

Méthode des éléments finis

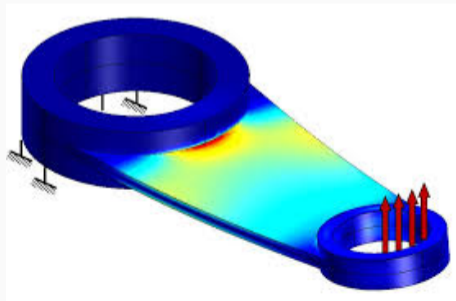
Développement d'éléments finis d'ordre supérieur

ME-372 Méthode des éléments finis

2025-2026

François Gallaire

Stefano Burzio



Plan

- Résumé de la semaine 6
- Éléments finis lagrangiens d'ordre supérieur
- Exemple d'application : barre encastrée comportant des discontinuités
- Précision d'un modèle d'éléments finis d'ordre supérieur
- Exemple d'application : analyse modale d'une barre bi-encastrée

Références bibliographiques

- ① T. Gmür, Méthode des éléments finis (§§ 3.3.4 – §§ 3.3.6)
- ② T. Hughes, The finite element method (§§ 3.6)

Résumé de la semaine 6

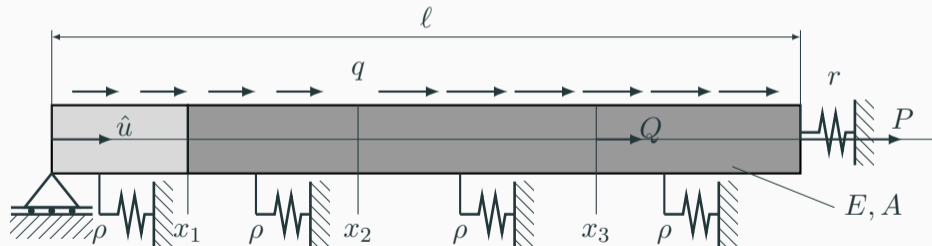
Élastostatique du barreau généralisé

Discontinuité
matérielle

Discontinuités
des charges

Conditions aux limites
non-homogènes et mixtes

Charge axiale
proportionnelle
au déplacement



Formulation
forte

Formulation
faible

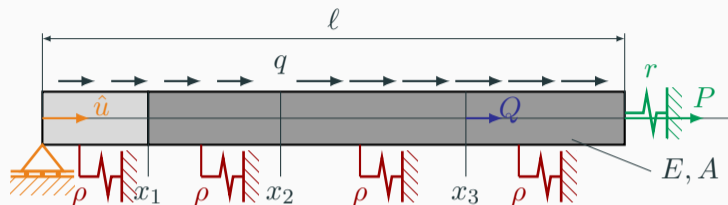
Formulation
faible
approchée

Formulation
faible
discrète

Calcul
des contributions
élémentaires

Traitement
des conditions
aux limites

Forme faible du barreau généralisé



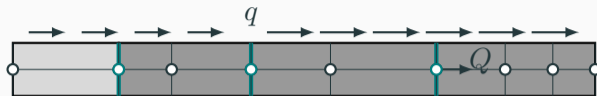
Trouver le déplacement axial $u \in \mathcal{U}$ tel que pour tout $\delta u \in \mathcal{V}$, on ait :

$$\int_0^\ell \left[EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} + \rho u \delta u \right] dx + r u(\ell) \delta u(\ell) = Q \delta u(x_3) + P \delta u(\ell) + \int_0^\ell q \delta u dx$$

Classes des fonctions admissibles :

$$\mathcal{U} = \{u \in H^1(]0, \ell[), u(0) = \hat{u}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{V} = \{\delta u \in H^1(]0, \ell[), \delta u(0) = 0\}$$

Forme faible discrète du barreau généralisé



$$u(x) \approx u^h(x) = \mathbf{H}(x)\mathbf{q} = \sum_{i=1}^p h_i(x)q_i \quad \text{et} \quad \delta u(x) \approx \delta u^h(x) = \mathbf{H}(x)\delta\mathbf{q} = \sum_{i=1}^p h_i(x)\delta q_i$$

