{et} \quad \delta u^h(x) = \mathbf{H}(x)\delta\mathbf{q} = \sum_{i=1}^p h_i(x)\delta q_i$$

## Forme faible discrète

Determiner le vecteur  $\mathbf{q}$  tel que  $q_1 = \hat{u}$  et pour tout  $\delta\mathbf{q}$  tel que  $\delta q_1 = 0$ , on ait

$$\delta\mathbf{q}^T(\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{r}) = 0.$$

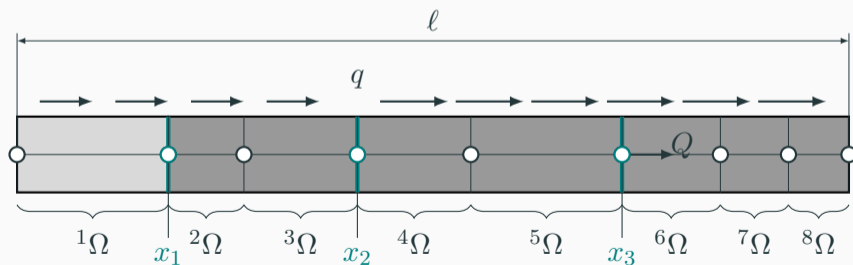
où

$$\mathbf{K} = \int_0^\ell \left[ EA \frac{d\mathbf{H}^T}{dx} \frac{d\mathbf{H}}{dx} + \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} \right] dx + r \mathbf{H}^T(\ell) \mathbf{H}(\ell)$$

$$\mathbf{r} = Q \mathbf{H}^T(x_3) + P \mathbf{H}^T(\ell) + \int_0^\ell q \mathbf{H}^T dx$$

# Maillage par éléments finis

- La discrétisation adoptée est constituée de  $m$  éléments finis linéaires à deux nœuds chacun ( $^e p = 2$ ).
- Pour assurer le respect du critère de différentiabilité, **des nœuds doivent obligatoirement être introduits aux points de discontinuité.**



- La matrice de rigidité globale  $\mathbf{K}$  et le vecteur de charge global  $\mathbf{r}$  sont assemblés à partir des contributions élémentaires:

$$\mathbf{K} = r\mathbf{H}^T(\ell)\mathbf{H}(\ell) + \sum_{e=1}^m {}^e\mathbf{K} \quad \text{et} \quad \mathbf{r} = Q\mathbf{H}^T(x_3) + P\mathbf{H}^T(\ell) + \sum_{e=1}^m {}^e\mathbf{r}$$

- La contribution élémentaire à la matrice de rigidité est donnée par :

$${}^e\mathbf{K} = \int_{{}^e\Omega} {}^eE^e A \frac{d^e\mathbf{H}^T}{dx} \frac{d^e\mathbf{H}}{dx} + {}^e\rho^e \mathbf{H}^T {}^e\mathbf{H} dx$$

- La contribution élémentaire au vecteur de charge est donnée par :

$${}^e\mathbf{r} = \int_{{}^e\Omega} {}^eq^e \mathbf{H}^T dx$$

$${}^e\mathbf{K} = {}^e\mathbf{K}^1 + {}^e\mathbf{K}^2$$

où

$${}^e\mathbf{K}^1 = \int_{{}^e\Omega} {}^eE {}^eA \frac{d{}^e\mathbf{H}^T}{dx} \frac{d{}^e\mathbf{H}}{dx} dx \quad {}^e\mathbf{K}^2 = \int_{{}^e\Omega} {}^e\rho {}^e\mathbf{H}^T {}^e\mathbf{H} dx$$

- Transformation de coordonnées entre l'élément archétype  ${}^a\Omega$  et un élément finit générique  ${}^e\Omega$  de longueur  ${}^e\ell$  :

$$\xi(x) = \frac{1}{{}^e\ell} (2x - x_i - x_{i+1})$$

- Fonctions de base linéaires de l'élément archétype :

$${}^a\mathbf{H}(\xi) = \begin{bmatrix} {}^ah_1(\xi) & {}^ah_2(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \xi) & \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{bmatrix}$$

