

# Méthode des éléments finis

## Formulation intégrale des problèmes aux limites bidimensionnels

Prof. F. Gallaire

# Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

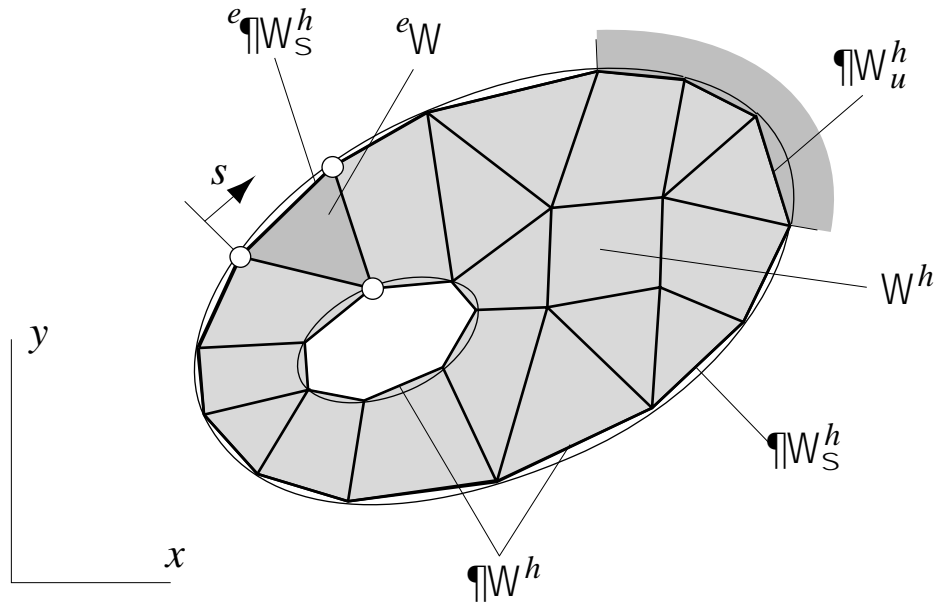
- Rappel de la forme faible discrète étudiée

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r} \quad (q_k = \hat{q}_k, \forall k \mid (x_k, y_k) \in \partial\Omega_u)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^m \mathbf{A}^e \mathbf{K}^e$$

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^m \mathbf{A}^e \mathbf{r}^e$$

$$(\Omega^h = \bigcup_{e=1}^m \Omega^e)$$



# Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Rappel des grandeurs structurelles

$${}^e\mathbf{K} = \int_{{}^e\Omega} ({}^e\kappa {}^e\mathbf{B}^T {}^e\mathbf{B} + {}^e\rho {}^e\mathbf{H}^T {}^e\mathbf{H}) dx dy + \int_{{}^e\partial\Omega_\sigma^h} {}^e r {}^e\mathbf{H}^T {}^e\mathbf{H} ds$$

matrice élémentaire de conductivité

$${}^e\mathbf{r} = \int_{{}^e\Omega} {}^e\mathbf{H}^T {}^e q dx dy + \int_{{}^e\partial\Omega_\sigma^h} {}^e\mathbf{H}^T {}^e t ds$$

vecteur élémentaire des sources d'énergie-chaleur

$${}^e\mathbf{H} = [{}^e h_1, {}^e h_2, \dots, {}^e h_{e_p}]$$

matrice des fonctions de base

$${}^e\mathbf{B} = \nabla {}^e\mathbf{H} = [\partial {}^e\mathbf{H} / \partial x, \partial {}^e\mathbf{H} / \partial y]^T$$

matrice-gradient

# Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Paramétrisation de la modélisation en éléments finis

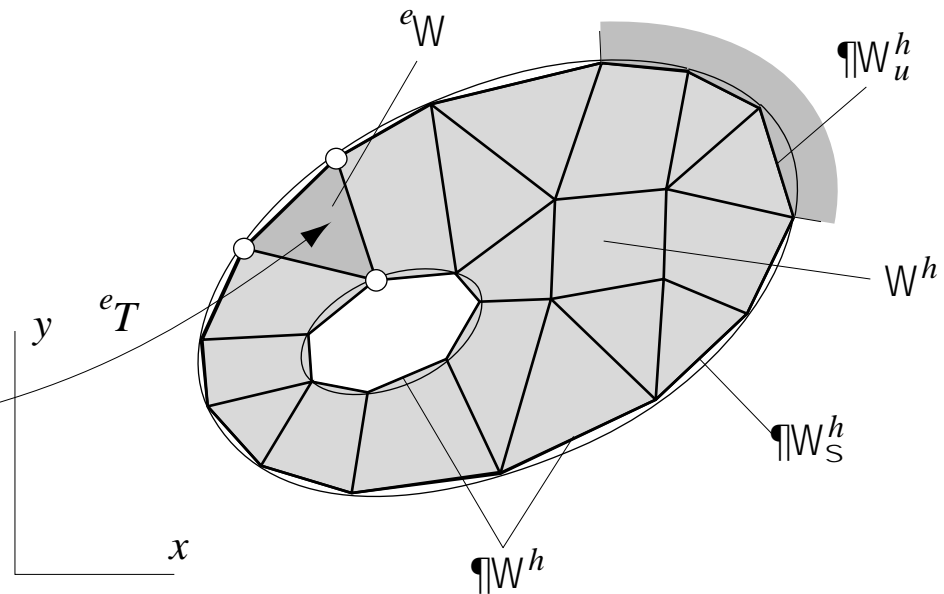
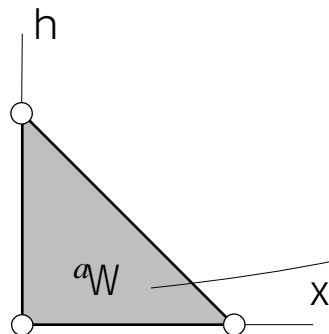
$${}^eT : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{e_p} h_i(\xi, \eta) {}^e\mathbf{x}_i$$