Determiner le vecteur \mathbf{q} tel que $q_1 = \hat{u}$ et pour tout $\delta\mathbf{q}$ tel que $\delta q_1 = 0$, on ait

$$\delta\mathbf{q}^T(\mathbf{G}\mathbf{q} - \mathbf{r}) = 0.$$

où

$$\mathbf{G} = \int_0^\ell \left[EA \frac{d\mathbf{H}^T}{dx} \frac{d\mathbf{H}}{dx} + \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} \right] dx + r \mathbf{H}^T(\ell) \mathbf{H}(\ell)$$

$$\mathbf{r} = Q \mathbf{H}^T(x_3) + P \mathbf{H}^T(\ell) + \int_0^\ell q \mathbf{H}^T dx$$

Évaluation des contributions élémentaires selon l'approche locale

- La matrice de rigidité globale \mathbf{G} et le vecteur de charge global \mathbf{r} sont assemblés à partir des contributions élémentaires:

$$\mathbf{G} = r\mathbf{H}^T(\ell)\mathbf{H}(\ell) + \underset{e=1}{\overset{m}{\mathbf{A}}} {}^e\mathbf{G} \quad \text{et} \quad \mathbf{r} = Q\mathbf{H}^T(x_3) + P\mathbf{H}^T(\ell) + \underset{e=1}{\overset{m}{\mathbf{A}}} {}^e\mathbf{r}$$

- La contribution élémentaire à la matrice de rigidité est donnée par :

$${}^e\mathbf{G} = \int_{{}^e\Omega} {}^eE^e A \frac{d{}^e\mathbf{H}^T}{dx} \frac{d{}^e\mathbf{H}}{dx} + {}^e\rho^e \mathbf{H}^T {}^e\mathbf{H} dx = \frac{{}^eE^e A}{{}^e\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{{}^e\rho^e \ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- La contribution élémentaire au vecteur de charge est donnée par :

$${}^e\mathbf{r} = \int_{{}^e\Omega} {}^e q^e \mathbf{H}^T dx$$

Traitement de la condition aux limites essentielle non homogène

- Après assemblage, le système global d'équations est donné par :

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{G} \mathbf{q} - \mathbf{r}) = 0.$$

- En imposant la condition essentielle $q_1 = \hat{u}$ et $\delta q_1 = 0$, le système est réduit à :

g_{22}	g_{23}	0		0
g_{32}	g_{33}	g_{34}		
0	g_{43}	g_{44}		
			\ddots	
0				g_{pp}

 \cdot

q_2
q_3
q_4
\vdots
q_p

 $=$

$r_2 - g_{21} \hat{u}$
r_3
r_4
\vdots
r_p

Éléments finis lagrangiens d'ordre supérieur

Construction d'un élément fini quadratique

Maillage uniforme avec éléments finis linéaires (à 2 nœuds)

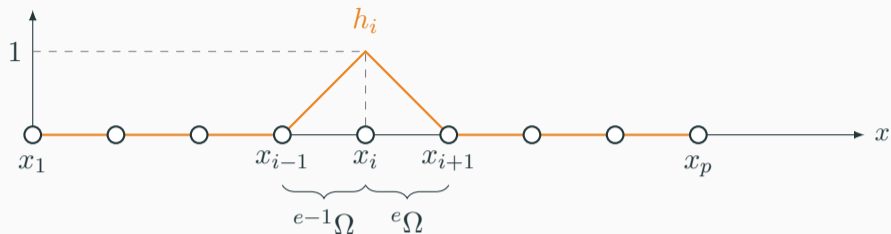


Maillage uniforme avec éléments finis quadratiques (à 3 nœuds)

Introduction des nœuds internes, *placés au milieu de l'élément*, sans rôle de connexion.

