

Méthode des éléments finis

Formulation intégrale des problèmes aux limites bidimensionnels

Prof. F. Gallaire

Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

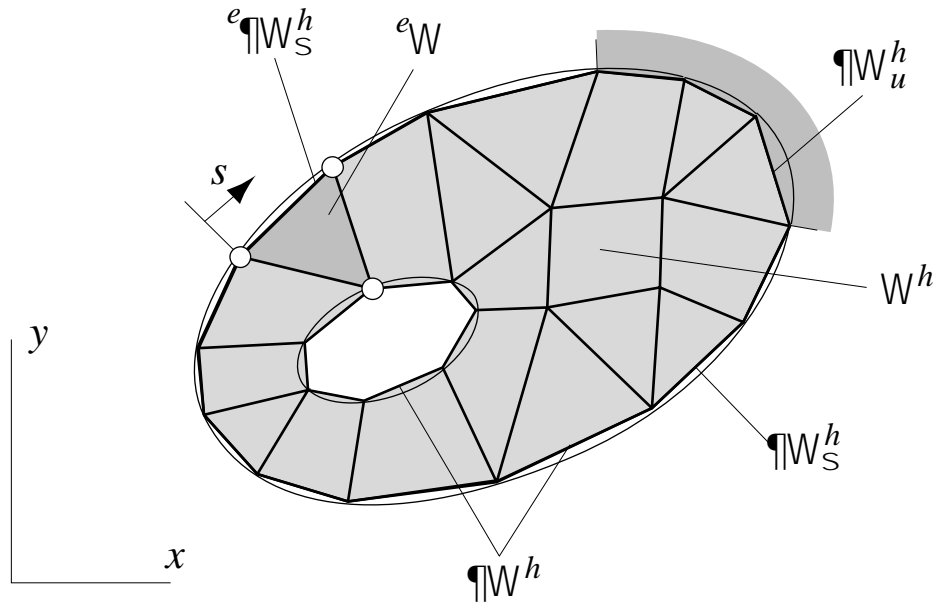
- Rappel de la forme faible discrète étudiée

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r} \quad (q_k = \hat{q}_k, \forall k \mid (x_k, y_k) \in \partial\Omega_u)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^m \mathbf{A}^e \mathbf{K}^e$$

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^m \mathbf{A}^e \mathbf{r}^e$$

$$(\Omega^h = \bigcup_{e=1}^m \Omega^e)$$



Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Rappel des grandeurs structurelles

$${}^e\mathbf{K} = \int_{{}^e\Omega} ({}^e\kappa {}^e\mathbf{B}^T {}^e\mathbf{B} + {}^e\rho {}^e\mathbf{H}^T {}^e\mathbf{H}) dx dy + \int_{{}^e\partial\Omega_\sigma^h} {}^er {}^e\mathbf{H}^T {}^e\mathbf{H} ds$$

matrice élémentaire de conductivité

$${}^er = \int_{{}^e\Omega} {}^e\mathbf{H}^T {}^eq dx dy + \int_{{}^e\partial\Omega_\sigma^h} {}^e\mathbf{H}^T {}^et ds$$

vecteur élémentaire des sources d'énergie-chaleur

$${}^e\mathbf{H} = [{}^eh_1, {}^eh_2, \dots, {}^eh_{e_p}]$$

matrice des fonctions de base

$${}^e\mathbf{B} = \nabla {}^e\mathbf{H} = [\partial {}^e\mathbf{H} / \partial x, \partial {}^e\mathbf{H} / \partial y]^T$$

matrice-gradient

Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Paramétrisation de la modélisation en éléments finis

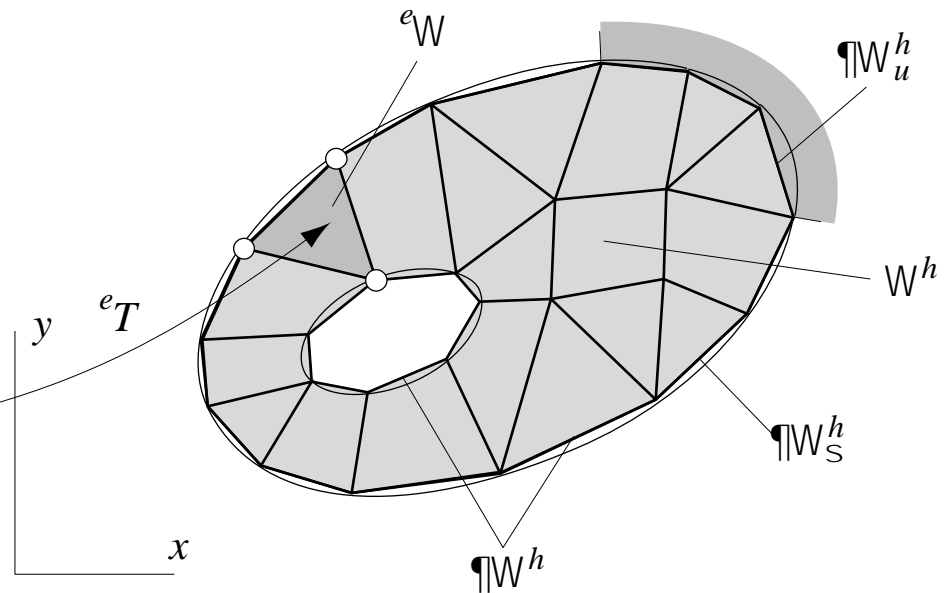
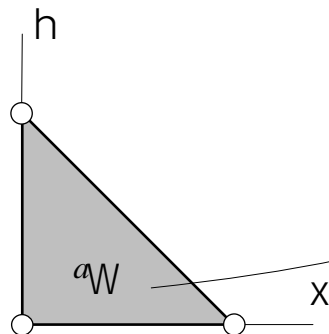
$${}^eT : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{e p} h_i(\xi, \eta) {}^e\mathbf{x}_i$$