## Calcul de la matrice élémentaire de masse ${}^e\mathbf{K}^2$

Les composantes de la *matrice élémentaire de masse* sont données par :

$${}^e k_{ij}^2 = \int_{{}^e\Omega} {}^e\rho {}^e h_i(x) {}^e h_j(x) dx = \int_{-1}^1 {}^e\rho {}^a h_i(\xi) {}^a h_j(\xi) \frac{{}^e\ell}{2} d\xi$$

$${}^e k_{11}^2 = \int_{-1}^1 {}^e\rho \frac{(1-\xi)^2}{4} \frac{{}^e\ell}{2} d\xi = \frac{{}^e\rho {}^e\ell}{3}$$

$${}^e k_{12}^2 = {}^e k_{21}^2 = \int_{-1}^1 {}^e\rho \frac{1-\xi}{2} \frac{1+\xi}{2} \frac{{}^e\ell}{2} d\xi = \frac{{}^e\rho {}^e\ell}{6}$$

$${}^e k_{22}^2 = \int_{-1}^1 {}^e\rho \frac{(1+\xi)^2}{4} \frac{{}^e\ell}{2} d\xi = \frac{{}^e\rho {}^e\ell}{3}$$

**Matrice élémentaire de rigidité :**

$${}^e\mathbf{K} = \frac{{}^e E {}^e A}{{}^e\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{{}^e\rho {}^e\ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Matrice symétrique et définie strictement positive.
- Matrice indépendante de la position de l'élément fini dans le réseau.

## Condition aux limites essentielle non homogène

- Après assemblage, le système global d'équations est donné par :

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{r}) = 0.$$

- En imposant la condition essentielle  $q_1 = \hat{u}$  et  $\delta q_1 = 0$ , le système est réduit à :

$$\begin{bmatrix} 0 & \delta q_2 & \delta q_3 & \cdots & \delta q_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & & & \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & & \\ & k_{32} & k_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & k_{pp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{u} \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_p \end{bmatrix} = 0$$

## Système d'équations réduit

$$\mathbf{K}_{\text{réd}} \mathbf{q}_{\text{réd}} = \mathbf{r}_{\text{réd}}$$

où

$$\mathbf{K}_{\text{réd}} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2p} \\ k_{32} & k_{33} & \cdots & k_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{p2} & k_{p3} & \cdots & k_{pp} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_{\text{réd}} = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{\text{réd}} = \begin{bmatrix} r_2 - k_{21} \hat{u} \\ r_3 \\ \vdots \\ r_p \end{bmatrix}$$

**Remarque :** Le système d'équations réduit est de taille  $(p - 1) \times (p - 1)$  et il est résolu pour les degrés de liberté libres.

# Élimination de la première ligne

- Élimination de la première ligne de la matrice  $\mathbf{K}$  et de la première composante du vecteur  $\mathbf{r}$ . Cela correspond à l'application de la condition essentielle homogène sur le déplacement virtuel  $\delta q_1 = 0$ .
- *Pas d'élimination immédiate de première colonne* puisque  $q_1 = \hat{u}$ .

$$\begin{bmatrix} 0 & \delta q_2 & \delta q_3 & \cdots & \delta q_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{matrix} k_{11} & k_{12} & & & \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & & \\ & k_{32} & k_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & k_{pp} \end{matrix} & \begin{matrix} \hat{u} \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_p \end{matrix} - \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_p \end{matrix} \end{bmatrix} = 0$$

# Élimination de la première colonne

$$k_{12}\hat{u} + k_{22}q_2 + k_{23}q_3 + \cdots + k_{2p}q_p = r_2$$

- Élimination de la première colonne de la matrice  $\mathbf{K}$  et modification de la deuxième composante du vecteur  $\mathbf{r}$ . Cela correspond à l'application de la condition essentielle non homogène  $q_1 = \hat{u}$ .

