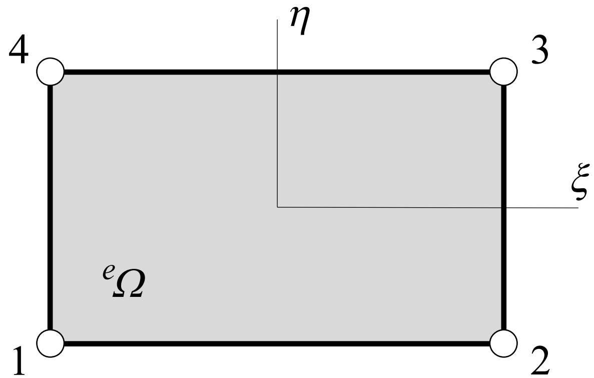
Méthode des éléments finis

Formulation intégrale des problèmes aux limites bidimensionnels

Prof. F. Gallaire

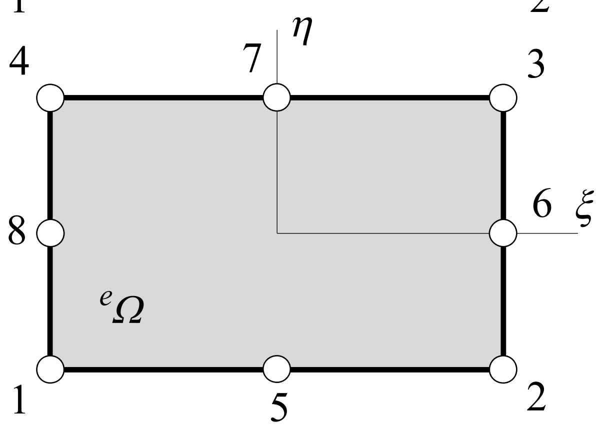
Éléments finis quadrangulaires sérendipiens

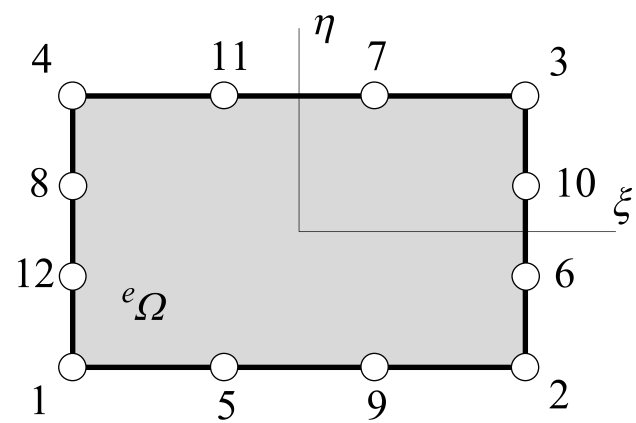
- Famille sérendipienne d'éléments finis rectangulaires réguliers



Nœuds uniquement sur la périphérie

Gain en stockage et temps calcul sans perte appréciable de précision





Éléments finis quadrangulaires sérendipiens

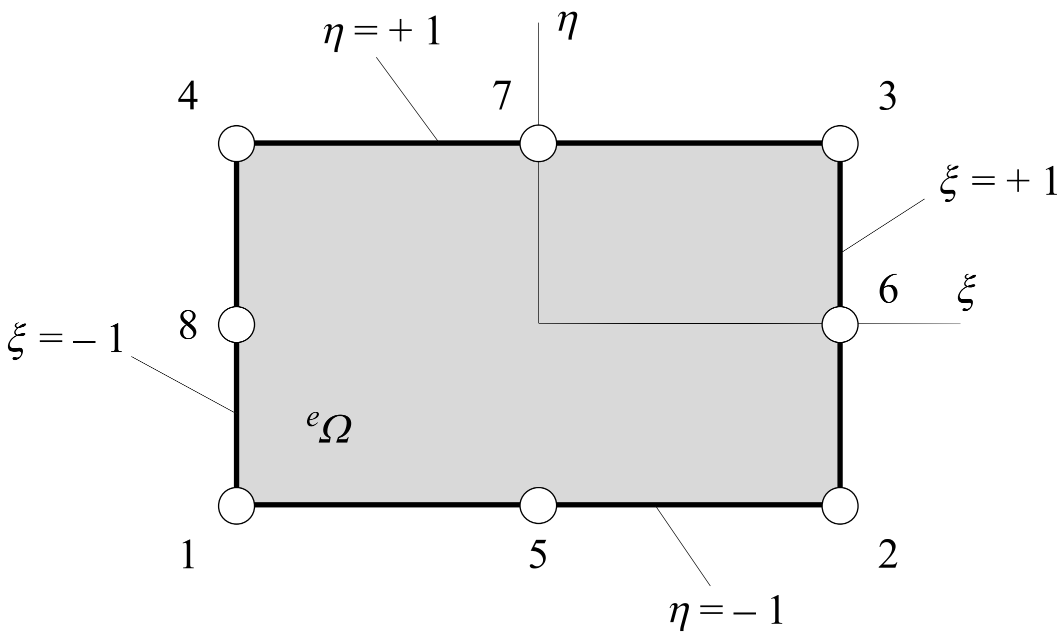
- Formule générale des fonctions de base des éléments finis rectangulaires sérendipiens

$$
\begin{aligned}
{}^{e}h_i(\xi,\eta) = {} & \frac{1}{2}(1-\eta)\,{}^{e}h_i(\xi,-1) + \frac{1}{2}(1+\xi)\,{}^{e}h_i(1,\eta) \\
& + \frac{1}{2}(1+\eta)\,{}^{e}h_i(\xi,1) + \frac{1}{2}(1-\xi)\,{}^{e}h_i(-1,\eta) \\
& - \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\,{}^{e}h_i(-1,-1) - \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\,{}^{e}h_i(1,-1) \\
& - \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\,{}^{e}h_i(1,1) - \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\,{}^{e}h_i(-1,1)
\end{aligned}
$$

! Restriction de ${}^{e}h_i(\xi,\eta)$ le long des arêtes et aux coins

Éléments finis quadrangulaires sérendipiens

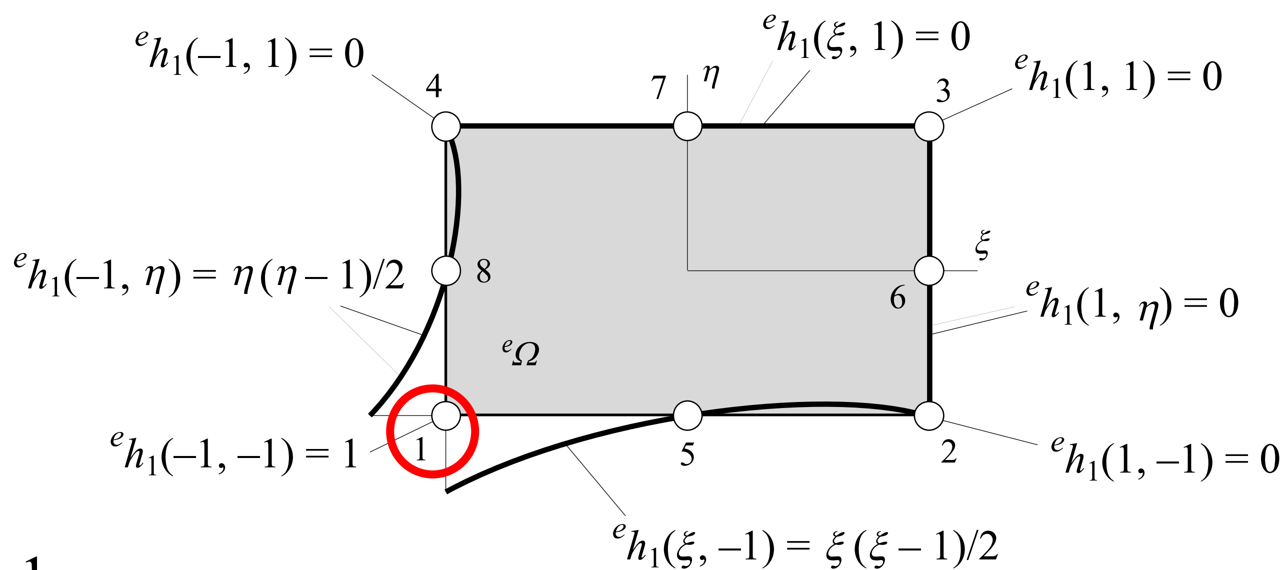
- Élément fini rectangulaire quadratique à 8 points nodaux



Numérotation des nœuds

Éléments finis quadrangulaires sérendipiens

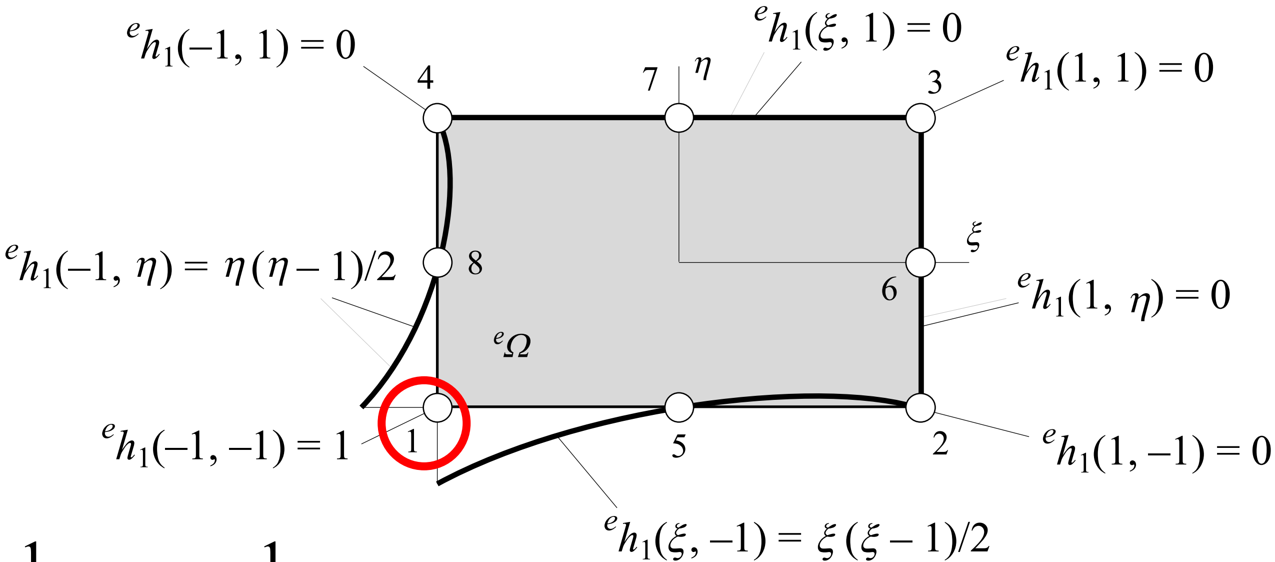
- Fonctions de base de l'élément rectangulaire quadratique (*suite*)



$$
\begin{aligned}
{}^eh_1(\xi,\eta) \;=\; & \frac{1}{2}(1-\eta)\,{}^eh_1(\xi,-1) \\
& + \frac{1}{2}(1-\xi)\,{}^eh_1(-1,\eta) - \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\,{}^eh_1(-1,-1)
\end{aligned}
$$