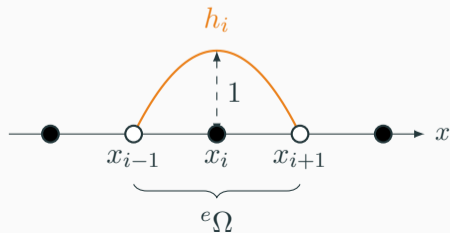


Fonctions de forme linéaires

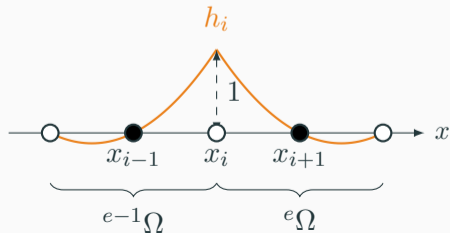


Fonctions de forme quadratiques

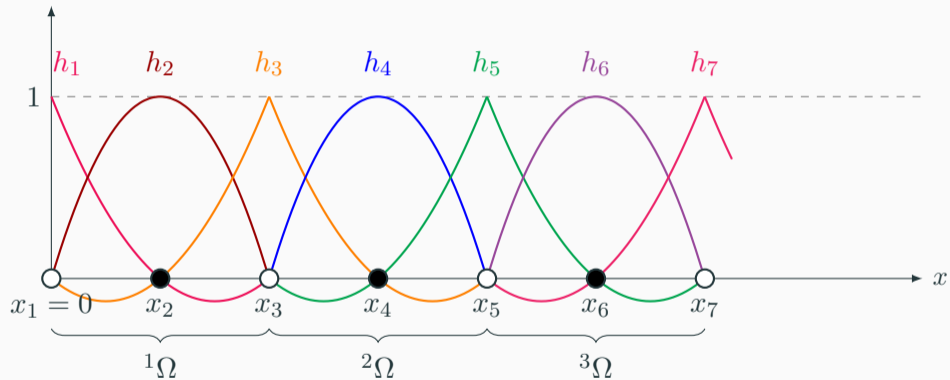
x_i nœud interne



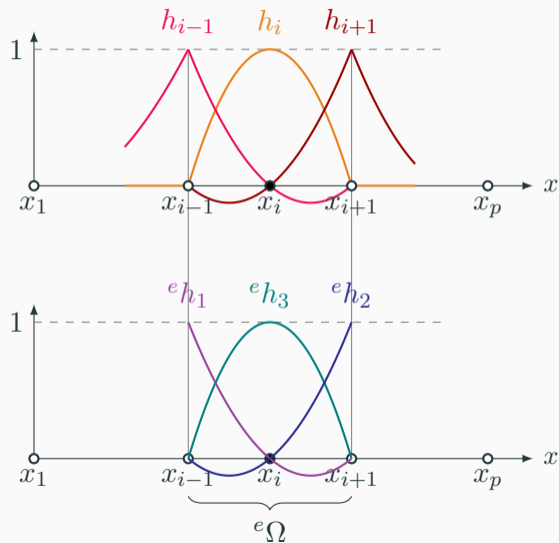
x_i nœud externe



Fonctions de forme quadratiques sur un maillage uniforme



Fonctions de base quadratiques



Fonctions de forme

$$h_i, i = 1, \dots, p$$

Restriction sur l'élément
fini quadratique ${}^e \Omega$

Fonctions de base

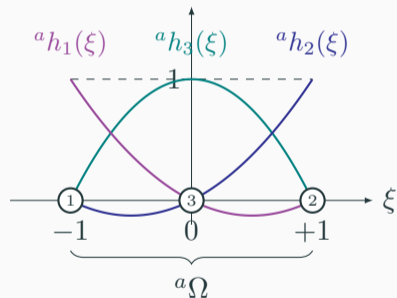
$${}^e h_1, {}^e h_2, {}^e h_3$$

Fonctions de base quadratiques de l'élément archétype

$${}^a h_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$$

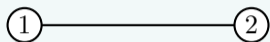
$${}^a h_2(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$$

$${}^a h_3(\xi) = 1 - \xi^2$$



Numérotation locale non séquentielle

Élément linéaire



Fonctions de base linéaires:

$${}^a h_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad \text{et} \quad {}^a h_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