$k_{11}$	$k_{12}$			
$k_{21}$	$k_{22}$	$k_{23}$		
	$k_{32}$	$k_{33}$		
			$\ddots$	
				$k_{pp}$

 $\cdot$ 

$\hat{u}$
$q_2$
$q_3$
$\vdots$
$q_p$

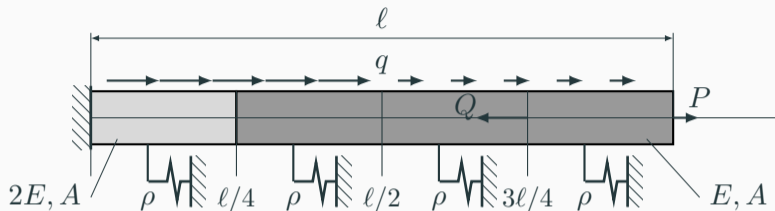
 $=$ 

$r_1$
$r_2 - k_{21}\hat{u}$
$r_3$
$\vdots$
$r_p$

## Exemple d'application : barre encastrée comportant des discontinuités

---

# Barre prismatique écastrée comportant des discontinuités

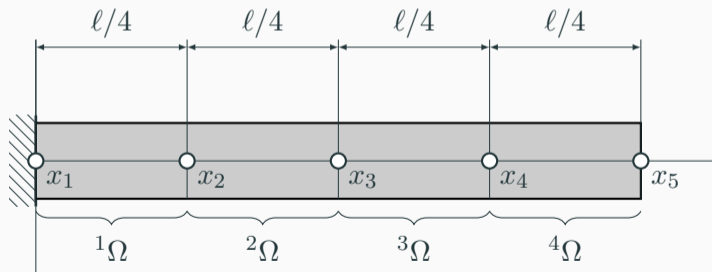


## Données

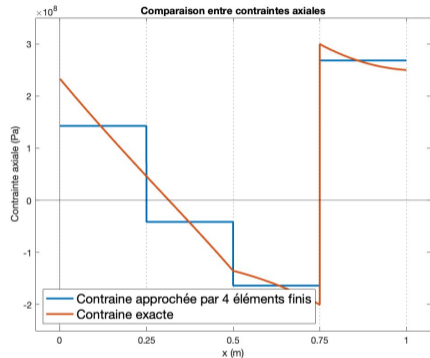
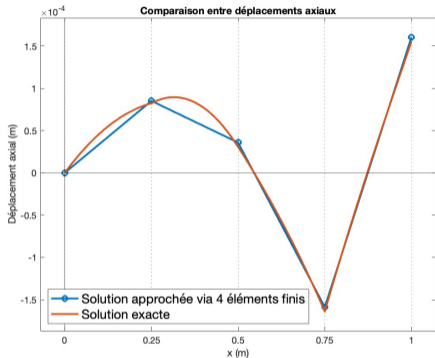
- ☞ Encastrement en  $x = 0$  et longueur  $l = 1$  m.
- ★ Structure formée de deux matériaux différents:  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Pa,  $A = 100$  mm<sup>2</sup>.
- ➡ Charge répartie de compression proportionnelle ( $\rho = 10^8$  N/m<sup>2</sup>) au déplacement.
- ➡ Charge répartie d'intensité  $q = 20$  kN/m sur la moitié droite et d'intensité  $4q$  sur la moitié gauche.
- ➡ Force de compression  $Q = 50$  kN agissant en  $x = 3l/4$ .
- ➡ Force ponctuelle axiale  $P = 25$  kN agissant sur l'extrémité droite.

## Discrétisation du domaine

La discrétisation choisie est composée de : 5 nœuds équidistants ( $p = 5$ ), 4 éléments finis ( $m = 4$ ), fonctions de forme linéaires par morceaux.



# Comparaison entre solution exacte et solutions approchées



- Perte de superconvergence aux nœuds.
- Le déplacement exacte est continu, mais sa dérivée ne l'est pas.
- Sous-estimation des déplacements approchés.