Éléments finis quadrangulaires sérendipiens

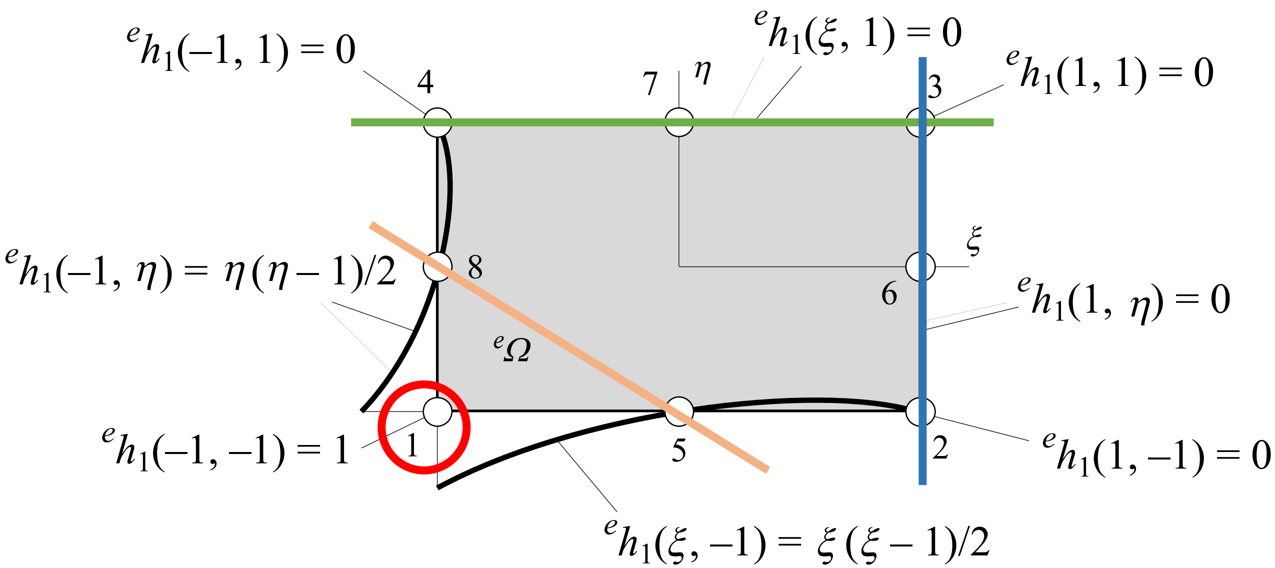
- Fonctions de base de l'élément rectangulaire quadratique (*suite*)



$$
\begin{aligned}
{}^{e}h_1(\xi,\eta) \;=\; & \frac{1}{2}(1-\eta)\cdot\frac{1}{2}\,\xi\,(\xi-1) \\
& + \frac{1}{2}(1-\xi)\cdot\frac{1}{2}\,\eta\,(\eta-1) - \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\cdot(1)
\end{aligned}
$$

Éléments finis quadrangulaires sérendipiens

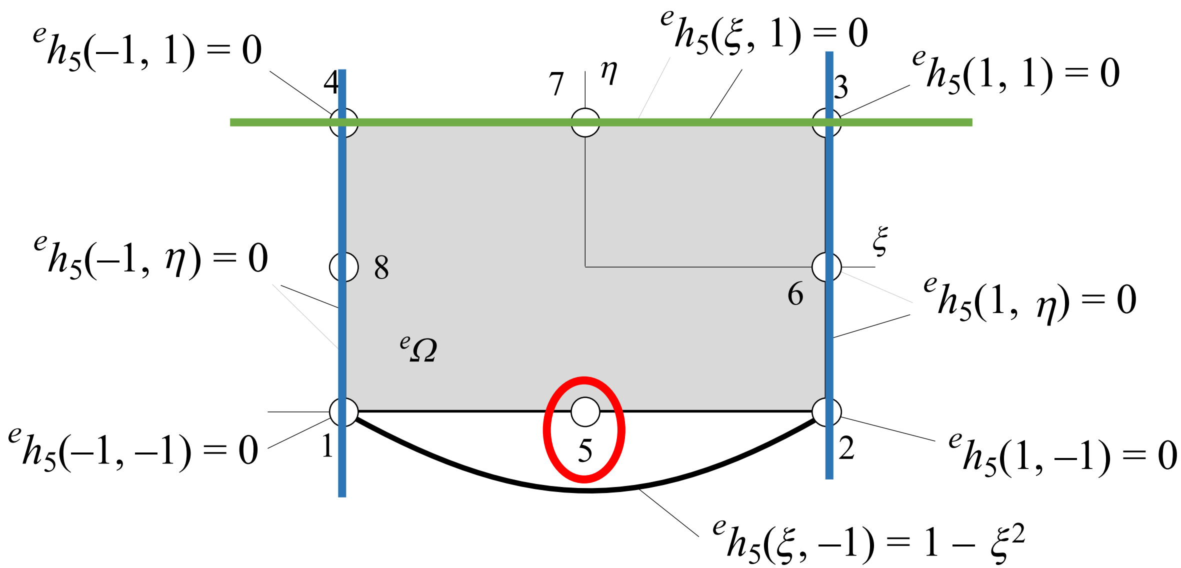
- Fonctions de base de l'élément rectangulaire quadratique (*suite*)



$$ {}^e h_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta) $$

Éléments finis quadrangulaires sérendipiens

- Fonctions de base de l'élément rectangulaire quadratique (*suite*)



$$ {}^e h_5(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(1-\eta)\,{}^e h_5(\xi,-1) = \frac{1}{2}(1-\eta)\cdot(1-\xi^2) $$

Éléments finis quadrangulaires sérendipiens

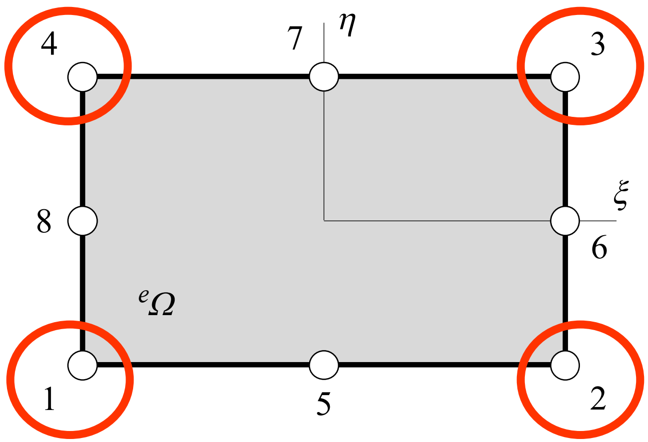
- Fonctions de base de l'élément rectangulaire quadratique (*suite*)

$$^{e}h_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta)$$

$$^{e}h_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta)$$

$$^{e}h_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta)$$

$$^{e}h_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta)$$



Élément fini biquadratique

Éléments finis quadrangulaires sérendipiens

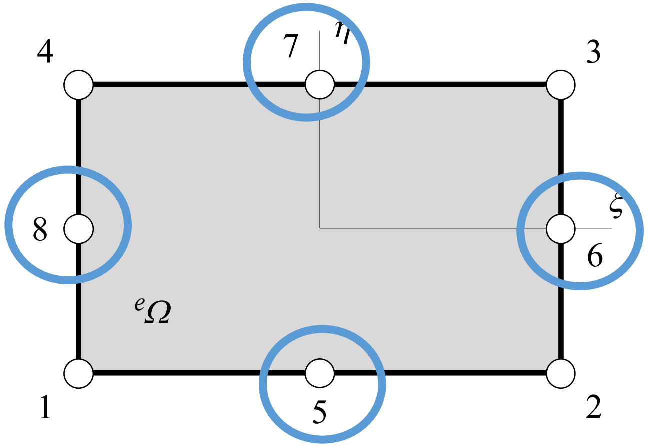
- Fonctions de base de l'élément rectangulaire quadratique (*suite*)

$$^e h_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$^e h_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$^e h_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

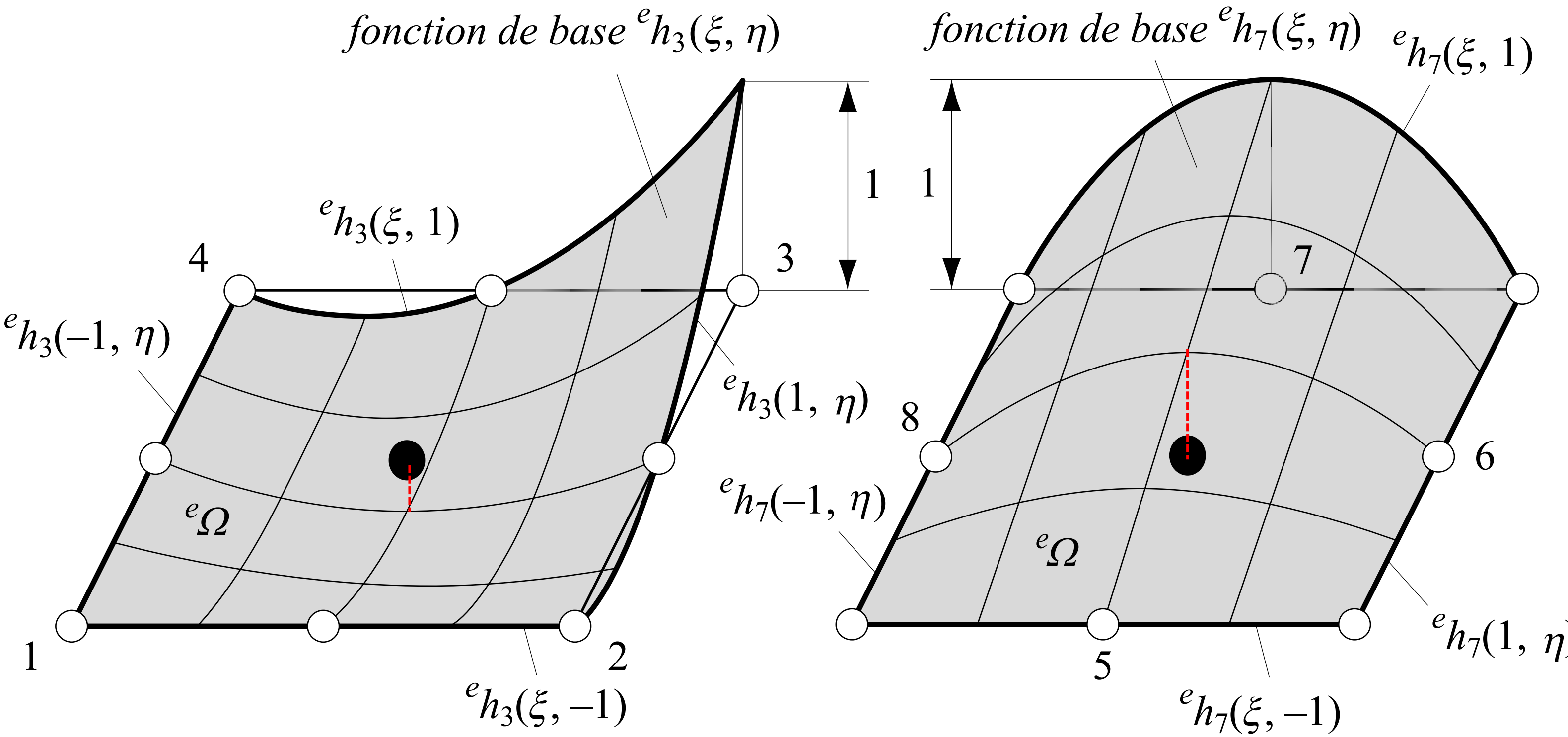
$$^e h_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$