$$\mathbf{x} = \{x, y\}^T$$

$${}^e\mathbf{x}_i = \{x_i, y_i\}^T$$



Existence  
de  ${}^eT^{-1}$



# Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Paramétrisation de la modélisation en éléments finis (*suite*)

$$\begin{aligned}
 {}^e u^h(x, y) &= \sum_{i=1}^{{}^e p} {}^e h_i(x, y) {}^e q_i = \sum_{i=1}^{{}^e p} {}^e h_i[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] {}^e q_i \\
 &= \sum_{i=1}^{{}^e p} {}^a h_i(\xi, \eta) {}^e q_i
 \end{aligned}$$



Matrice  ${}^e \mathbf{J}^{-1}$   
calculée  
explicitement

$$\Rightarrow {}^e h_i(x, y) \rightarrow {}^a h_i(\xi, \eta)$$

$$\frac{\partial {}^e h_i}{\partial x} = \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \left( {}^e J_{11}^{-1} \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi} \right) + \left( {}^e J_{12}^{-1} \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta} \right)$$

$$\frac{\partial {}^e h_i}{\partial y} = \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \left( {}^e J_{21}^{-1} \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \xi} \right) + \left( {}^e J_{22}^{-1} \frac{\partial {}^a h_i}{\partial \eta} \right)$$

# Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

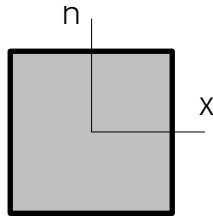
- Insertion de la notion d'élément père ou archétype

- Traitement des intégrales surfaciques

jacobien de la transformation  ${}^eT$   
 $= \det({}^eJ)$

$$\int_{e\Omega} (\cdot) dx dy = \int_{e\Omega} (\cdot) \cdot {}^e d\Omega$$

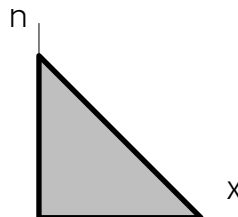
$$= \int_{a\Omega} (\cdot) {}^e j^a d\Omega = \int_{a\Omega} (\cdot) {}^e j d\xi d\eta$$



$$\int_{a\Omega} \text{---} d\xi d\eta = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \text{---} d\eta d\xi$$



Bornes



$$\int_{a\Omega} \text{---} d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \text{---} d\eta d\xi$$

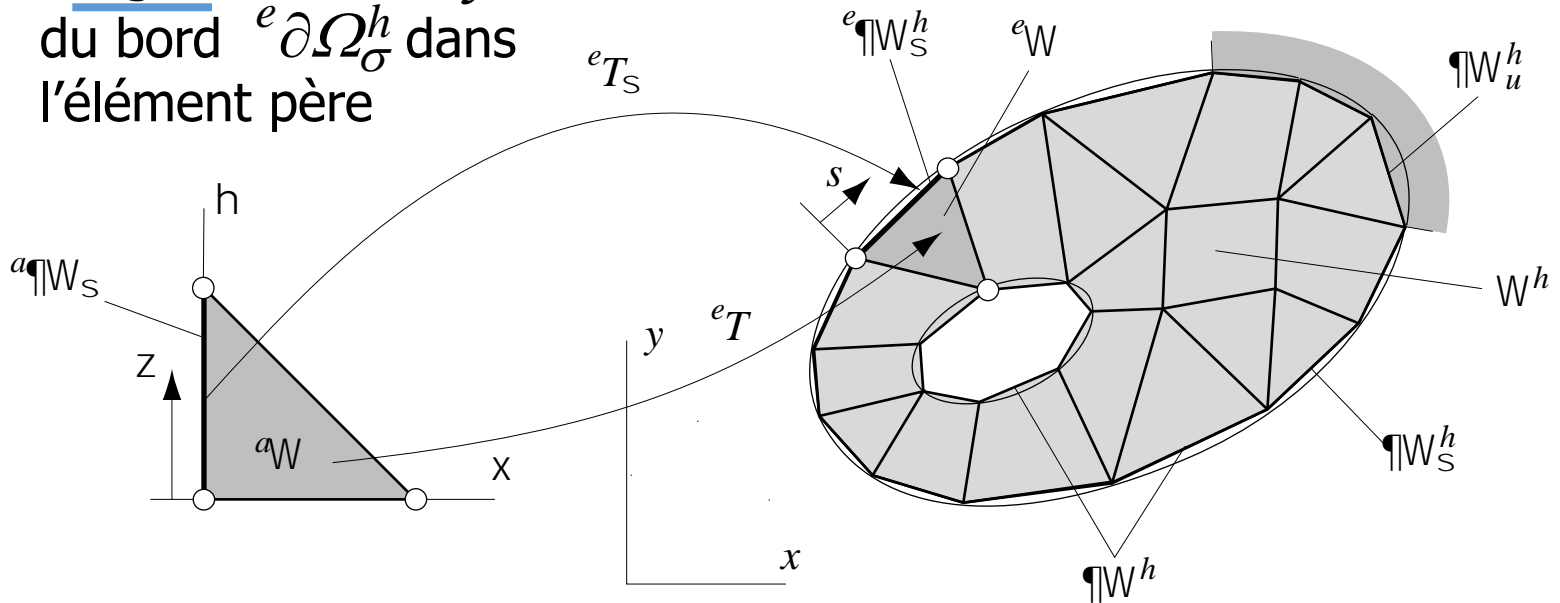
# Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Traitement des intégrales curvilignes