$$\mathbf{x} = \{x, y\}^T$$

$${}^e\mathbf{x}_i = \{x_i, y_i\}^T$$



Existence
de ${}^eT^{-1}$



Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Paramétrisation de la modélisation en éléments finis (*suite*)

$${}^e u^h(x, y) = \sum_{i=1}^e h_i(x, y) {}^e q_i = \sum_{i=1}^e h_i[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] {}^e q_i$$

$$= \sum_{i=1}^e {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e q_i$$



Matrice ${}^e \mathbf{J}^{-1}$
calculée
explicitement

$$\Rightarrow {}^e h_i(x, y) \rightarrow {}^a h_i(\xi, \eta)$$

$$\frac{\partial {}^e h_i}{\partial x} = \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \left({}^e J_{11}^{-1} \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi} \right) + \left({}^e J_{12}^{-1} \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta} \right)$$

$$\frac{\partial {}^e h_i}{\partial y} = \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \left({}^e J_{21}^{-1} \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi} \right) + \left({}^e J_{22}^{-1} \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta} \right)$$

Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

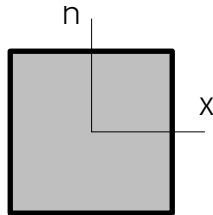
- Insertion de la notion d'élément père ou archétype

- Traitement des intégrales surfaciques

jacobien de la transformation eT
 $= \det({}^eJ)$

$$\int_{e\Omega} (\cdot) dx dy = \int_{e\Omega} (\cdot) \cdot {}^e d\Omega$$

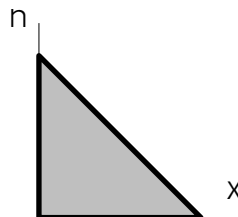
$$= \int_{a\Omega} (\cdot) \cdot j^a d\Omega = \int_{a\Omega} (\cdot) \cdot j d\xi d\eta$$



$$\int_{a\Omega} \text{---} d\xi d\eta = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \text{---} d\eta d\xi$$

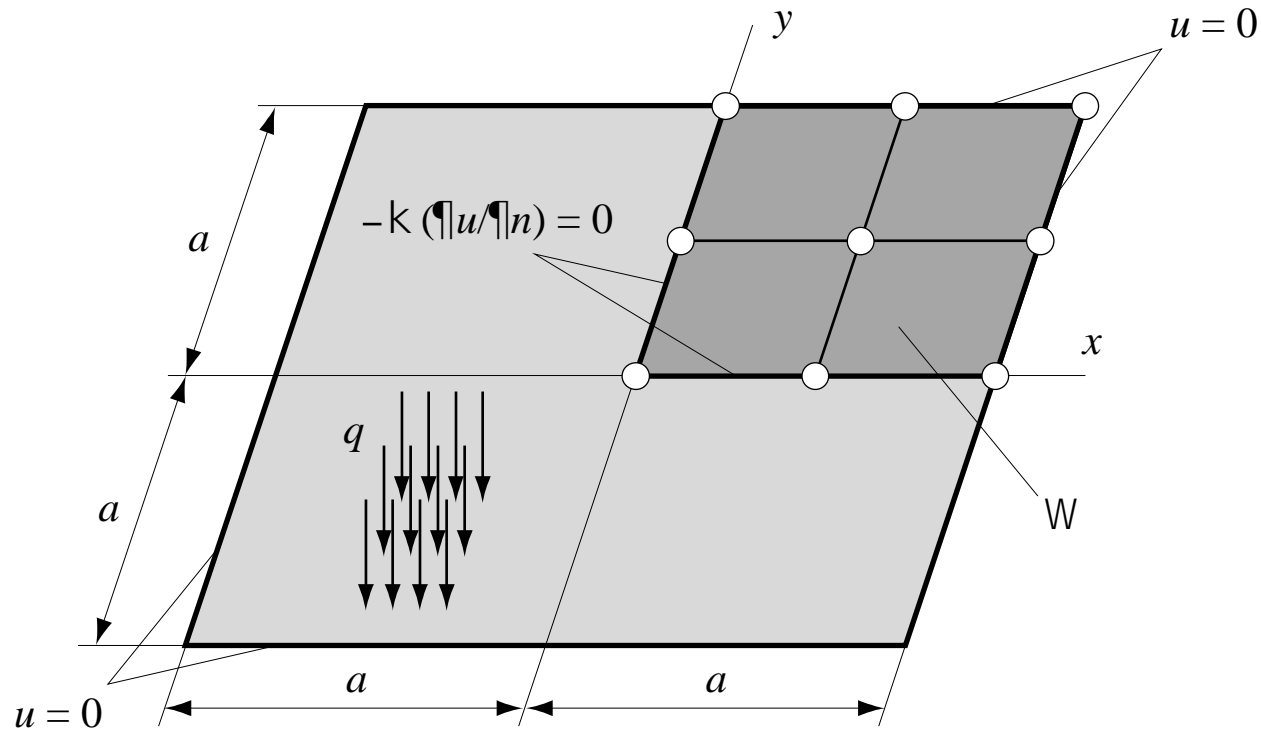


Bornes



$$\int_{a\Omega} \text{---} d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \text{---} d\eta d\xi$$