Élément quadratique



Introduction d'une fonction de base:

$${}^a h_3(\xi) = 1 - \xi^2$$

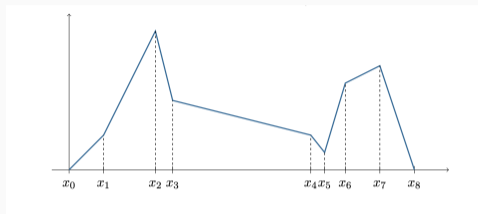
Correction des fonctions de forme linéaires afin de satisfaire le critère de complétude,

$$\sum_{i=1}^3 {}^a h_i(x) = 1 :$$

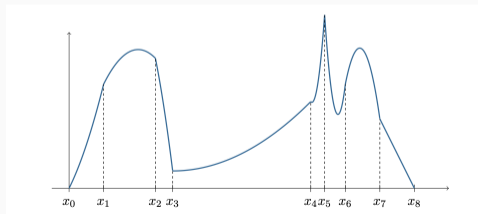
$${}^a h_1 \leftarrow {}^a h_1 - \frac{1}{2} {}^a h_3 = \frac{1}{2}(1-\xi) - \frac{1}{2}(1-\xi^2) = \frac{1}{2}\xi(\xi-1)$$

$${}^a h_2 \leftarrow {}^a h_2 - \frac{1}{2} {}^a h_3 = \frac{1}{2}(1+\xi) - \frac{1}{2}(1-\xi^2) = \frac{1}{2}\xi(\xi+1)$$

Approximation du déplacement axial



Approximation du déplacement via des fonctions de forme linéaires



Approximation du déplacement via des fonctions de forme quadratiques

Développement d'éléments finis d'ordre supérieur

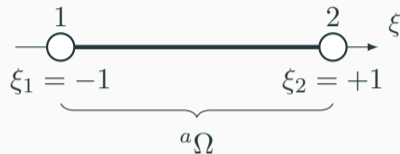
■ Éléments fini archétype à $k + 1$ nœuds



■ Fonctions de base archétype d'ordre k (polynômes de Lagrange) :

$$\begin{aligned} {}^a h_i(\xi) &= \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \cdots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \cdots (\xi - \xi_{k+1})}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \cdots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \cdots (\xi_i - \xi_{k+1})} \\ &= \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{k+1} \frac{\xi - \xi_p}{\xi_i - \xi_p} \quad (i = 1, 2, \dots, k+1) \end{aligned}$$

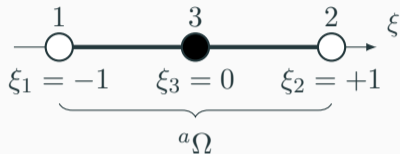
Élément fini linéaire ($k = 1$)



$${}^a h_1(\xi) = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$${}^a h_2(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

Élément fini quadratique ($k = 2$)



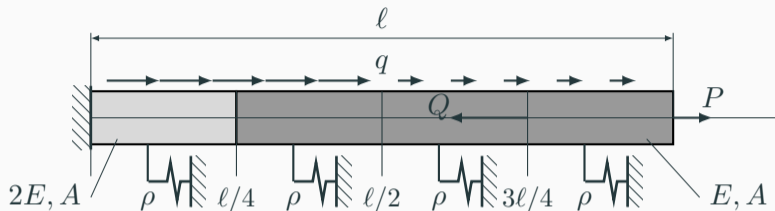
$${}^a h_1(\xi) = \frac{(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_2)}{(\xi_1 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_2)} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$$