Fonctions de base variant linéairement de face à face

Éléments finis quadrangulaires sérendipiens

- Allure des fonctions de base de l'élément rectangulaire biquadratique

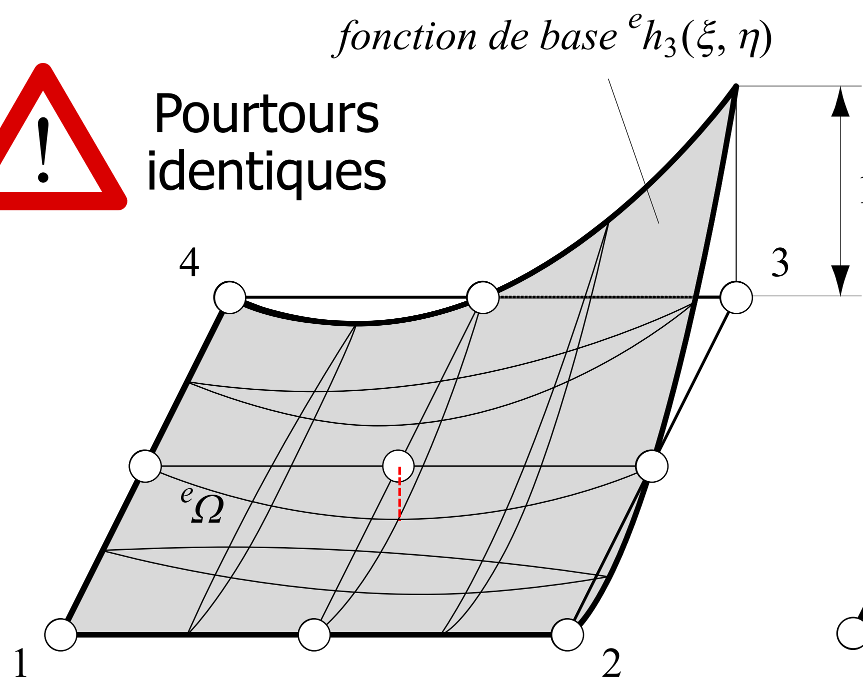


$${}^{e}h_3 = (1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta)/4 \qquad {}^{e}h_7 = (1-\xi^2)(1+\eta)/2$$

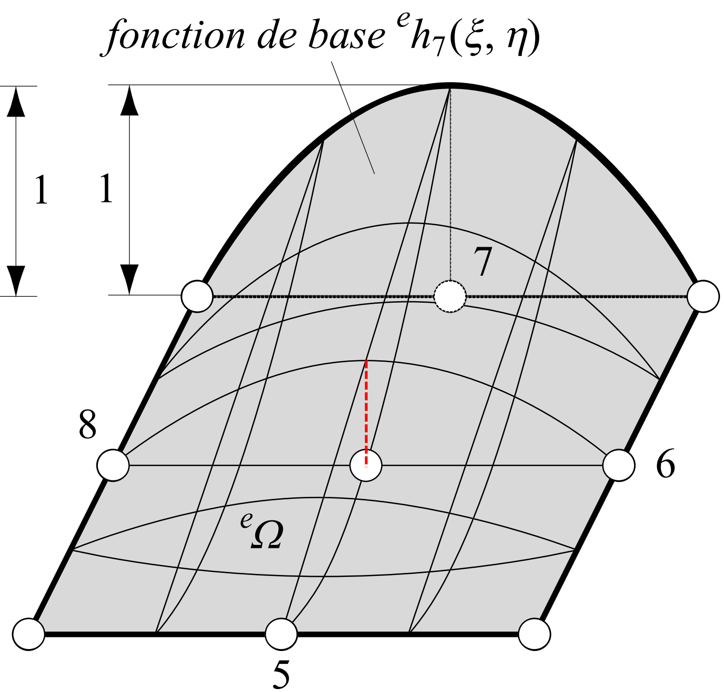
Éléments finis quadrangulaires sérendipiens

- Comparaison des fonctions de base des éléments quadratiques lagrangien et sérendipien

Pourtours identiques



$$ {}^e h_3 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi+1)(\eta+1) $$



$$ {}^e h_7 = \frac{1}{2}\eta(1-\xi^2)(\eta+1) $$

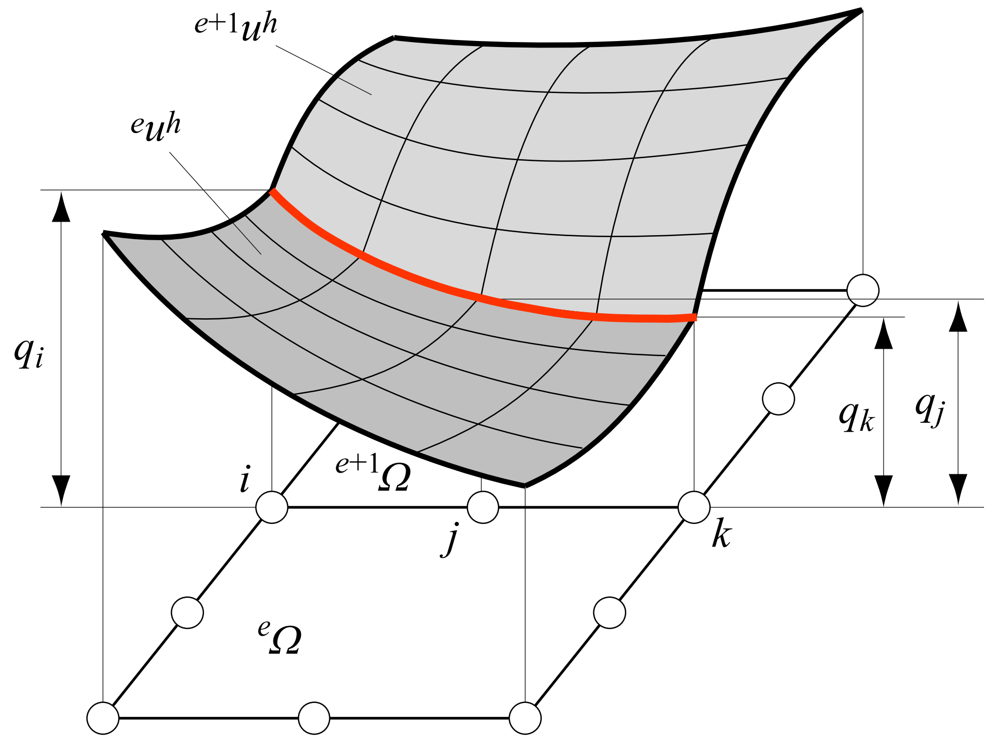
Éléments finis quadrangulaires sérendipiens

- Critères de convergence et élément biquadratique sérendipien

Complétude satisfaite

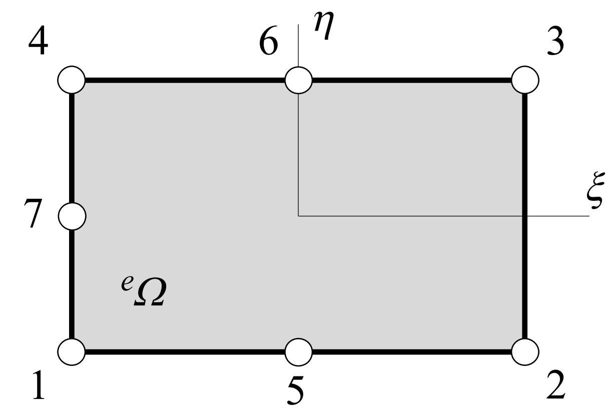
Différentiabilité satisfaite

Continuité satisfaite aux nœuds et aux interfaces



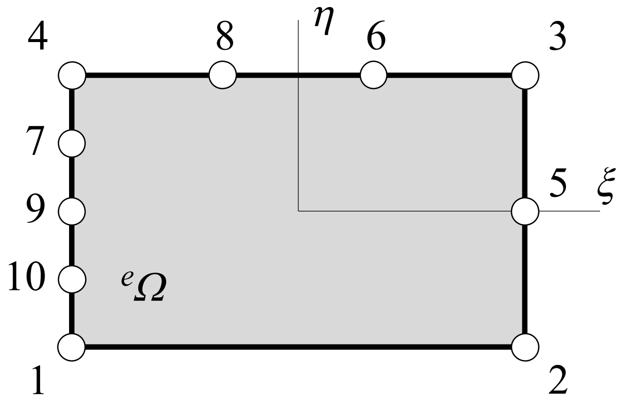
Éléments finis quadrangulaires sérendipiens

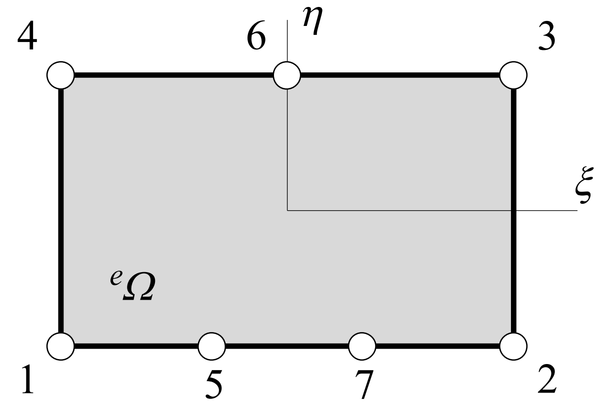
- Famille généralisée d'éléments finis rectangulaires sérendipiens



Nombre de nœuds libre sur chaque arête

Intérêt : transition entre éléments d'ordres différents

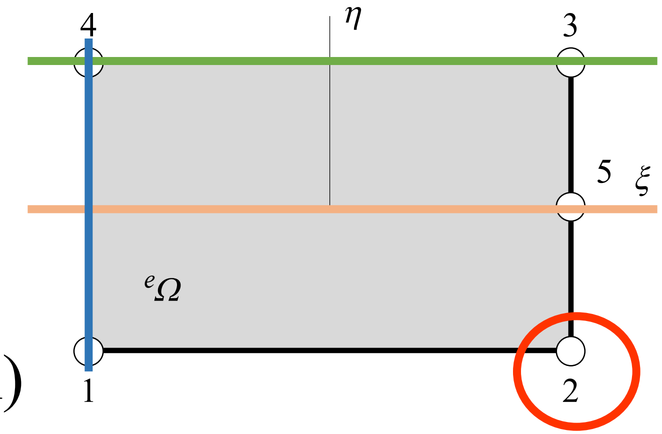




Éléments finis quadrangulaires sérendipiens

- Exemple d'un élément fini rectangulaire sérendipien généralisé

$$\begin{aligned} {}^{e}h_2 = \; & \frac{1}{2}(1-\eta)\,{}^{e}h_2(\xi,-1) \\ & + \frac{1}{2}(1+\xi)\,{}^{e}h_2(1,\eta) \\ & - \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\,{}^{e}h_2(1,-1) \end{aligned}$$

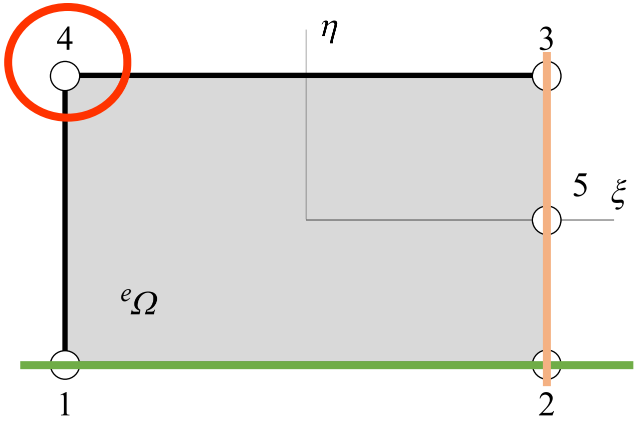


$$\begin{aligned} = \; & \frac{1}{2}(1-\eta)\cdot\frac{1}{2}(1+\xi) + \frac{1}{2}(1+\xi)\cdot\frac{1}{2}\eta(\eta-1) \\ & - \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\cdot(1) \; = \; \frac{1}{4}\eta(1+\xi)(\eta-1) \end{aligned}$$