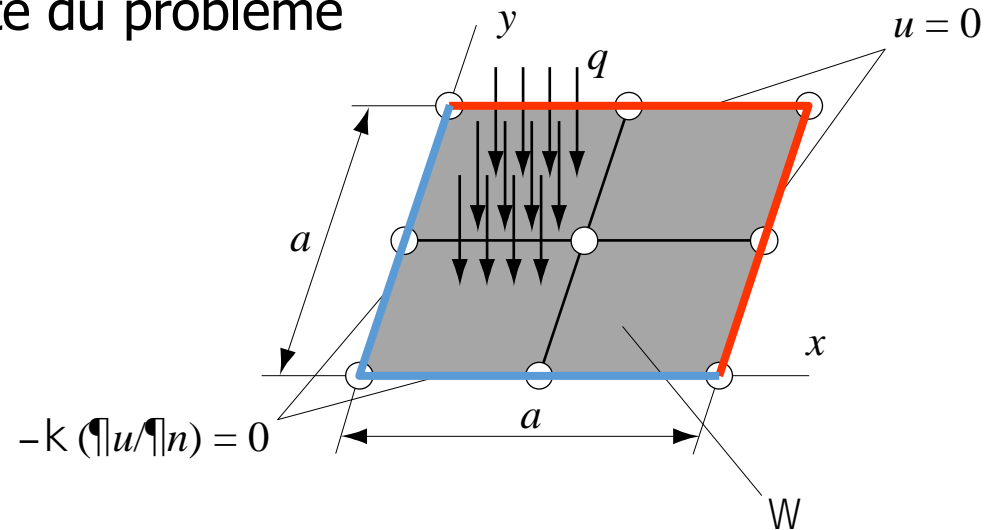
Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis



Distribution des températures sur une plaque carrée dont le quart est subdivisé en quatre éléments finis identiques

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

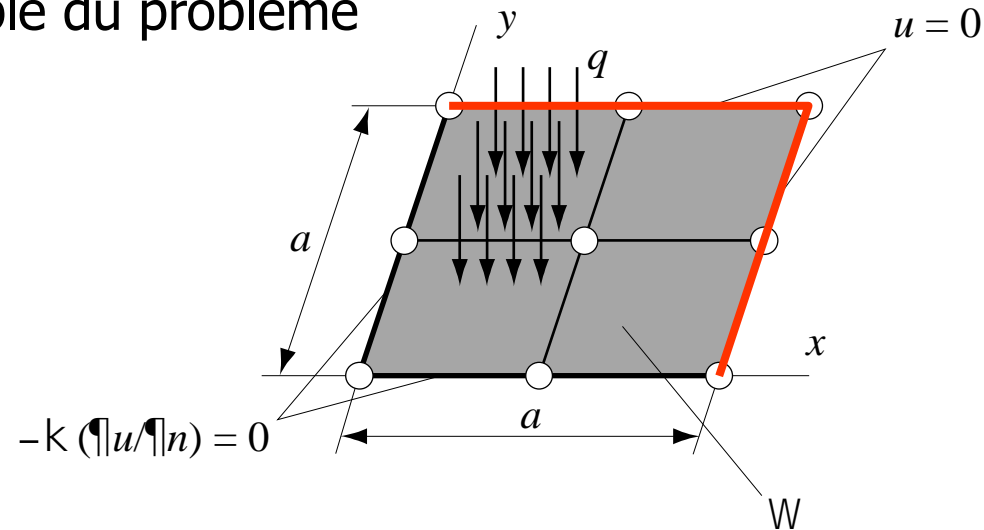
- Forme forte du problème



$$\begin{aligned}
 u \in C^2(\bar{\Omega}) : \nabla^T (-\kappa \nabla u) &= q && \text{dans } \Omega \\
 u &= 0 && \text{sur } \partial\Omega_u \\
 -\kappa (\partial u / \partial n) &= 0 && \text{sur } \partial\Omega_\sigma
 \end{aligned}$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Forme faible du problème



$$u \in U: \int_{\Omega} [\kappa (\nabla u)^T \nabla \delta u] dx dy = \int_{\Omega} q \delta u dx dy \quad \forall \delta u \in V$$

$$U = V = \{w \mid w \in H^1(\Omega) ; w = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u\}$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Forme faible discrète du problème

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r} \quad (q_k = \hat{q}_k, \forall k \mid (x_k, y_k) \in \partial\Omega_u \stackrel{h}{=} \partial\Omega_u)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^4 \mathbf{A}^e \mathbf{K}^e \quad \mathbf{r} = \sum_{e=1}^4 \mathbf{A}^e \mathbf{r}^e$$

- Matrice élémentaire de conductivité

$$\mathbf{K}^e = \int_{e\Omega} \kappa [(\partial^e \mathbf{H}^T / \partial x) (\partial^e \mathbf{H} / \partial x) + (\partial^e \mathbf{H}^T / \partial y) (\partial^e \mathbf{H} / \partial y)] dx dy$$

- Vecteur élémentaire des sources d'énergie-chaleur

$$\mathbf{r}^e = \int_{e\Omega} \mathbf{H}^T q dx dy$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Forme indicielle de la matrice de conductivité ${}^e\mathbf{K}$

$${}^e k_{ij} = \int_{{}^e\Omega} {}^e\kappa [(\partial^e h_i/\partial x)(\partial^e h_j/\partial x) + (\partial^e h_i/\partial y)(\partial^e h_j/\partial y)] dx dy$$