$$\int_{e_{\partial\Omega_\sigma^h}} (\cdot) ds = \int_{a_{\partial\Omega_\sigma}} (\cdot) j_\sigma d\zeta$$

jacobien de la transformation  $eT_\sigma$  d'une arête donnée

image d'abscisse  $\zeta$  du bord  $e_{\partial\Omega_\sigma^h}$  dans l'élément père

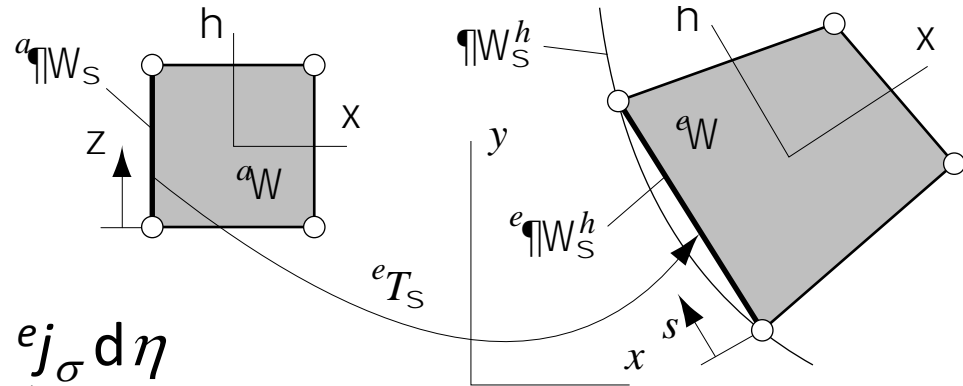


# Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Traitement des intégrales curvilignes (*suite*) : évaluation du jacobien  ${}^e j_\sigma$

$$\int_{a_{\partial\Omega_\sigma}} ( ) \circledast j_\sigma d\zeta$$

$$= \int_{-1}^{+1} ( ) \Big|_{\xi=-1} {}^e j_\sigma d\eta$$



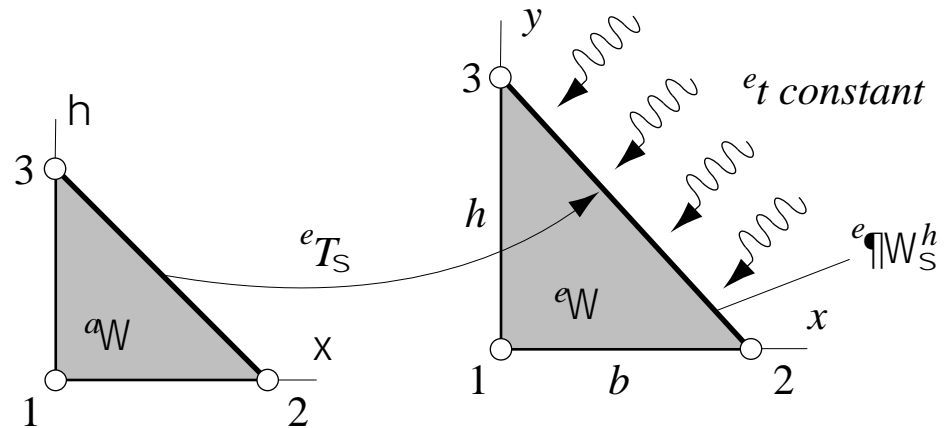
$${}^e T_\sigma \equiv {}^e T \Big|_{\xi=-1} : s = s(\eta) \Rightarrow \begin{aligned} x &= x(-1, \eta) \\ y &= y(-1, \eta) \end{aligned}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \sqrt{[\partial x(-1, \eta) / \partial \eta]^2 + [\partial y(-1, \eta) / \partial \eta]^2} d\eta = \circledast j_\sigma d\eta$$

# Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Traitement des intégrales curvilignes (*suite*) : exemple de flux externe traversant la frontière d'un élément triangulaire



$$\begin{aligned}
 eT_\sigma : \quad x &= b \frac{a h_2}{h} \Big|_{\xi=1-\eta} = b \xi \Big|_{\xi=1-\eta} = b(1-\eta) \\
 y &= h \frac{a h_3}{h} \Big|_{\xi=1-\eta} = h \eta \Big|_{\xi=1-\eta} = h\eta \\
 \partial x / \partial \eta &= -b \quad \partial y / \partial \eta = h
 \end{aligned}$$

# Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Traitement des intégrales curvilignes (*suite*) : calcul des contributions élémentaires du flux externe donné en exemple

$${}^e j_\sigma = \sqrt{(\partial x / \partial \eta)^2 + (\partial y / \partial \eta)^2} = \sqrt{b^2 + h^2}$$

$${}^e r_i = \int_{{}^e \partial \Omega_\sigma^h} {}^e h_i {}^e t \, ds = \int_0^1 {}^a h_i \Big|_{\xi=1-\eta} {}^e t {}^e j_\sigma \, d\eta$$

$${}^e r_1 = \int_0^1 (1-\xi-\eta) \Big|_{\xi=1-\eta} {}^e t \sqrt{b^2 + h^2} \, d\eta = 0$$

$${}^e r_2 = \int_0^1 \xi \Big|_{\xi=1-\eta} {}^e t \sqrt{b^2 + h^2} \, d\eta = {}^e t \sqrt{b^2 + h^2} / 2$$

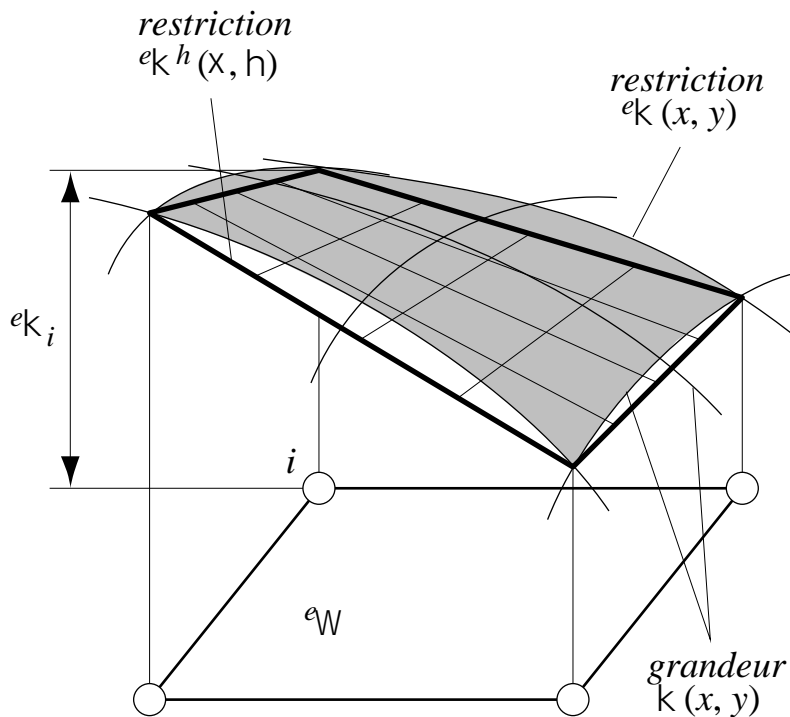
$${}^e r_3 = \int_0^1 \eta \Big|_{\xi=1-\eta} {}^e t \sqrt{b^2 + h^2} \, d\eta = {}^e t \sqrt{b^2 + h^2} / 2$$



Justification  
des résultats

# Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Paramétrisation des grandeurs physiques
  - Traitement des coefficients surfaciques



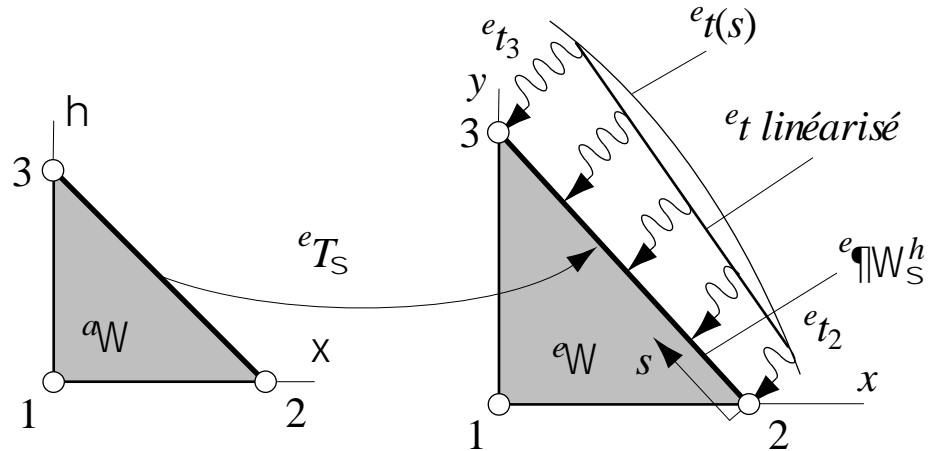
$$e_K(x, y) \approx \sum_{i=1}^{e_p} h_i(\xi, \eta) e_{K_i} = e_{K^h}(\xi, \eta)$$

$$e_\rho(x, y) \approx \sum_{i=1}^{e_p} h_i(\xi, \eta) e_{\rho_i} = e_{\rho^h}(\xi, \eta)$$

$$e_q(x, y) \approx \sum_{i=1}^{e_p} h_i(\xi, \eta) e_{q_i} = e_{q^h}(\xi, \eta)$$

# Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Cas particulier : paramétrisation le long du site des conditions naturelles de bord (exemple d'un élément triangulaire)

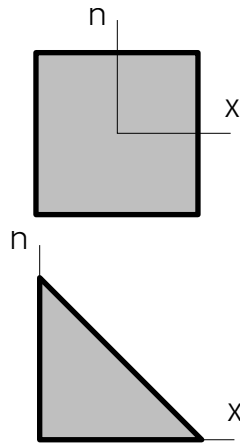


**!**  
Démarche identique pour la variable  $e_r(s)$

$$\begin{aligned}
 e_t(s) &\approx \sum_{i=1}^{e_p_\sigma} h_i(\xi, \eta) \Big|_{\xi=1-\eta}^{e_{t_i}} & e_p_\sigma \text{ nombre de} \\
 & & \text{nœuds sur l'arête} \\
 &= \xi \Big|_{\xi=1-\eta}^{e_{t_2}} + \eta \Big|_{\xi=1-\eta}^{e_{t_3}} = e_{t_2}(1-\eta) + e_{t_3}\eta
 \end{aligned}$$

# Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Intégration numérique
  - Quadrature de Gauss-Legendre



$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\cdot) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (\cdot) \Big|_{\xi=\xi_i, \eta=\eta_j} \omega_i \omega_j$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} (\cdot) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^r (\cdot) \Big|_{\xi=\xi_i, \eta=\eta_i} \omega_{ij}$$

$\xi_k, \eta_k$  coordonnées du point d'intégration  $k$   
 $\omega_k$  coefficient de pondération du point  $k$



Intégration sur les éléments quadrangulaires non optimale

# Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Règles unidimensionnelles appliquées aux éléments quadrangulaires

<i>Abscisse <math>\xi</math></i>	<i>Coefficient de pondération <math>\omega</math></i>	<i>Précision</i>
0.00000 00000 00000	2.00000 00000 00000	ordre 1
$\pm$ 0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000	ordre 3
0.00000 00000 00000 $\pm$ 0.77459 66692 41483	0.88888 88888 88889 0.55555 55555 55556	ordre 5
$\pm$ 0.33998 10435 84856 $\pm$ 0.86113 63115 94053	0.65214 51548 62546 0.34785 48451 37454	ordre 7
0.00000 00000 00000 $\pm$ 0.53846 93101 05683 $\pm$ 0.90617 98459 38664	0.56888 88888 88889 0.47862 86704 99366 0.23692 68850 56189	ordre 9

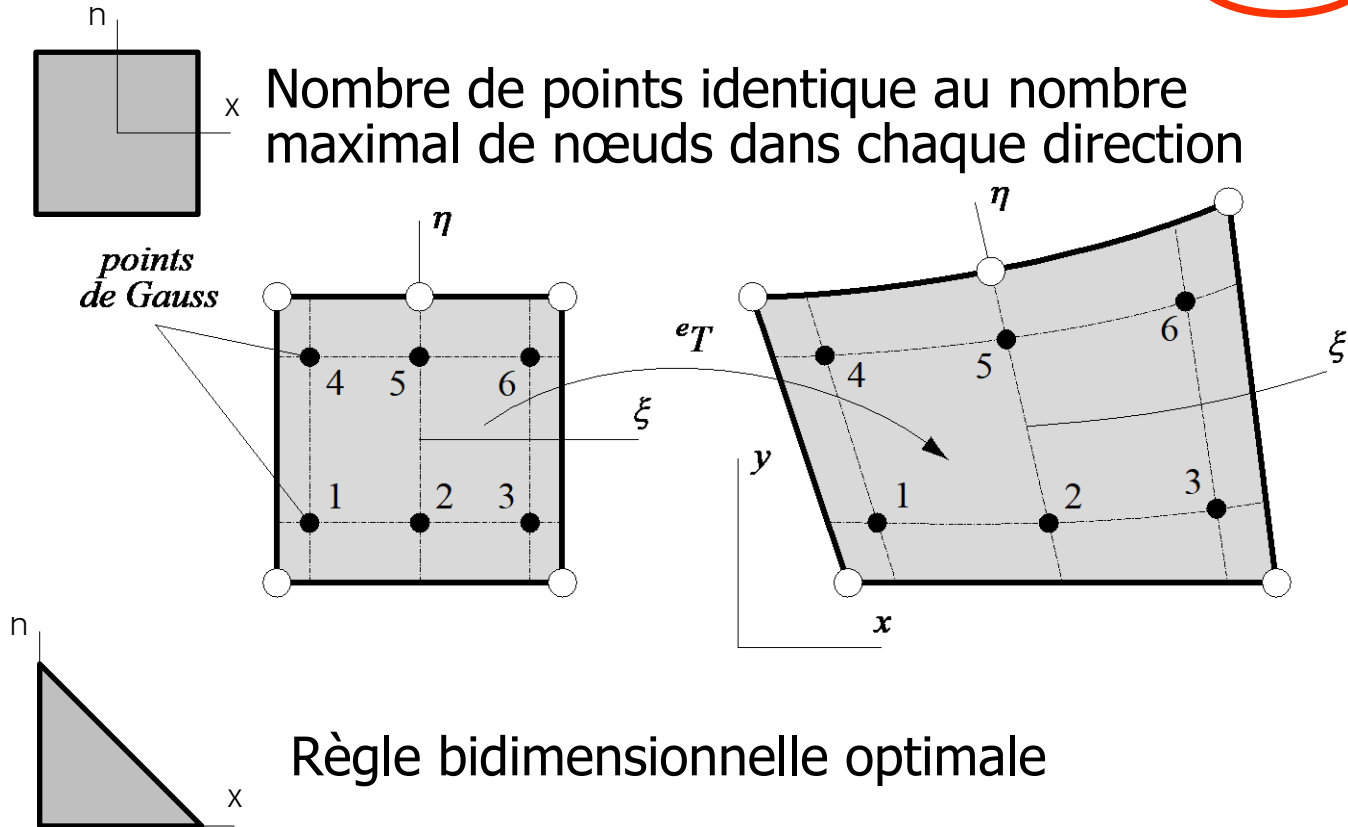
# Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Règles bidimensionnelles appliquées aux éléments triangulaires