Éléments finis quadrangulaires sérendipiens

- Exemple d'un élément fini rectangulaire sérendipien généralisé (*suite*)

$$
\begin{aligned}
{}^e h_4 = & \frac{1}{2}(1+\eta)\,{}^e h_4(\xi,1) \\
& + \frac{1}{2}(1-\xi)\,{}^e h_4(-1,\eta) \\
& - \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\,{}^e h_4(-1,1)
\end{aligned}
$$



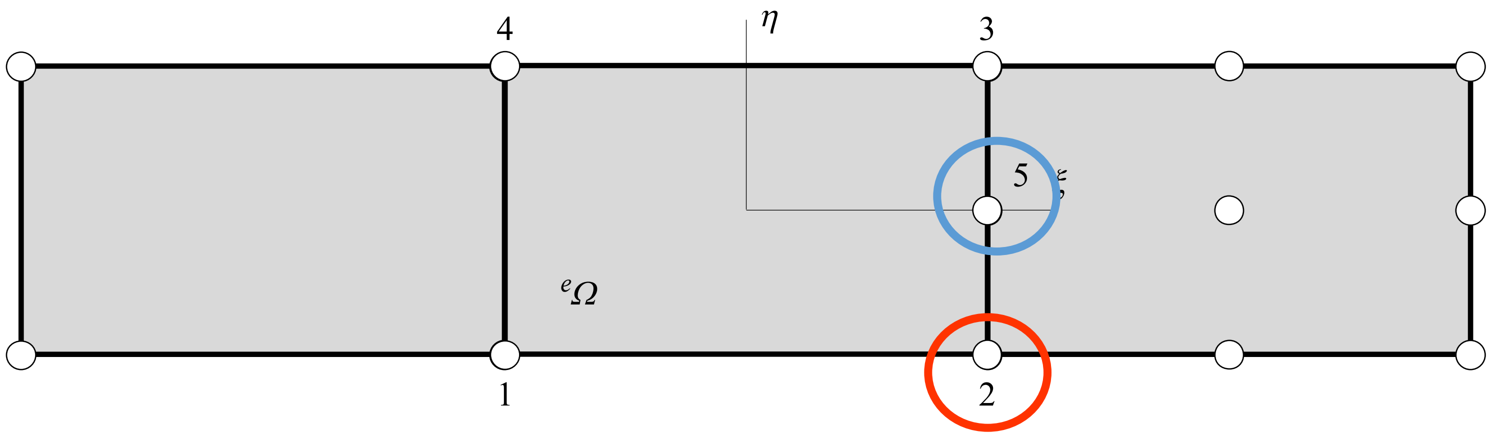
$$
= \frac{1}{2}(1+\eta)\cdot\frac{1}{2}(1-\xi)+\frac{1}{2}(1-\xi)\cdot\frac{1}{2}(1+\eta)
$$

Fonction linéaire ${}^e h_4$ inchangée

$$
-\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\cdot(1) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)
$$

Éléments finis quadrangulaires sérendipiens

- Exemple d'un élément fini rectangulaire sérendipien généralisé pour une transition bilinéaire-biquadratique



$$^e h_2 = \frac{1}{4}\,\eta(1+\xi)(\eta-1)$$

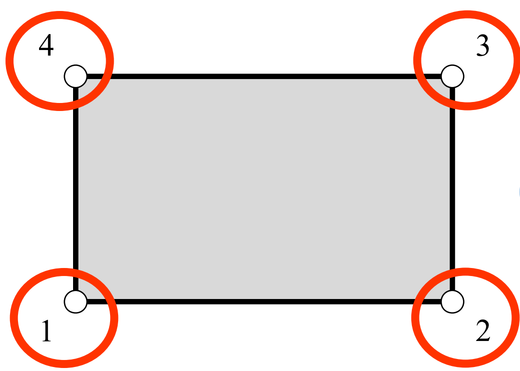
$$^e h_5 = \frac{1}{2}\,(1+\xi)\,(1-\eta^2)$$

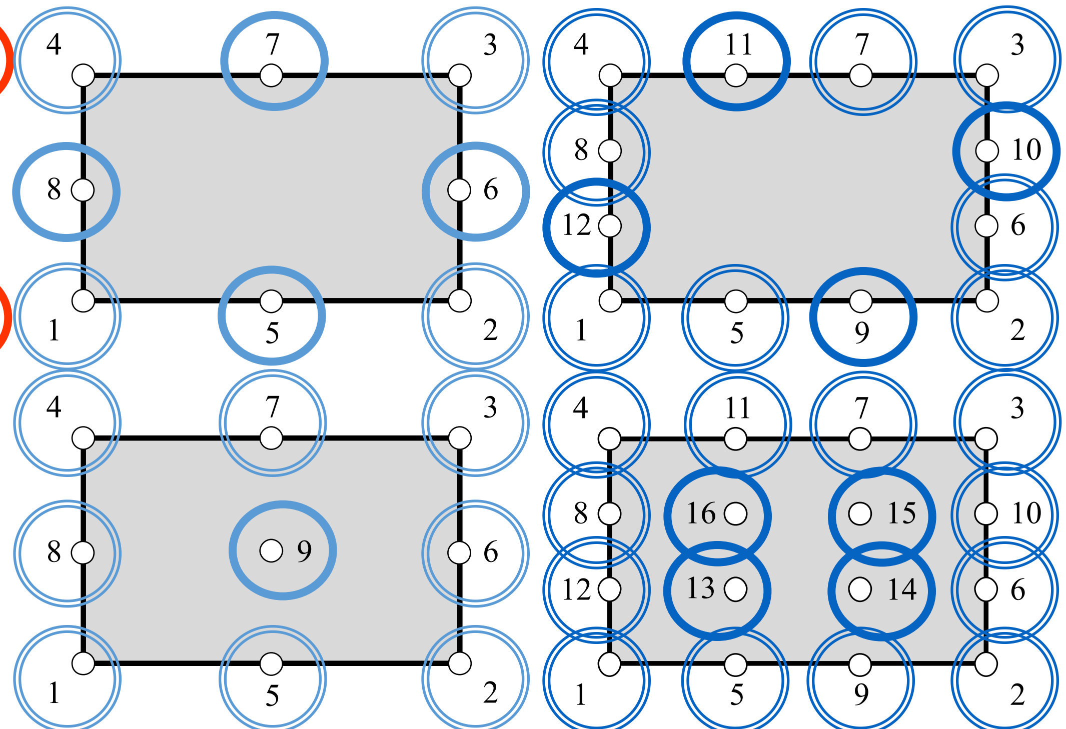
$$\left. {^e h_2^t} \right|_{\xi=1} = \left. {^e h_1^q} \right|_{\xi=-1}$$

$$\left. {^e h_5^t} \right|_{\xi=1} = \left. {^e h_8^q} \right|_{\xi=-1}$$

Éléments finis quadrangulaires lagrangiens ou sérendipiens

- Numérotation usuelle des nœuds et calcul des fonctions de base





Fonctions de base

- linéaires
- quadratiques
- cubiques

Correction des fonctions de base quadratiques

Seules fonctions stockées

linéaires

Éléments finis quadrangulaires lagrangiens ou sérendipiens

- Construction des fonctions de base des éléments rectangulaires

Fonctions de base des nœuds 1 à 4 de coin

$$^{e}h_1 = 0.25\ (1-\xi)\ (1-\eta) \qquad ^{e}h_3 = 0.25\ (1+\xi)\ (1+\eta)$$
$$^{e}h_2 = 0.25\ (1+\xi)\ (1-\eta) \qquad ^{e}h_4 = 0.25\ (1-\xi)\ (1+\eta)$$

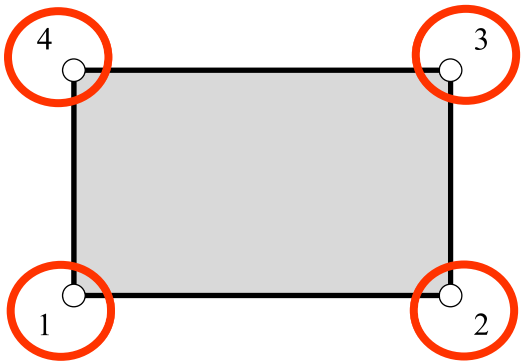
Fonctions de base des nœuds 5 à 8 de côté

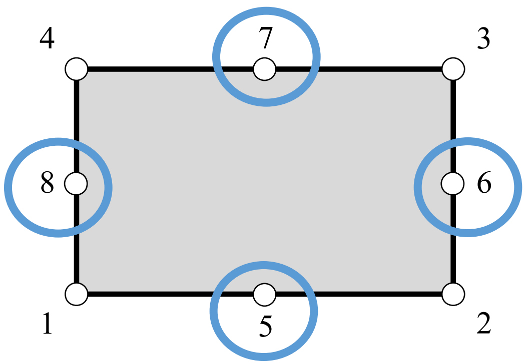
$^{e}h_5 = 0.5\ (1-\xi^2)\ (1-\eta)$ si le nœud 5 est présent; sinon $^{e}h_5 = 0$

$^{e}h_6 = 0.5\ (1+\xi)\ (1-\eta^2)$ si le nœud 6 est présent; sinon $^{e}h_6 = 0$

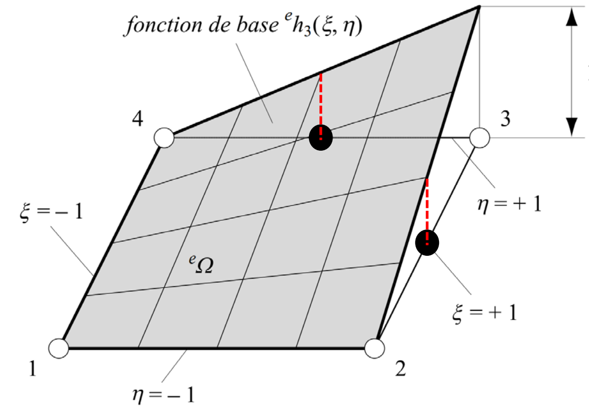
$^{e}h_7 = 0.5\ (1-\xi^2)\ (1+\eta)$ si le nœud 7 est présent; sinon $^{e}h_7 = 0$

$^{e}h_8 = 0.5\ (1-\xi)\ (1-\eta^2)$ si le nœud 8 est présent; sinon $^{e}h_8 = 0$





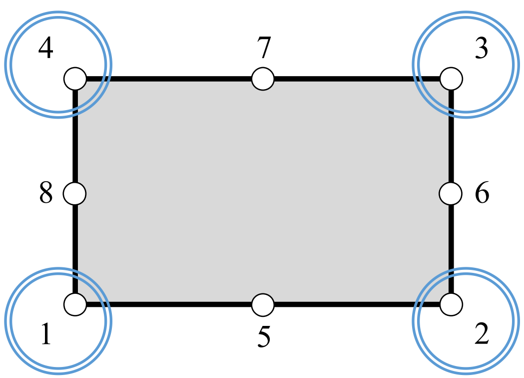
Éléments finis quadrangulaires lagrangiens ou sérendipiens



- Construction des fonctions de base (*suite*)