Matrice jacobienne

$$\partial^e h_i/\partial x = {}^e J_{11}^{-1} \partial^a h_i/\partial \xi + {}^e J_{12}^{-1} \partial^a h_i/\partial \eta$$

$$= \int_{{}^e\Omega} {}^e\kappa [(\partial^e h_i/\partial x)(\partial^e h_j/\partial x) + (\partial^e h_i/\partial y)(\partial^e h_j/\partial y)] {}^e j d\xi d\eta$$

$$\partial^e h_i/\partial y = {}^e J_{21}^{-1} \partial^a h_i/\partial \xi + {}^e J_{22}^{-1} \partial^a h_i/\partial \eta$$

$${}^e j = \det({}^e\mathbf{J})$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Forme indicielle du vecteur des sources d'énergie-chaleur ${}^e \mathbf{r}$

$${}^e r_i = \int_{{}^e \Omega} {}^e h_i {}^e q \, dx \, dy$$

$$= \int_{{}^a \Omega} {}^a h_i {}^e q {}^e j \, d\xi \, d\eta$$

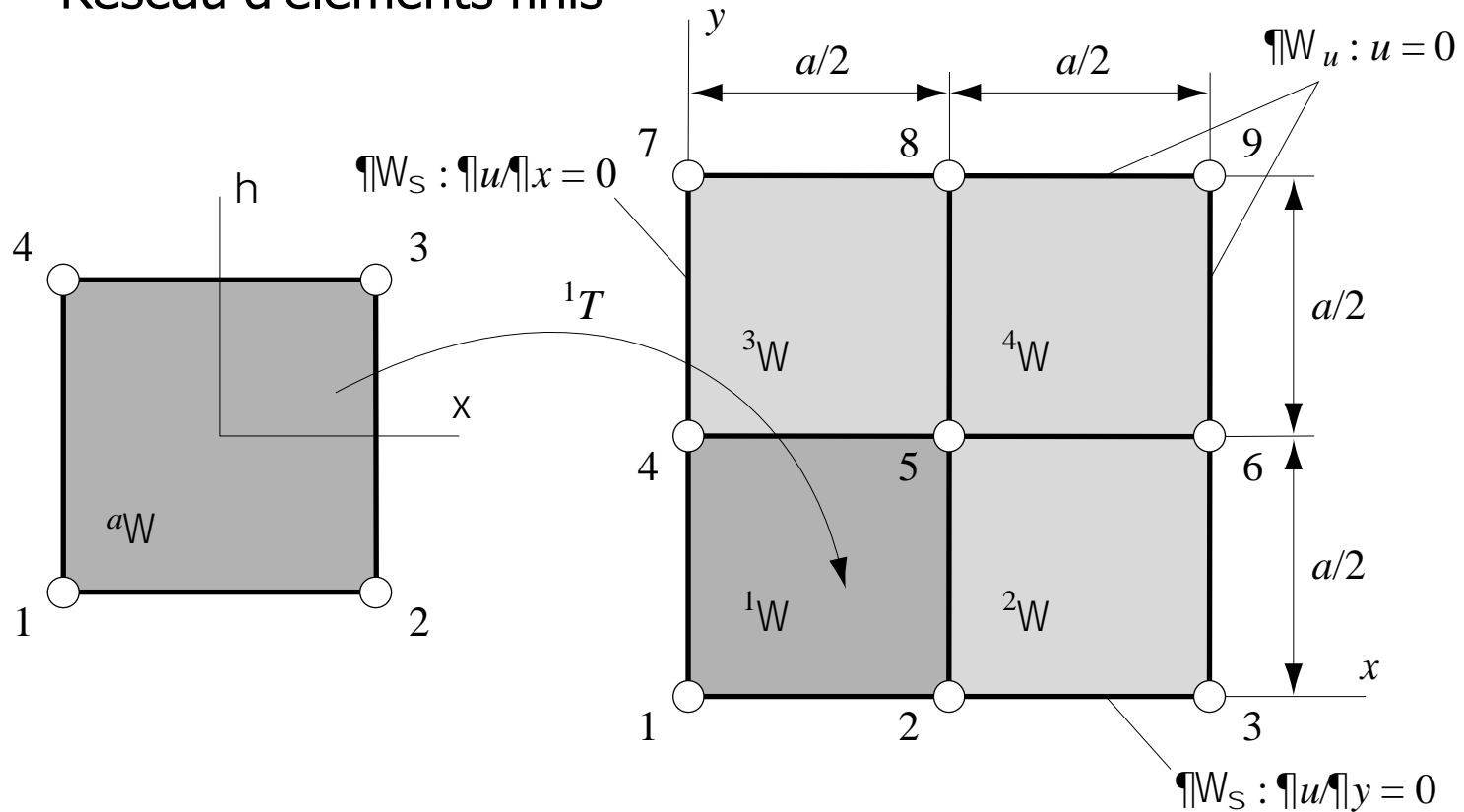
$${}^e j = \det({}^e \mathbf{J})$$



Matrice
jacobienne

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Réseau d'éléments finis



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Tableau de connectivité

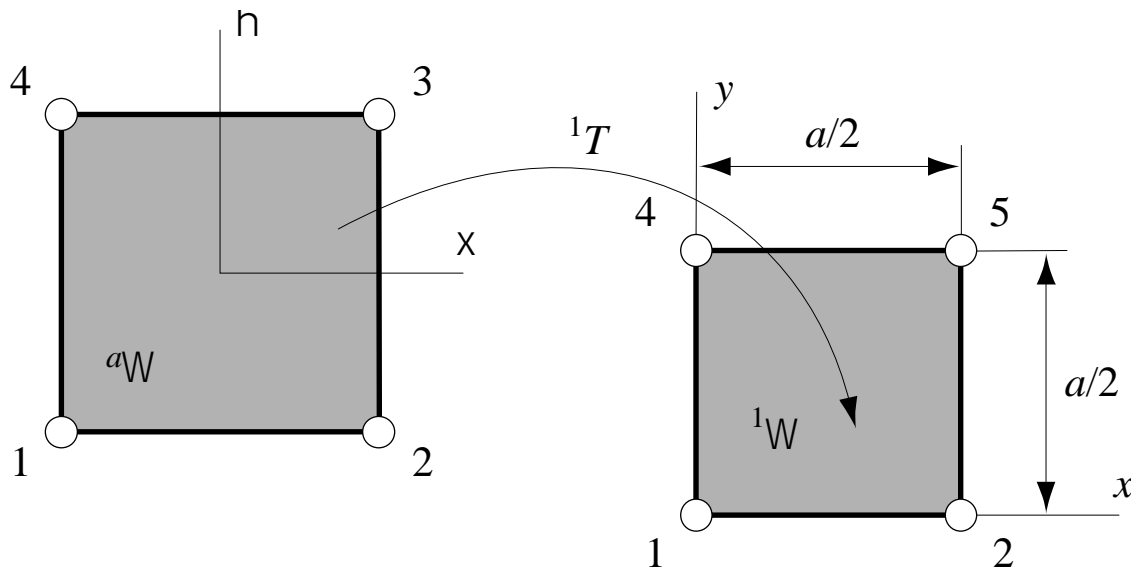
	aW	1W	2W	3W	4W	
<i>numérotation locale des nœuds</i>	1	1	2	4	5	
	2	2	3	5	6	
	3	5	6	8	9	
	4	4	5	7	8	<i>numérotation globale des nœuds</i>