<i>Abscisse <math>\xi</math></i>	<i>Abscisse <math>\eta</math></i>	<i>Coefficient de pondération <math>\omega</math></i>	<i>Précision</i>
0.33333 33333 33333	0.33333 33333 33333	0.50000 00000 00000	ordre 1
0.20000 00000 00000	0.20000 00000 00000	0.26041 66666 66667	ordre 3
0.60000 00000 00000	0.20000 00000 00000	0.26041 66666 66667	
0.20000 00000 00000	0.60000 00000 00000	0.26041 66666 66667	
0.33333 33333 33333	0.33333 33333 33333	- 0.28125 00000 00000	
0.10128 65073 23456	0.10128 65073 23456	0.06296 95902 72413	ordre 5
0.79742 69853 53087	0.10128 65073 23456	0.06296 95902 72413	
0.10128 65073 23456	0.79742 69853 53087	0.06296 95902 72413	
0.47014 20641 05115	0.05971 58717 89770	0.06619 70763 94253	
0.47014 20641 05115	0.47014 20641 05115	0.06619 70763 94253	
0.05971 58717 89770	0.47014 20641 05115	0.06619 70763 94253	
0.33333 33333 33333	0.33333 33333 33333	0.11250 00000 00000	

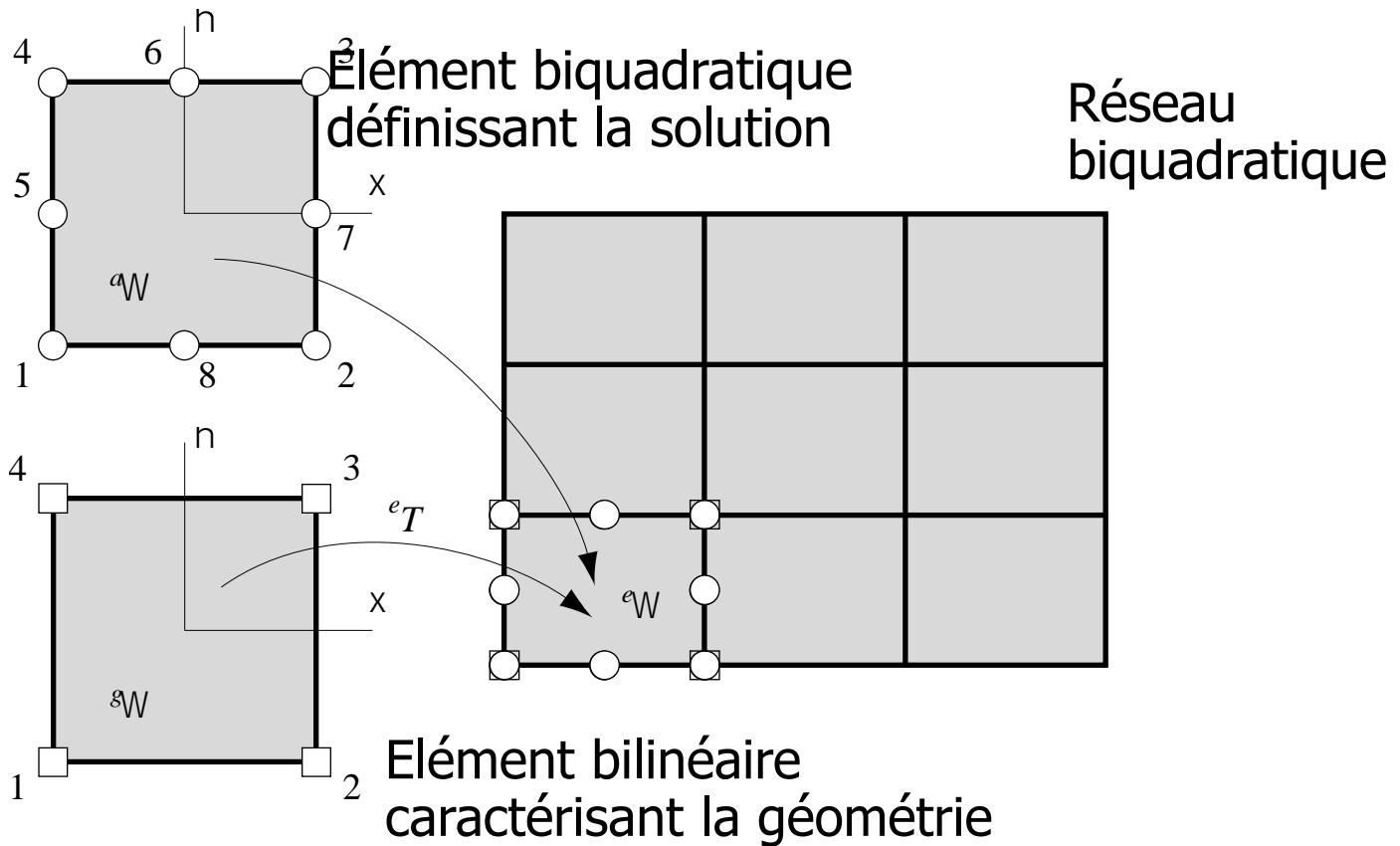
# Systematisation de la construction d'un modèle d'éléments finis 2D