Correction des fonctions de base des nœuds de coin

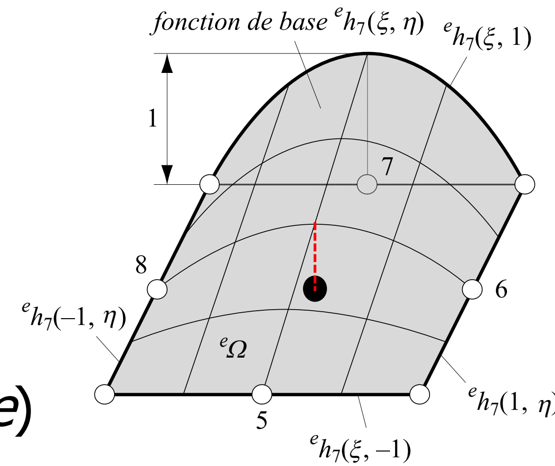
$$
\begin{aligned}
{}^eh_1 &\leftarrow {}^eh_1 - 0.5\,({}^eh_8 + {}^eh_5) &\qquad {}^eh_3 &\leftarrow {}^eh_3 - 0.5\,({}^eh_6 + {}^eh_7) \\
{}^eh_2 &\leftarrow {}^eh_2 - 0.5\,({}^eh_5 + {}^eh_6) &\qquad {}^eh_4 &\leftarrow {}^eh_4 - 0.5\,({}^eh_7 + {}^eh_8)
\end{aligned}
$$



Critère de déplacement rigide (température uniforme)

$$\sum_{i=1}^{{}^ep} {}^eh_i(x,y) = 1$$

Éléments finis quadrangulaires lagrangiens ou sérendipiens



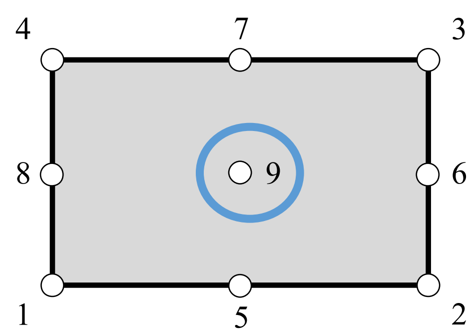
- Construction des fonctions de base (*suite*)

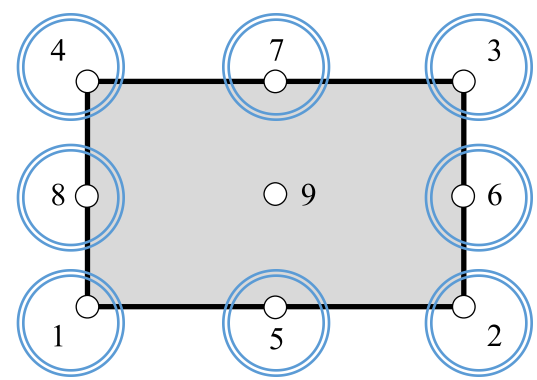
Fonction de base du nœud interne 9 (élément biquadratique lagrangien)

$^e h_9 \;=\; (1-\xi^2)\;(1-\eta^2)$ si l'élément est biquadratique lagrangien; sinon $^e h_9 \;=\; 0$

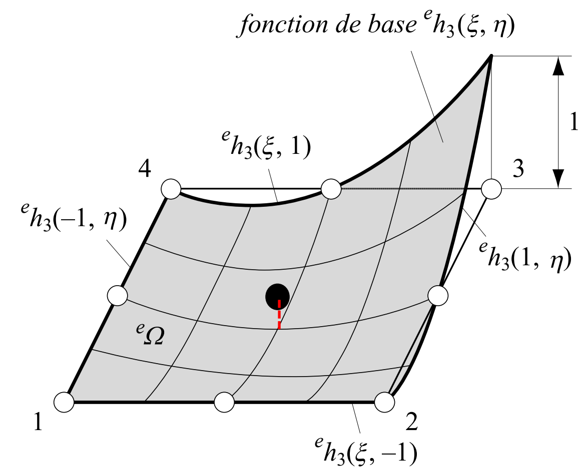
Correction des fonctions de base des nœuds de coin et de côté

$^e h_i \;\leftarrow\; {}^e h_i \;+\; 0.25\;{}^e h_9 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad {}^e h_i \;\leftarrow\; {}^e h_i \;-\; 0.5\;{}^e h_9 \quad (i = 5, 6, 7, 8)$



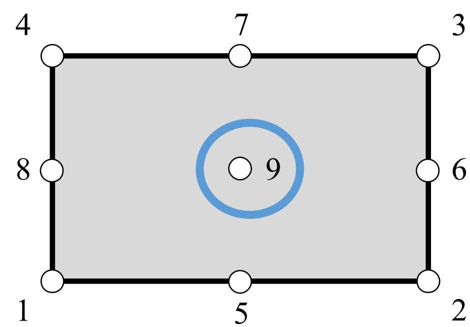


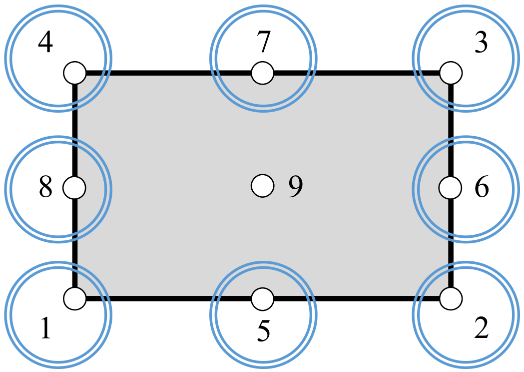
Éléments finis quadrangulaires lagrangiens ou sérendipiens



- Construction des fonctions de base (*suite*)

Fonction de base du nœud interne 9 (élément biquadratique lagrangien)
${}^eh_9 = (1-\xi^2)\ (1-\eta^2)$ si l'élément est biquadratique lagrangien; sinon ${}^eh_9 = 0$
Correction des fonctions de base des nœuds de coin et de côté
${}^eh_i \leftarrow {}^eh_i + 0.25\ {}^eh_9 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad {}^eh_i \leftarrow {}^eh_i - 0.5\ {}^eh_9 \quad (i = 5, 6, 7, 8)$





Éléments finis quadrangulaires lagrangiens ou sérendipiens

- Exemple d'application

$$ {}^{e}h_5 = 0.5(1+\xi)(1-\eta^2) \equiv {}^{e}h_6 $$

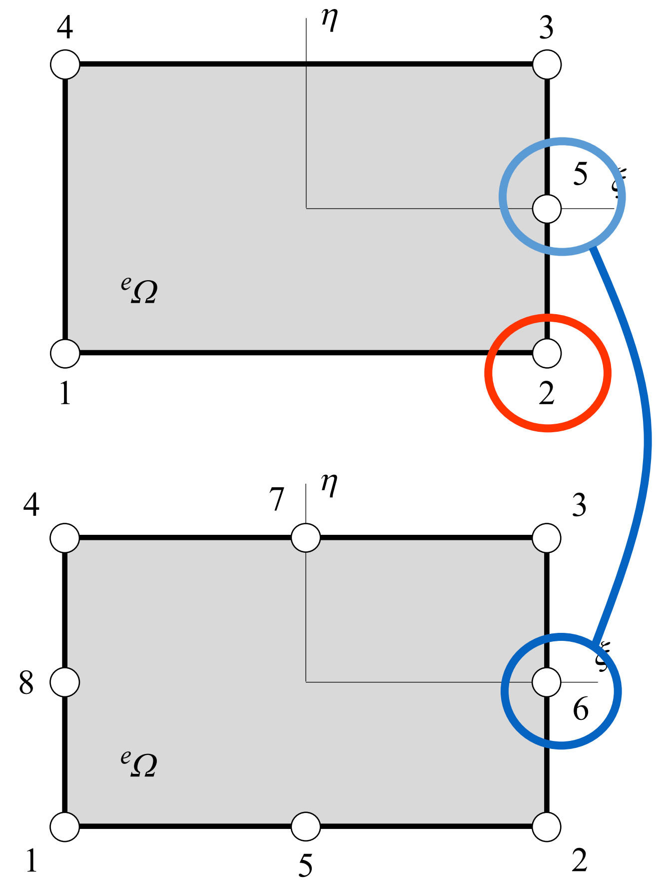
$$ {}^{e}h_2 \leftarrow {}^{e}h_2 - 0.5\,{}^{e}h_6 $$