4 éléments finis identiques
⇒ Calcul uniquement des contributions dues à Ω_1

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Transformation de coordonnées relative à l'élément ${}^1\Omega$



$${}^1T: \quad x = (a/2) {}^a h_2 + (a/2) {}^a h_3 = (1 + \xi) (a/4)$$

$$y = (a/2) {}^a h_3 + (a/2) {}^a h_4 = (1 + \eta) (a/4)$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Jacobien et matrice jacobienne

$${}^1T: \quad \begin{aligned} x &= (1 + \xi) (a/4) \\ y &= (1 + \eta) (a/4) \end{aligned}$$

$$\partial x / \partial \xi = a/4 \quad \partial x / \partial \eta = 0 \quad \partial y / \partial \xi = 0 \quad \partial y / \partial \eta = a/4$$

$${}^1j = (a/4)(a/4) = a^2/16$$



Justification
du résultat

$${}^1\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a/4 & 0 \\ 0 & a/4 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} 4/a & 0 \\ 0 & 4/a \end{bmatrix}$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Dérivées des fonctions de base

$${}^1\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} 4/a & 0 \\ 0 & 4/a \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^1 h_i}{\partial x} = \frac{\partial^a h_i}{\partial \xi} \left({}^1J_{11}^{-1} \right) + \frac{\partial^a h_i}{\partial \eta} \left({}^1J_{12}^{-1} \right) = \frac{4}{a} \frac{\partial^a h_i}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^1 h_i}{\partial y} = \frac{\partial^a h_i}{\partial \xi} \left({}^1J_{21}^{-1} \right) + \frac{\partial^a h_i}{\partial \eta} \left({}^1J_{22}^{-1} \right) = \frac{4}{a} \frac{\partial^a h_i}{\partial \eta}$$



Pas de distorsion géométrique de l'élément

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes de la matrice de conductivité

$$\begin{aligned}
 {}^e k_{ij} &= \int_{a_\Omega} {}^e \kappa [(\partial^e h_i / \partial x) (\partial^e h_j / \partial x) \\
 &\quad + (\partial^e h_i / \partial y) (\partial^e h_j / \partial y)] {}^e j \, d\xi \, d\eta \\
 &= \int_{a_\Omega} {}^e \kappa [(\partial^a h_i / \partial \xi) (\partial^a h_j / \partial \xi) \\
 &\quad + (\partial^a h_i / \partial \eta) (\partial^a h_j / \partial \eta)] \frac{16}{a^2} \frac{a^2}{16} \, d\xi \, d\eta \\
 &= \int_{a_\Omega} {}^e \kappa [(\partial^a h_i / \partial \xi) (\partial^a h_j / \partial \xi) \\
 &\quad + (\partial^a h_i / \partial \eta) (\partial^a h_j / \partial \eta)] \, d\xi \, d\eta
 \end{aligned}$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

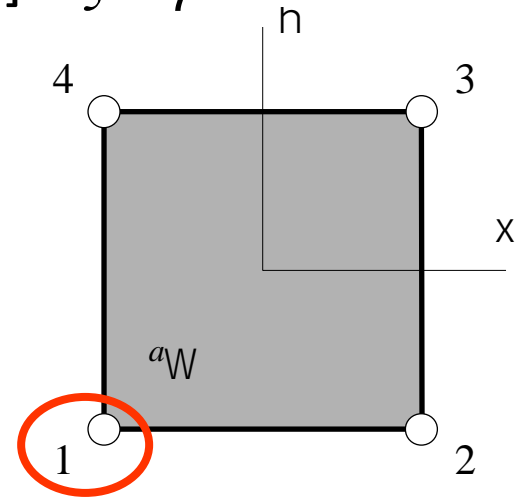
- Calcul des composantes de la matrice de conductivité (*suite*)

$${}^1k_{11} = \int_{a\Omega} \kappa [(\partial^a h_1 / \partial \xi)^2 + (\partial^a h_1 / \partial \eta)^2] d\xi d\eta$$

$${}^a h_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)/4$$

$$\partial^a h_1 / \partial \xi = (\eta - 1)/4$$

$$\partial^a h_1 / \partial \eta = (\xi - 1)/4$$



$$= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\kappa}{16} [(\eta - 1)^2 + (\xi - 1)^2] d\xi d\eta = 2\kappa/3$$