- Choix du nombre de points de Gauss pour une intégration **exacte**



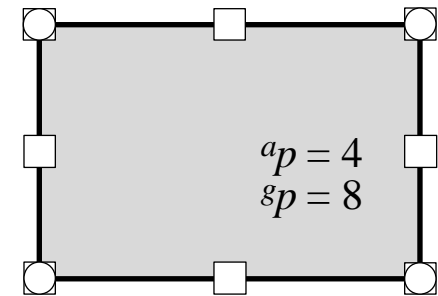
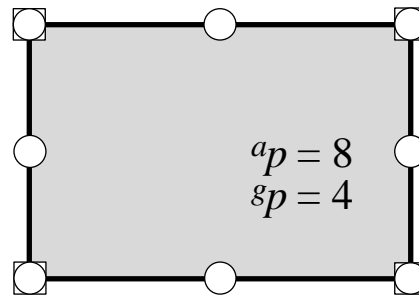
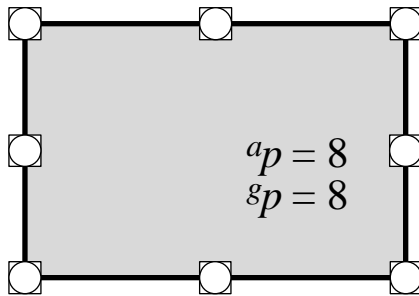
# Convergence d'un modèle d'éléments finis 2D

- Critère de complétude (*suite*)



# Convergence d'un modèle d'éléments finis 2D

- Notion d'éléments finis isoparamétrique, sous-paramétrique et superparamétrique



- *point de spécification de la fonction cherchée* ○ *point de spécification des coordonnées*

Élément isoparamétrique

Géométrie de même ordre que la solution

Élément sous-paramétrique

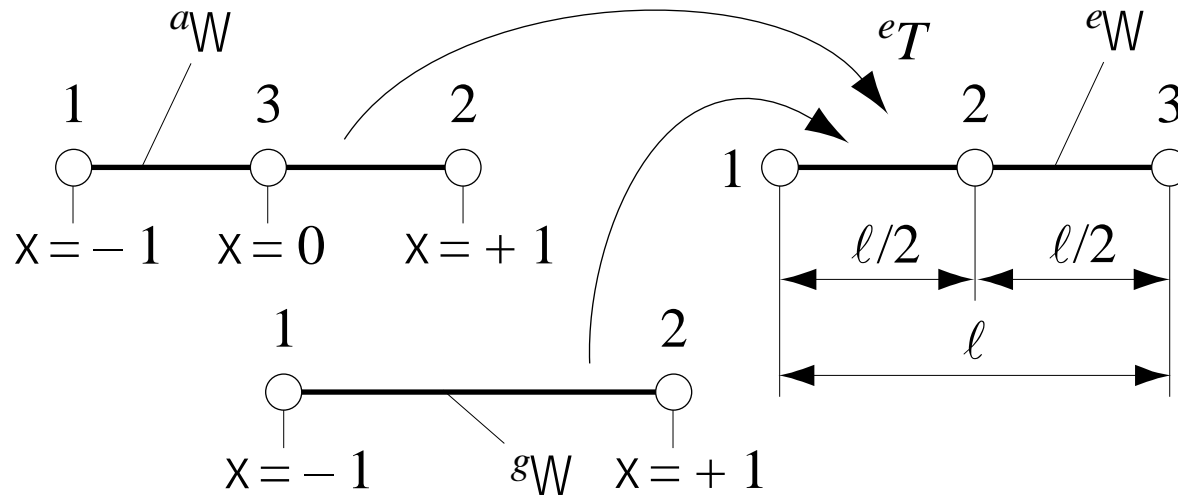
Géométrie d'un ordre inférieur à celui de la solution

Élément super-paramétrique

Géométrie d'un ordre supérieur à celui de la solution

# Convergence d'un modèle d'éléments finis 2D

- Exemple d'un élément fini sous-paramétrique bien connu



$${}^eT: x = \sum_{i=1}^3 {}^a h_i(\xi) {}^e x_i$$

$$= l(1 - \xi^2)/2 + l\xi(\xi + 1)/2 = \textcircled{l(1 + \xi)/2}$$



Transformation  
linéaire

# Précision d'un modèle d'éléments finis bidimensionnels

- Estimation  $H^1$  de l'écart entre la restriction  ${}^e u$  et son interpolation nodale  ${}^e u_I$

$$\| {}^e u - {}^e u_I \|_{1, {}^e \Omega}^2 \leq \| {}^e T^{-1} \|_1^2 \left( \max_{{}^e \Omega}({}^e j) \right) \| a u - a u_I \|_{1, a \Omega}^2$$