$$ = 0.25(1+\xi)(1-\eta) $$

$$ - 0.5(0.5)(1+\xi)(1-\eta^2) $$

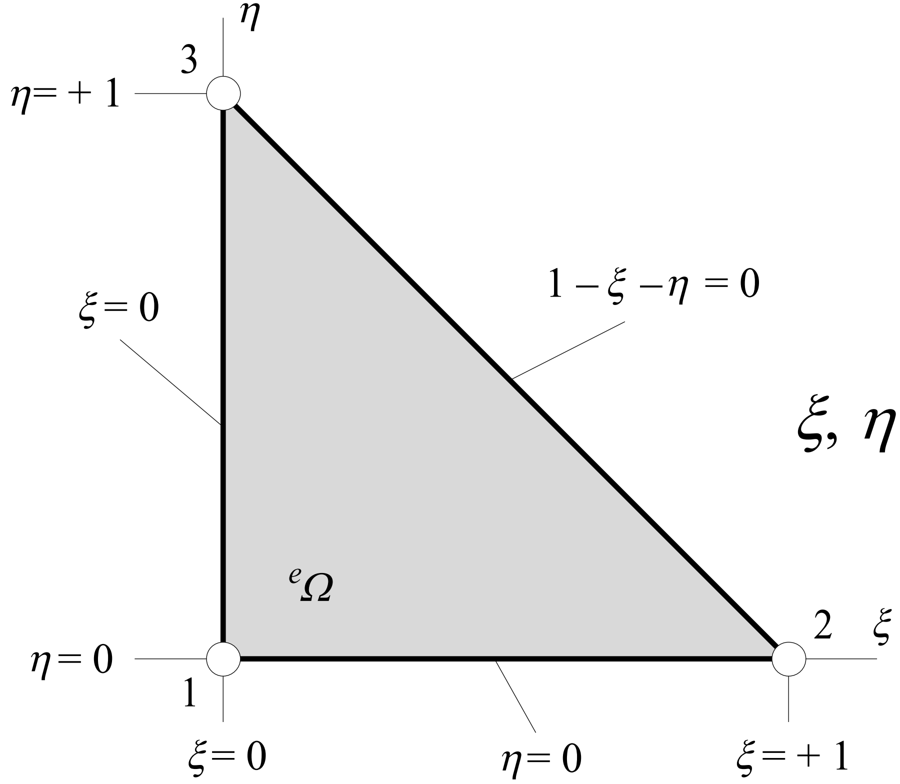
$$ = 0.25\eta(1+\xi)(\eta-1) $$

Numérotation des nœuds



Éléments finis triangulaires

- Élément fini triangulaire (isocèle) rectangle linéaire à 3 nœuds



ξ, η coordonnées naturelles

Éléments finis triangulaires

- Fonctions de base de l'élément triangulaire rectangle

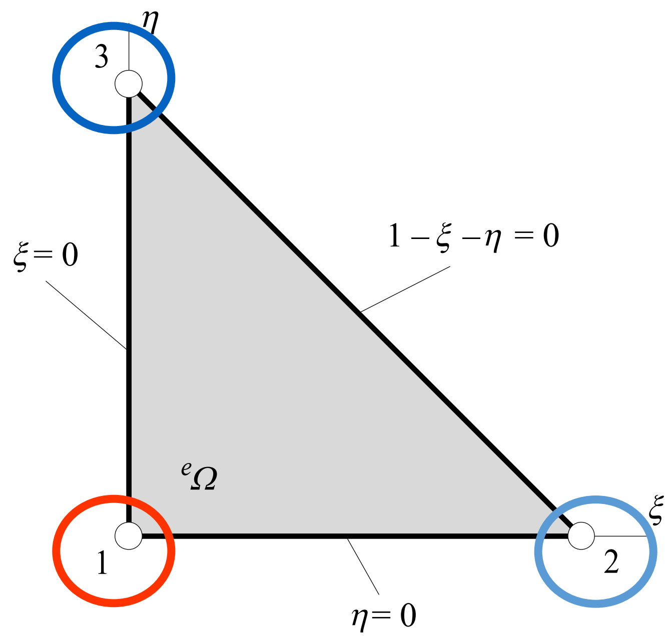
$$^{e}h_1 = 1 - \xi - \eta$$

$$^{e}h_2 = \xi$$

$$^{e}h_3 = \eta$$

Fonctions linéaires en ξ et η

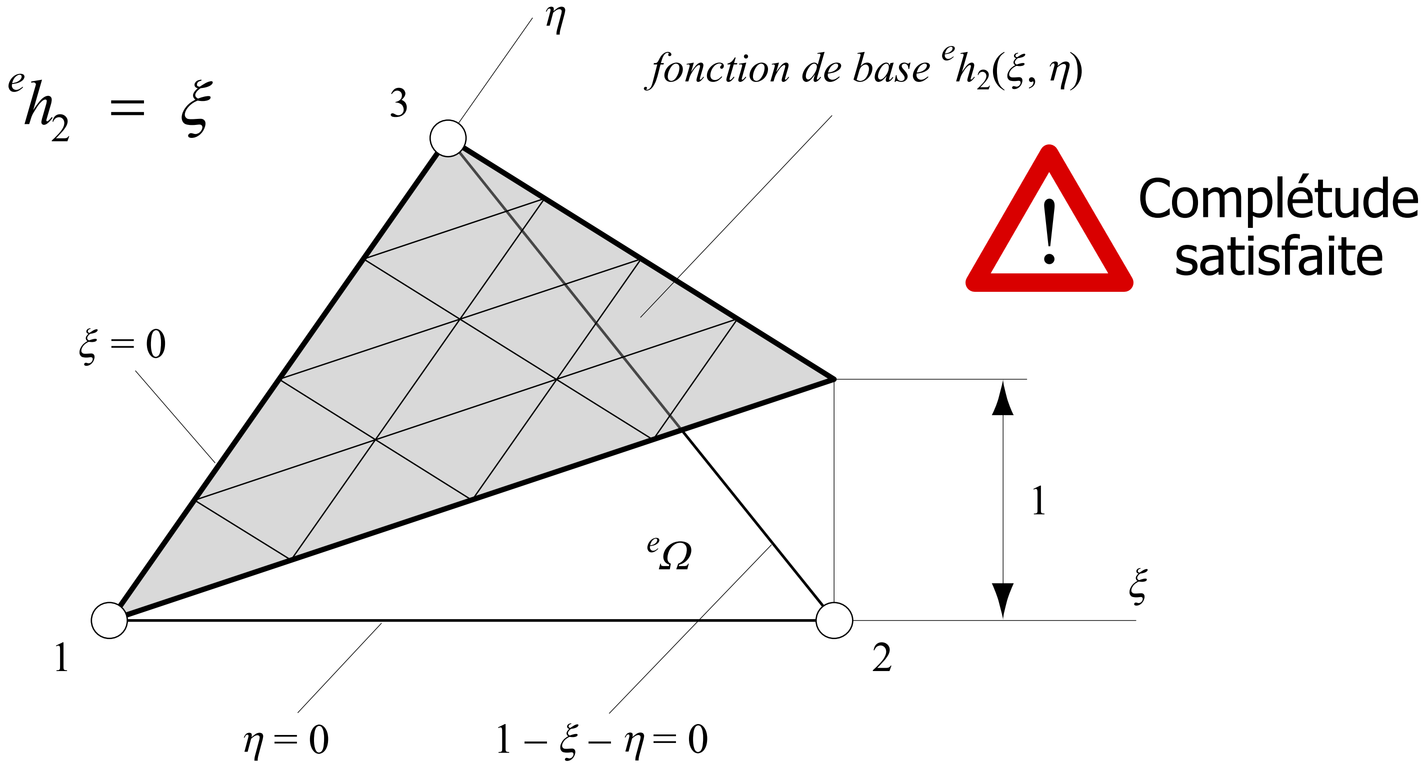
$\Rightarrow$ Élément fini bilinéaire



Différentiabilité satisfaite

Éléments finis triangulaires

- Allure des fonctions de base de l'élément triangulaire bilinéaire

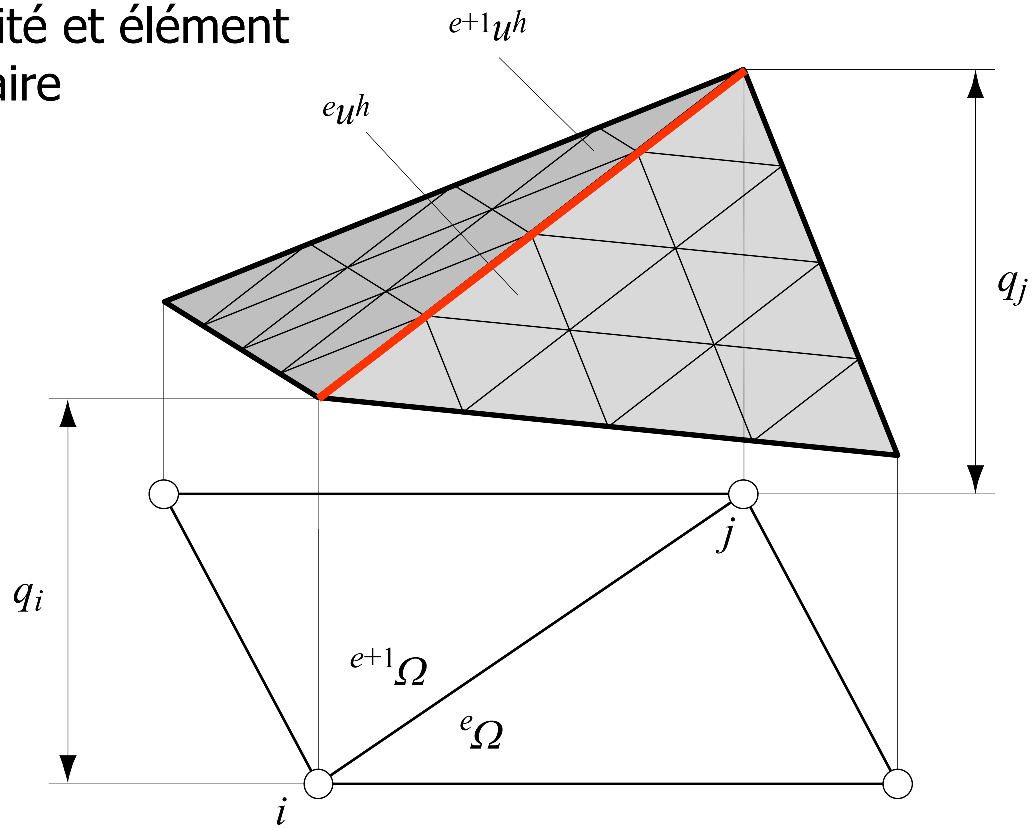


Éléments finis triangulaires

- Critère de continuité et élément triangulaire bilinéaire

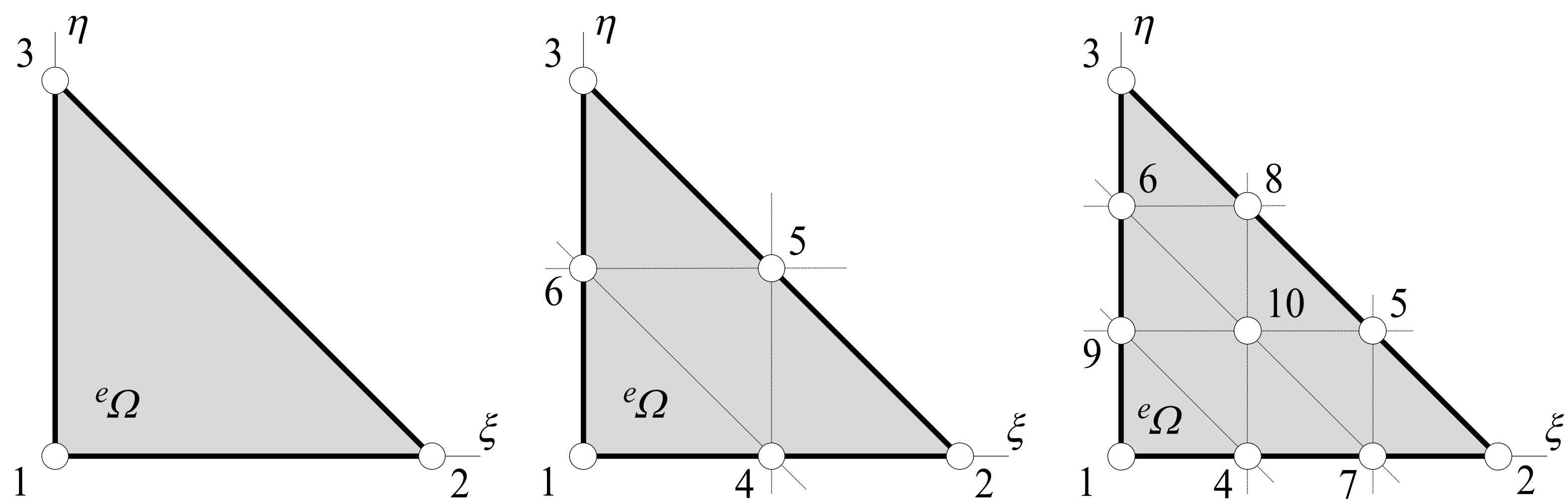
Continuité satisfaite aux nœuds et aux interfaces