$(1/3+1) \times 2 \times 2$
 $(1/3+1) \times 2 \times 2$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes de la matrice de conductivité (*suite*)

$${}^1k_{12} = {}^1k_{21} = -\kappa/6$$

$${}^1k_{13} = {}^1k_{31} = -\kappa/3$$

$${}^1k_{14} = {}^1k_{41} = -\kappa/6$$

$${}^1k_{22} = 2\kappa/3$$

$${}^1k_{23} = {}^1k_{32} = -\kappa/6$$

$${}^1k_{24} = {}^1k_{42} = -\kappa/3$$

$${}^1k_{33} = 2\kappa/3$$

$${}^1k_{34} = {}^1k_{43} = -\kappa/6$$

$${}^1k_{44} = 2\kappa/3$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Matrice élémentaire de conductivité

$${}^1\mathbf{K} = {}^2\mathbf{K} = {}^3\mathbf{K} = {}^4\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$



Termes indépendants de la géométrie
⇒ géométrie particulière (carré)

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage de la matrice de conductivité globale

${}^e W$	${}^i W$
1	1
2	2
3	5
4	4

$${}^1 \mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

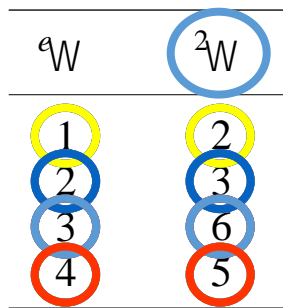
$$\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & \dots & -1 & -2 & \dots & (1) \\ -1 & 4 & & -2 & -1 & \dots & (2) \\ \dots & & & & & & (3) \\ -1 & -2 & & 4 & -1 & \dots & (4) \\ -2 & -1 & & -1 & 4 & \dots & (5) \\ \dots & & & & & & (6) \end{bmatrix}$$



Symétrie

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage de la matrice de conductivité globale (*suite*)



Termes dus à ${}^1\Omega$

$${}^2\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & \dots & -1 & -2 & \dots & (1) \\ -1 & 4 & -4 & -1 & -2 & -1 & -2 & (2) \\ \dots & -1 & 4 & \dots & -2 & -1 & (3) \\ -1 & -2 & \dots & 4 & -1 & \dots & (4) \\ -2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 4 & -1 & (5) \\ \dots & -2 & -1 & \dots & -1 & 4 & (6) \end{bmatrix}$$



Symétrie

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Matrice de conductivité globale

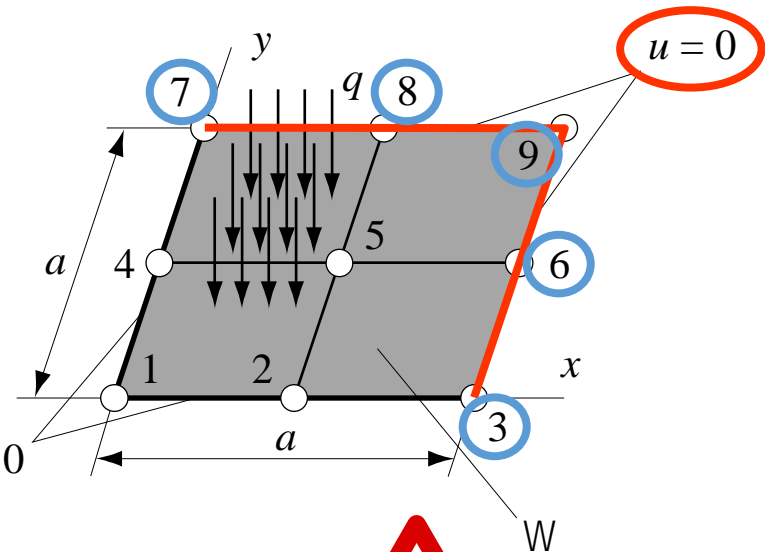
$$\mathbf{K} = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & -1 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 8 & -2 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 16 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -2 & 8 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Matrice de conductivité globale réduite



Prise en compte des conditions aux limites essentielles



$$\mathbf{K}_r = \frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 8 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 16 \end{bmatrix}$$



Suppression des lignes et colonnes 3, 6, 7, 8 et 9

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes du vecteur des sources d'énergie-chaleur

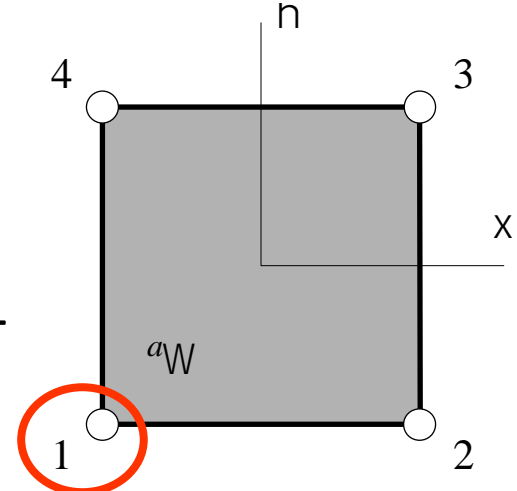
$$e r_i = \int_{a\Omega} {}^a h_i^e q^e d\xi d\eta = \int_{a\Omega} {}^a h_i^e q (a^2/16) d\xi d\eta$$

$${}^1 r_1 = \int_{a\Omega} {}^a h_1^e q (a^2/16) d\xi d\eta$$

$${}^a h_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)/4$$

$${}^1 r_1 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{q}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) \frac{a^2}{16} d\xi d\eta = qa^2/16$$

1×2×2



Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes du vecteur des sources d'énergie-chaleur (*suite*)

$${}^1r_2 = qa^2/16$$

$${}^1r_3 = qa^2/16$$

$${}^1r_4 = qa^2/16$$

- Vecteur élémentaire des sources d'énergie-chaleur

$${}^1\mathbf{r} = \frac{qa^2}{16}\{1, 1, 1, 1\}^T$$



Justification
du résultat

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Assemblage du vecteur global des sources d'énergie-chaleur

$$\mathbf{r} = \frac{qa^2}{16} \{-1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}^T$$