- Norme  $H^{k+1}$  de la restriction  ${}^e u$  transformée par les coordonnées naturelles

$$\| a u \|_{k+1, a \Omega}^2 \leq \| {}^e T \|_{k+1}^2 \frac{1}{\min_{{}^e \Omega}({}^e j)} \| {}^e u \|_{k+1, {}^e \Omega}^2$$



Influence de la transformation  
de coordonnées

# Précision d'un modèle d'éléments finis bidimensionnels

- Estimation asymptotique locale de l'erreur pour un élément fini père

$$\| {}^a u - {}^a u_I \|_{1, {}^a \Omega} \leq {}^a C_1 {}^e h^k \| {}^a u \|_{k+1, {}^a \Omega} \quad ({}^e h \rightarrow 0)$$

${}^e h$  diamètre de l'élément fini

$k$  degré de l'interpolation

${}^a C_1$  facteur de convergence



Re transcription de l'estimation asymptotique de l'erreur pour un élément fini régulier ( $e \rightarrow a$ )

# Précision d'un modèle d'éléments finis bidimensionnels

- Caractérisation de l'estimation  $H^1$  de l'écart entre la restriction  ${}^e u$  et son interpolation nodale  ${}^e u_I$

$$\begin{aligned}
 \| {}^e u - {}^e u_I \|_{1, {}^e \Omega} &\leq \| {}^e T^{-1} \|_1 [\max_{{}^e \Omega}({}^e j)]^{1/2} \| {}^a u - {}^a u_I \|_{1, {}^a \Omega} \\
 &\leq \| {}^e T^{-1} \|_1 [\max_{{}^e \Omega}({}^e j)]^{1/2} {}^a C_1 {}^e h^k \| {}^a u \|_{k+1, {}^a \Omega} \\
 &\leq \underbrace{\| {}^e T^{-1} \|_1 [\max_{{}^e \Omega}({}^e j)]^{1/2} {}^a C_1 {}^e h^k}_{\text{Identification}} \underbrace{\| {}^e T \|_{k+1}}_{\text{terme à terme}} \cdot \underbrace{[\min_{{}^e \Omega}({}^e j)]^{-1/2} \| {}^e u \|_{k+1, {}^e \Omega}}_{\text{terme à terme}}
 \end{aligned}$$



Identification  
terme à terme

- Forme standard de l'estimation  $H^1$  de l'écart entre  ${}^e u$  et  ${}^e u_I$

$$\| {}^e u - {}^e u_I \|_{1, {}^e \Omega} \leq \underbrace{{}^e C_1}_{\text{circled}} {}^e h^k \| {}^e u \|_{k+1, {}^e \Omega} \quad ({}^e h \rightarrow 0)$$

# Précision d'un modèle d'éléments finis bidimensionnels

- Lien entre les facteurs de convergence

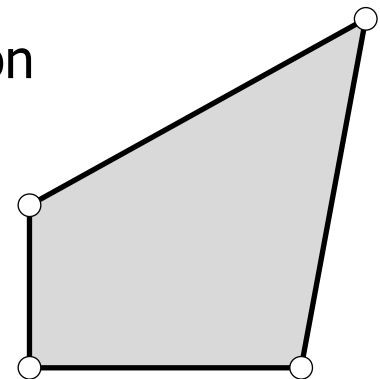
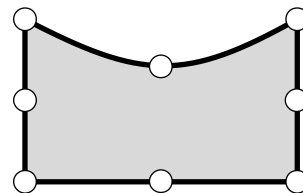
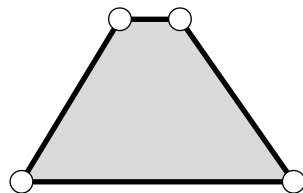
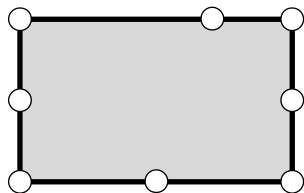
$${}^e C_1 \leq {}^a C_1 \left( \frac{\max(e_j)}{\min(e_j)} \right)_{e_\Omega}^{1/2} \|{}^e T\|_{k+1} \|{}^e T^{-1}\|_1$$



Dégradation de la précision si  $\left( \frac{\max(e_j)}{\min(e_j)} \right)_{e_\Omega}$  croît

⇒ Forme de l'élément aussi régulière que possible

- Exemples d'éléments entraînant une dégradation de la précision



# Précision d'un modèle d'éléments finis bidimensionnels

- Estimation  $H^1$  de l'erreur globale  $e^h$

$$\|e^h\|_{1,\Omega} = \|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq C_1 h^k \quad (h \rightarrow 0)$$

$h$  longueur caractéristique du réseau ( $h = \max_e e^h$ )

$k$  degré de l'interpolation

$C_1$  facteur de convergence



Longueur  $e^h$  mesurée selon le système local de coordonnées