Élément compatible ou conforme



Éléments finis triangulaires

- Famille d'éléments finis triangulaires rectangles

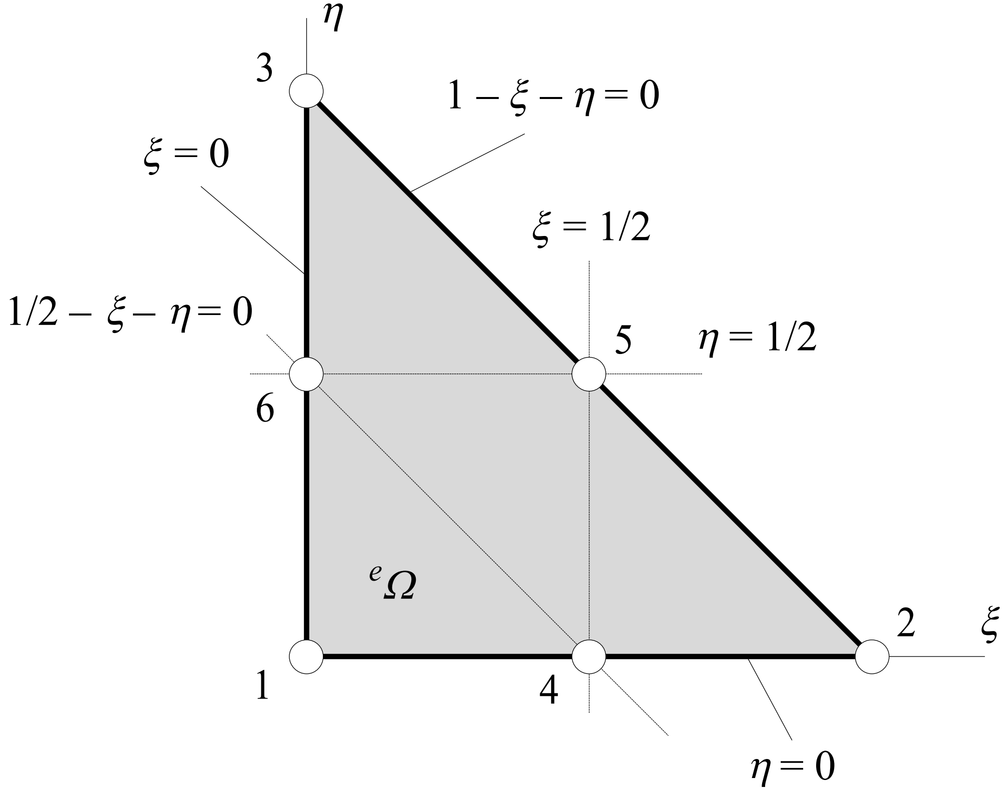


Fonctions de base = produits normés de formes linéaires

Intérêt : accroissement de la précision

Éléments finis triangulaires

- Élément fini triangulaire quadratique à 6 points nodaux



Éléments finis triangulaires

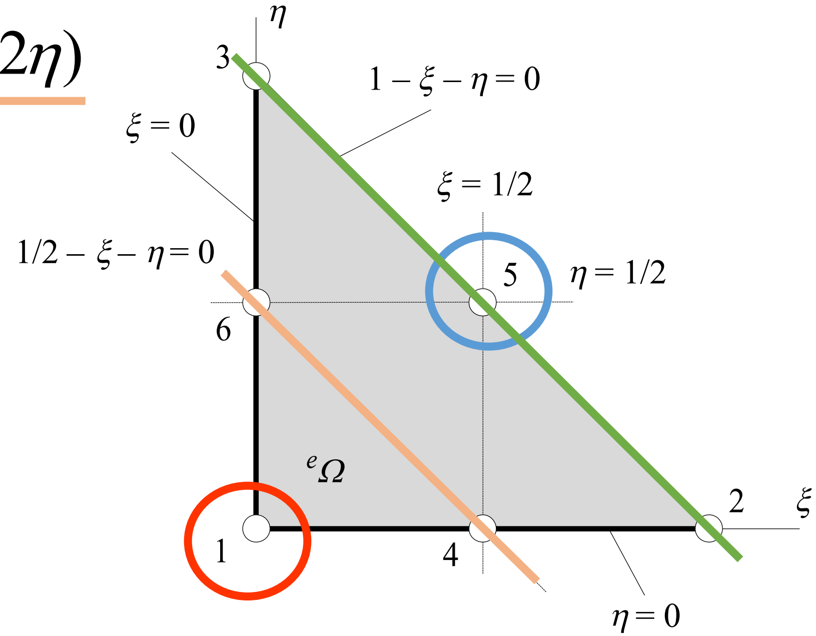
- Fonctions de base de l'élément triangulaire quadratique

$$
\begin{aligned}
{}^{e}h_1 &= (1-\xi-\eta)\cdot\left(\frac{1}{2}-\xi-\eta\right)\cdot 2 \\
&= (1-\xi-\eta)(1-2\xi-2\eta)
\end{aligned}
$$

$$
{}^{e}h_5 = \xi\eta\cdot 4 = 4\xi\eta
$$

Normalisation

Surabondance de monômes



Éléments finis triangulaires

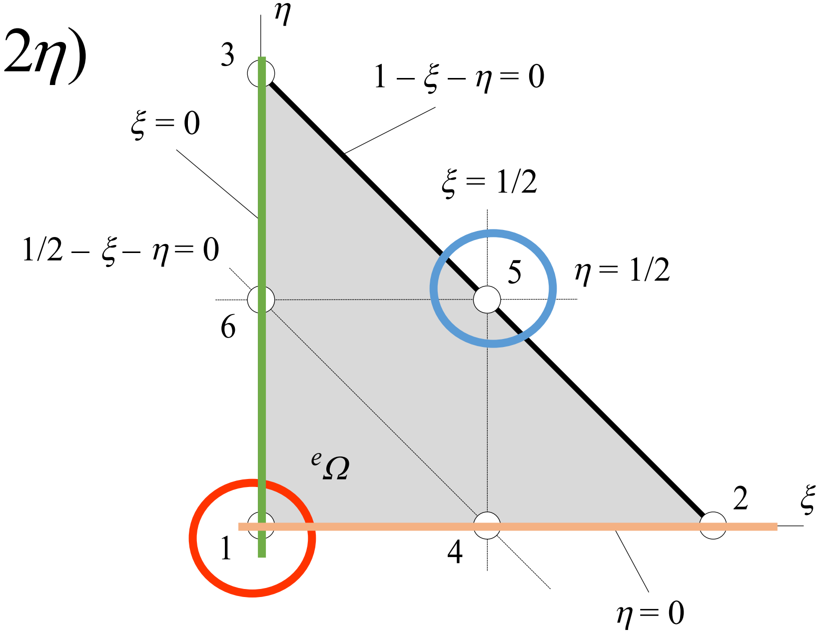
- Fonctions de base de l'élément triangulaire quadratique

$$ {}^{e}h_1 = (1-\xi-\eta)\cdot(\frac{1}{2}-\xi-\eta)\cdot 2 $$
$$ = (1-\xi-\eta)(1-2\xi-2\eta) $$

$$ {}^{e}h_5 = \xi\eta\cdot 4 = 4\xi\eta $$

Normalisation

Surabondance de monômes

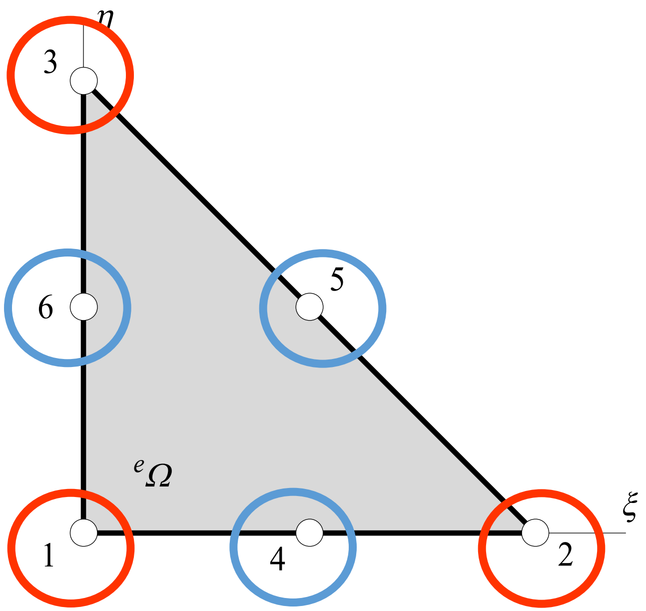


Éléments finis triangulaires

- Fonctions de base de l'élément triangulaire quadratique (*suite*)

$$
\begin{aligned}
{}^e h_1 &= (1-\xi-\eta)(1-2\xi-2\eta) \\
{}^e h_2 &= \xi(2\xi-1) \\
{}^e h_3 &= \eta(2\eta-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^e h_4 &= 4\xi(1-\xi-\eta) \\
{}^e h_5 &= 4\xi\eta \\
{}^e h_6 &= 4\eta(1-\xi-\eta)
\end{aligned}
$$