${}^e W$	1W	2W	3W	4W
1	1	2	4	5
2	2	3	5	6
3	5	6	8	9
4	4	5	7	8

- Vecteur global des sources d'énergie-chaleur

$$\mathbf{r} = \frac{qa^2}{16} \{1, 2, 1, 2, 4, 2, 1, 2, 1\}^T$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

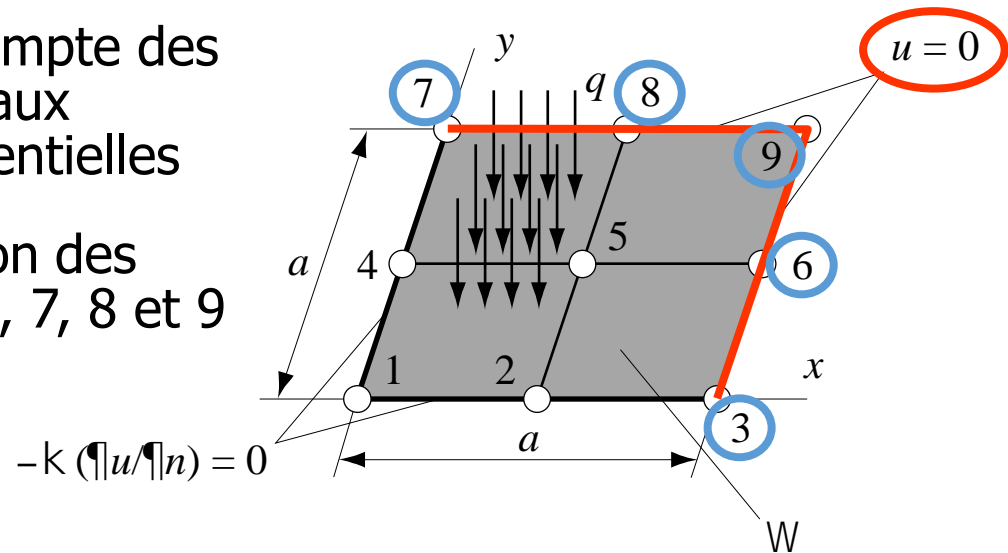
- Vecteur global réduit des sources d'énergie-chaleur



Prise en compte des conditions aux limites essentielles



Suppression des lignes 3, 6, 7, 8 et 9



$$\mathbf{r} = \frac{qa^2}{16} \{1, 2, 1, 2, 4, 2, 1, 2, 1\}^T$$

$$\mathbf{r}_r = \frac{qa^2}{16} \{1, 2, 2, 4\}^T$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

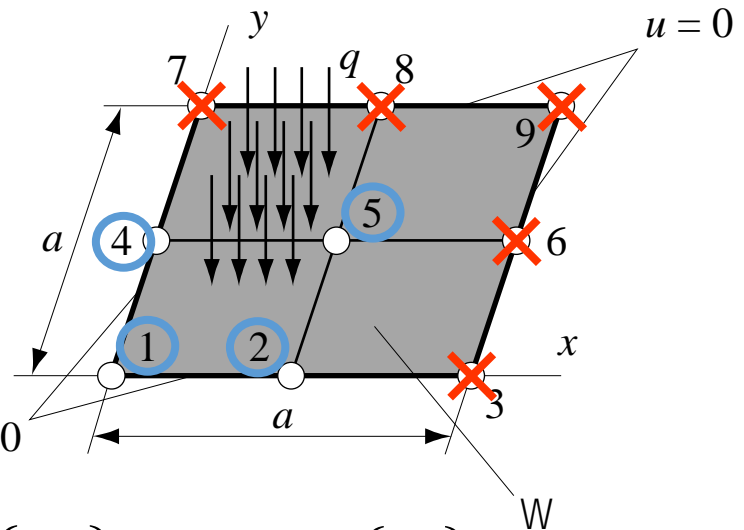
- Système d'équations réduit

$$\mathbf{K}_r \mathbf{q}_r = \mathbf{r}_r$$



Températures aux nœuds 1, 2, 4 et 5

$$-k (\nabla u / \nabla n) = 0$$



$$\frac{\kappa}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 8 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \frac{qa^2}{16} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Solutions du système d'équations

$$q_1 = 87qa^2/(280\kappa)$$

$$q_2 = 27qa^2/(112\kappa)$$

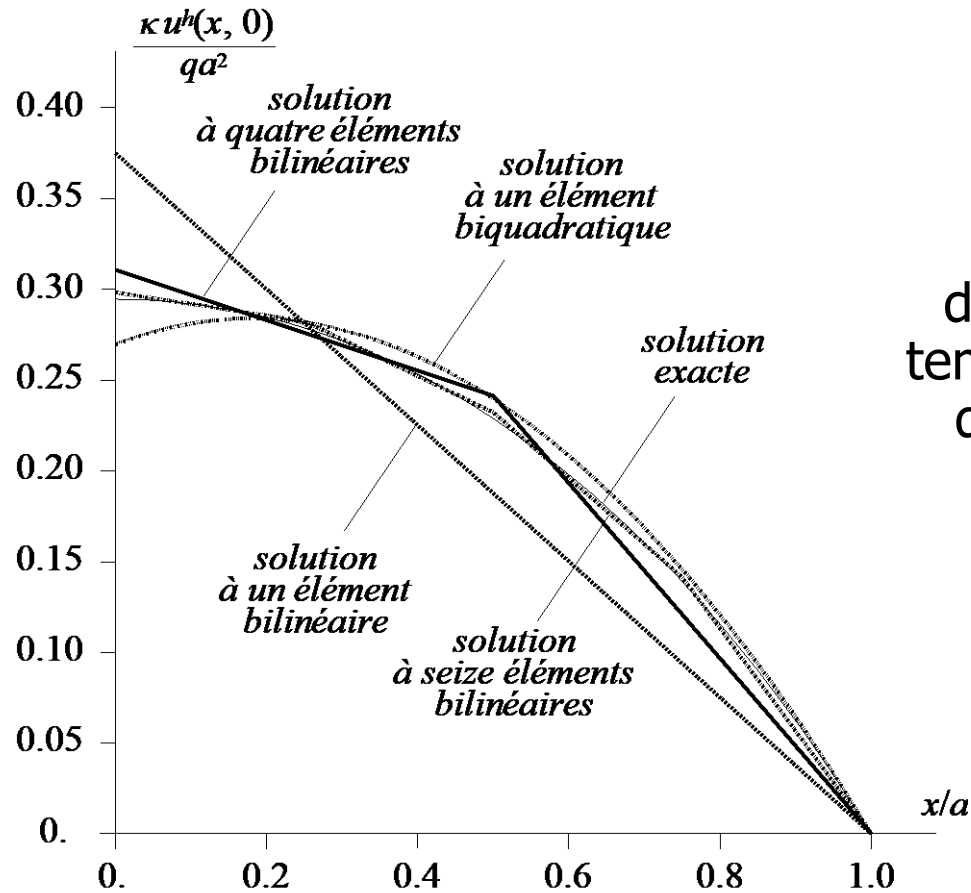
$$q_4 = 27qa^2/(112\kappa)$$

$$q_5 = 27qa^2/(140\kappa)$$

- Distribution des températures

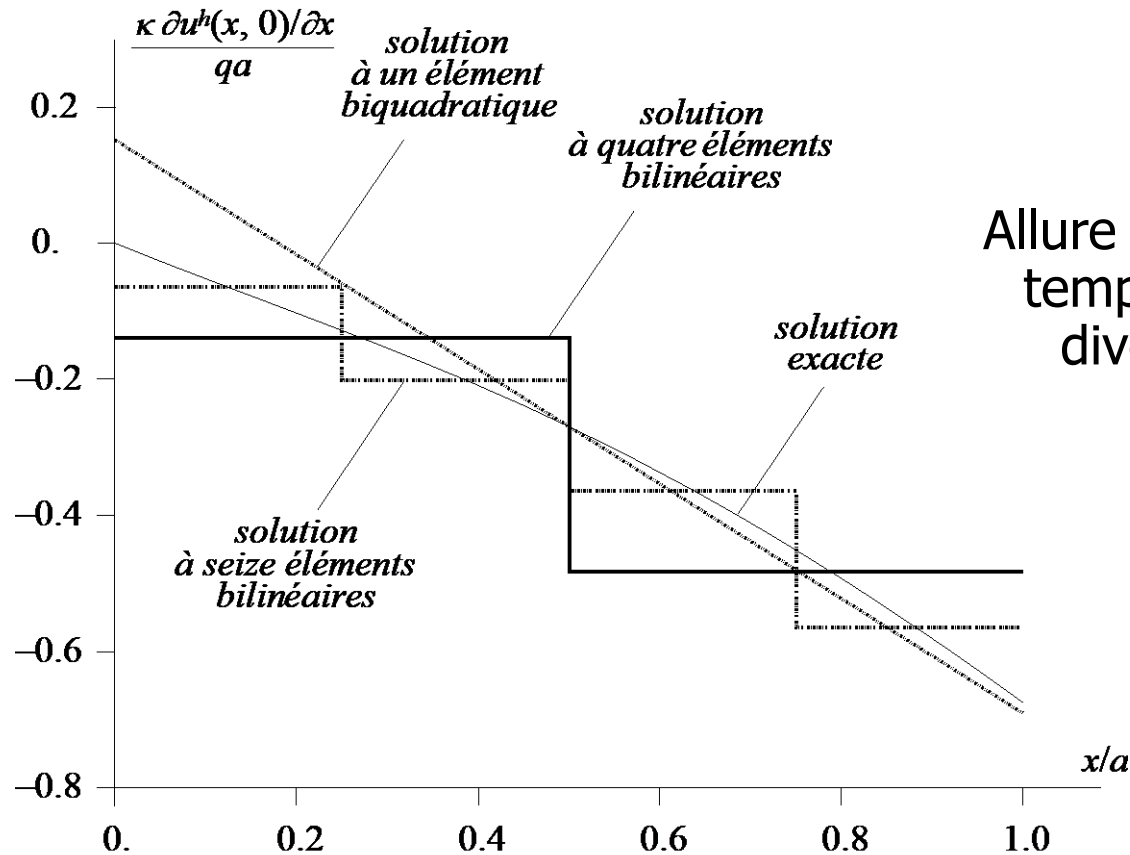
$$u^h(x, y) = \frac{qa^2}{\kappa} [0.3107 h_1(x, y) + 0.2411 h_2(x, y) + 0.2411 h_4(x, y) + 0.1929 h_5(x, y)]$$

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis



Allure de la distribution des températures pour divers réseaux

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis



Allure du gradient de température pour divers réseaux

Exemple d'application 2D de la méthode des éléments finis

- Discussion des résultats et commentaires
 - Bonne précision des résultats pour les réseaux à 2×2 et 4×4 éléments finis bilinéaires
 - Précision assez faible des résultats pour les réseaux à 1×1 élément fini bilinéaire ou biquadratique
 - Gradient de température discontinu
 - Distribution peu précise du gradient de température, mais valeurs moyennes correctes au centre des arêtes des éléments