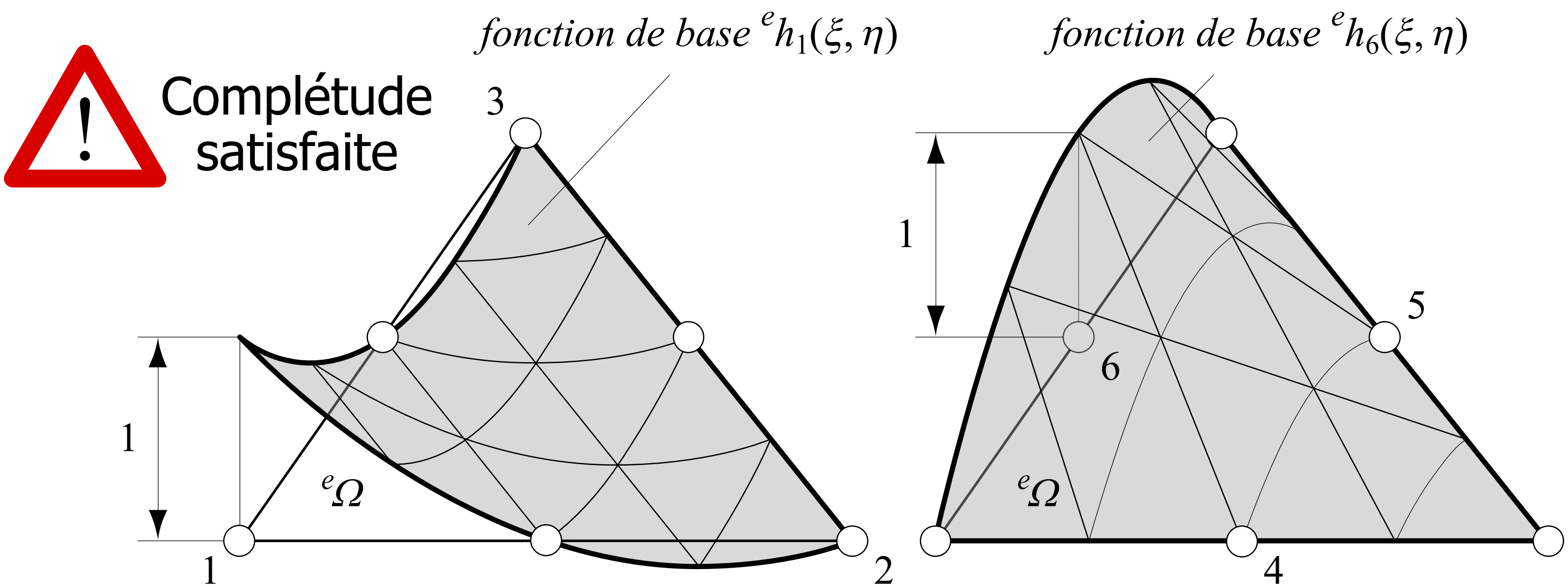


Élément fini <u>biquadratique</u>

Différentiabilité satisfaite

Éléments finis triangulaires

- Allure des fonctions de base de l'élément triangulaire biquadratique



$$^eh_1 = (1-\xi-\eta)(1-2\xi-2\eta)$$

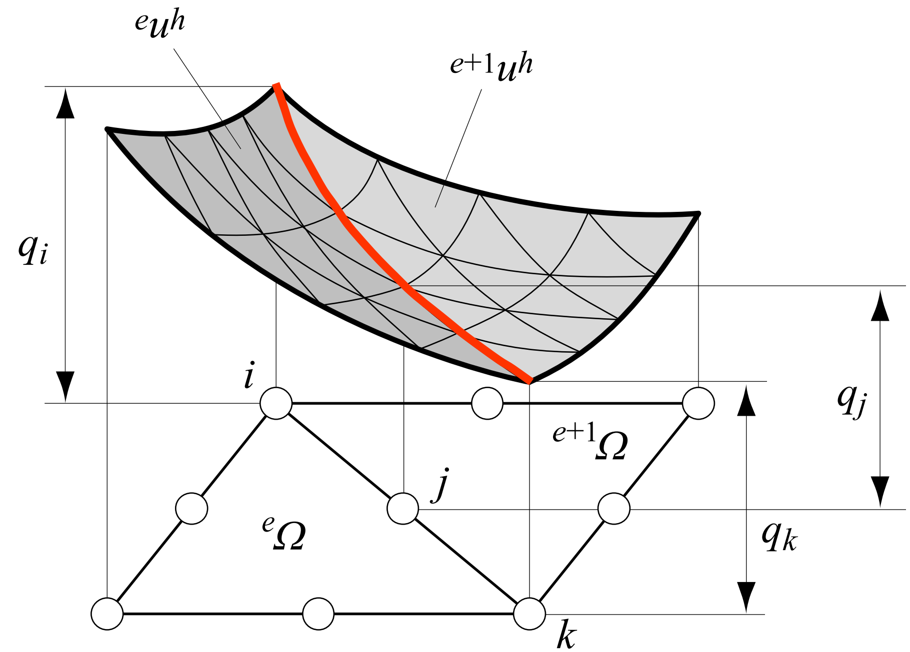
$$^eh_6 = 4\eta(1-\xi-\eta)$$

Éléments finis triangulaires

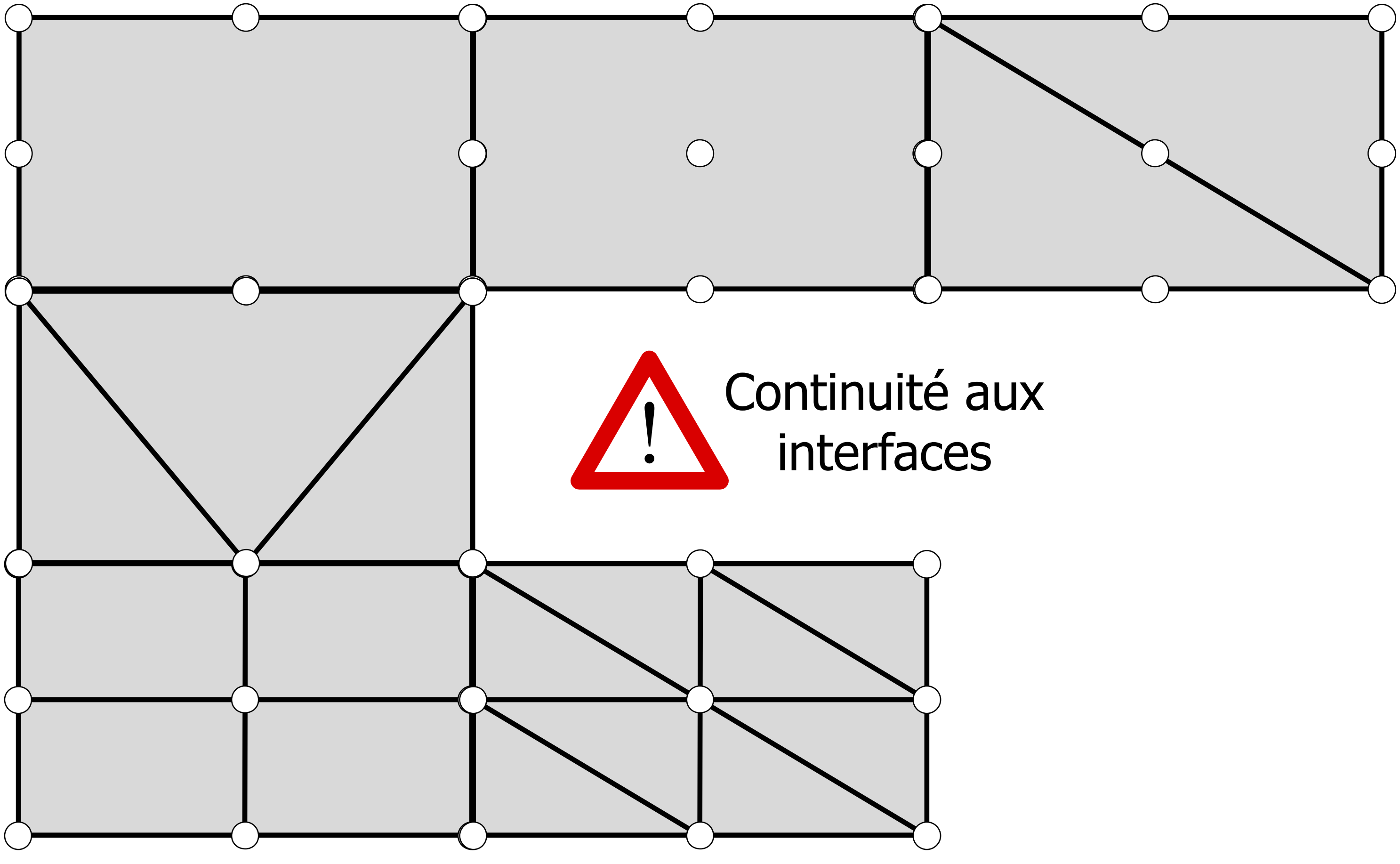
- Critère de continuité et élément triangulaire biquadratique

Continuité satisfaite aux nœuds et aux interfaces

Élément compatible ou conforme



Réseau d’éléments finis quadrangulaires et triangulaires



Continuité aux interfaces

Précision des éléments finis bidimensionnels réguliers

- Estimation asymptotique locale de l'erreur

$$\| {}^e u - {}^e u_I \|_{1,\, {}^e\Omega} \leq {}^e C_1 \, {}^e h^k \, \| {}^e u \|_{k+1\, ,\, {}^e\Omega} \qquad ({}^e h \to 0)$$

${}^e u_I$ interpolation nodale

${}^e C_1$ facteur de convergence

${}^e h$ «diamètre» de l'élément fini ${}^e\Omega$

k degré des fonctions de base (interpolation)

Plus grande distance entre deux nœuds

Norme H^1

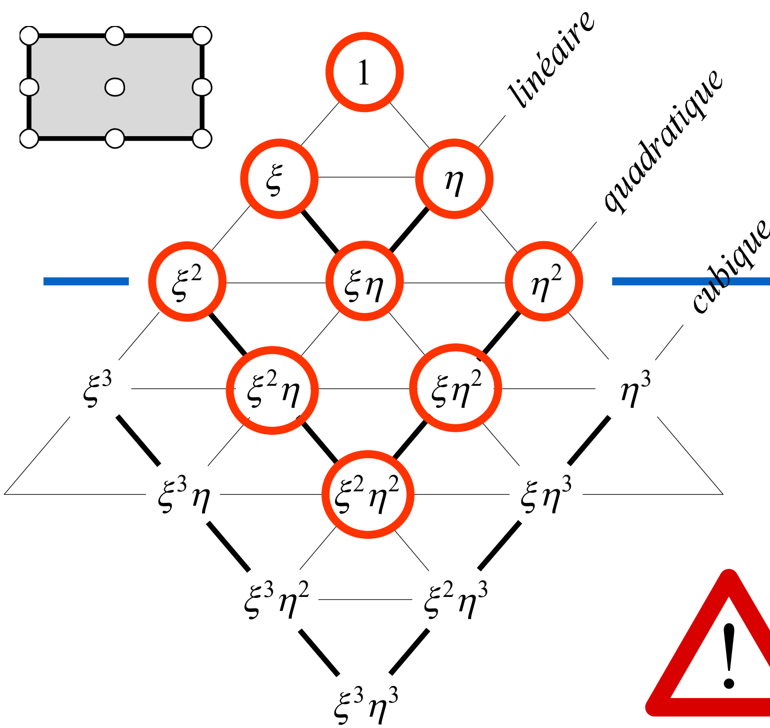
Coefficient dépendant de la forme de l'élément

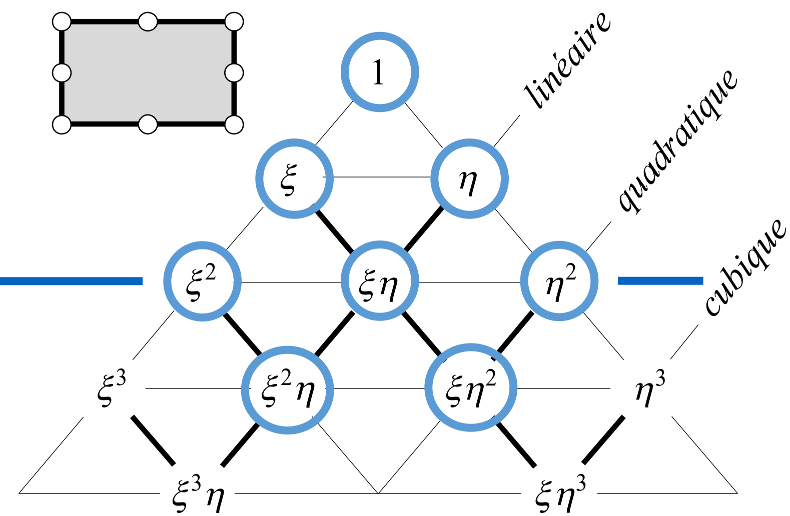
Critère de complétude

Facteur lié à la régularité de la solution

Précision des éléments finis bidimensionnels réguliers

- Complétude des éléments finis (triangles de Pascal)

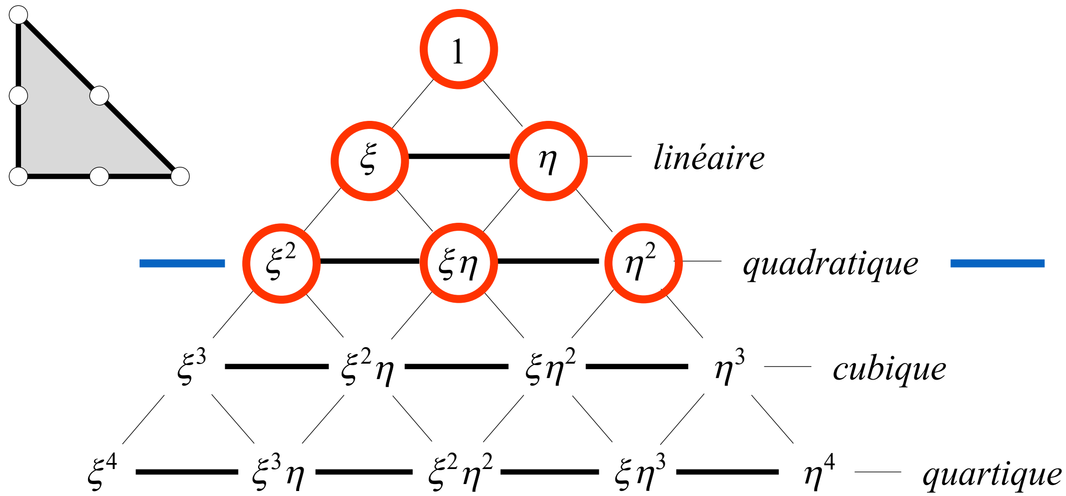




Polynômes complets uniquement au 2ème degré

Précision des éléments finis bidimensionnels réguliers

- Complétude des éléments finis (*suite*)



Polynômes complets au 2ème degré

Précision des éléments finis bidimensionnels réguliers

- Estimation asymptotique de l'erreur (norme H^1)

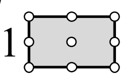
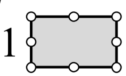
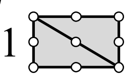
$$\| e^h \|_{1,\,\Omega} = \| u - u^h \|_{1,\,\Omega} \leq C_1\, h^k \qquad (h \to 0)$$

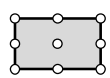
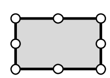
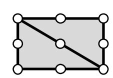
e^h écart entre solutions exacte u et approchée u^h

C_1 facteur de convergence

h longueur caractéristique du réseau ($h = \max\limits_{e} {}^e h$)

k taux de convergence (degré du polynôme complet)

Coefficient dépendant de la forme de l'élément C_1  $\leq C_1$  $\leq C_1$ 

Critère de complétude    $k = 2$