$${}^a h_2(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$$

$${}^a h_3(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} = 1 - \xi^2$$

Exemple d'application : barre
encastrée comportant des
discontinuités

Barre prismatique écastrée comportant des discontinuités



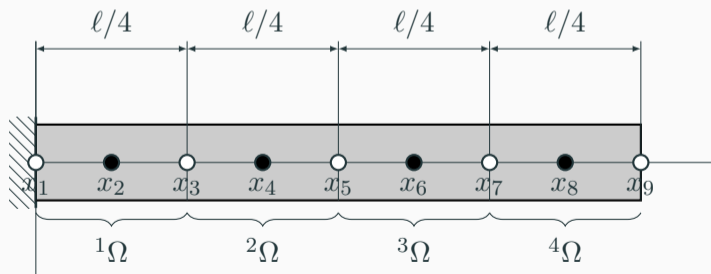
Données

- ☞ Encastrement en $x = 0$ et longueur $\ell = 1$ m.
- ⊛ Structure formée de deux matériaux différents: $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Pa, $A = 100$ mm².
- ➡ Charge répartie de compression proportionnelle ($\rho = 10^8$ N/m²) au déplacement.
- ➡ Charge répartie d'intensité $q = 20$ kN/m sur la moitié droite et d'intensité $4q$ sur la moitié gauche.
- ➡ Force de compression $Q = 50$ kN agissant en $x = 3\ell/4$.
- ➡ Force ponctuelle axiale $P = 25$ kN agissant sur l'extrémité droite.

Discrétisation de la barre par éléments finis

La discrétisation choisie est composée de :

- 9 nœuds équidistants ($p = 9$),
- 4 éléments finis quadratiques ($m = 4$),



Discrétisation par éléments finis

Forme faible approchée : déterminer le déplacement approché $u^h \in \mathcal{U}^h$ telle que, pour tout déplacement approché virtuel $\delta u^h \in \mathcal{V}^h$, on ait

$$\int_0^\ell \left[EA \frac{du^h}{dx} \frac{d\delta u^h}{dx} + \rho u^h \delta u^h \right] dx = -Q \delta u^h(x_3) + P \delta u^h(\ell) + \int_0^\ell q \delta u^h dx$$

Forme faible discrète : déterminer le vecteur des déplacements nodaux \mathbf{q} tel que $q_1 = \hat{u}$ et pour tout $\delta \mathbf{q}$ tel que $\delta q_1 = 0$, on ait

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{G} \mathbf{q} - \mathbf{r}) = 0.$$

où

$$\mathbf{G} = \int_0^\ell \left[EA \frac{d\mathbf{H}^T}{dx} \frac{d\mathbf{H}}{dx} + \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} \right] dx$$

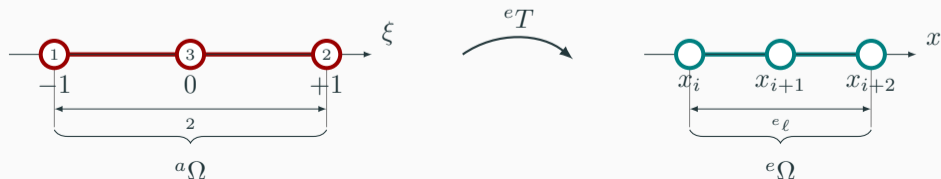
$$\mathbf{r} = -Q \mathbf{H}^T(x_3) + P \mathbf{H}^T(\ell) + \int_0^\ell q \mathbf{H}^T dx$$

Élément fini sous-paramétrique

- *Rappel*: nœud $i + 1$ introduit au centre de l'élément ($e\ell/2$).
- La transformation de coordonnées d'un élément fini quadratique fait appel aux **fonctions de base linéaires** ${}^a h_1(\xi)$ et ${}^a h_2(\xi)$.

$$x(\xi) = x_i {}^a h_1(\xi) + x_{i+2} {}^a h_2(\xi) = x_i \frac{1 - \xi}{2} + x_{i+2} \frac{1 + \xi}{2} = \frac{e\ell}{2} \xi + \frac{x_{i+2} + x_i}{2}$$

$$\xi(x) = \frac{1}{e\ell} (2x - x_i - x_{i+2})$$



Matrice élémentaire d'un élément fini quadratique

$${}^e\mathbf{G} = \underbrace{\int_0^\ell {}^eE {}^eA \frac{d{}^e\mathbf{H}^T}{dx} \frac{d{}^e\mathbf{H}}{dx} dx}_{{}^e\mathbf{K}} + \underbrace{\int_0^\ell {}^e\rho {}^e\mathbf{H}^T {}^e\mathbf{H} dx}_{{}^e\mathbf{M}}$$

- Transformation linéaire de coordonnées :

$$\xi(x) = \frac{1}{e\ell} (2x - x_i - x_{i+2}),$$

Donc $\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{e\ell}$ et $\frac{dx}{d\xi} = \frac{e\ell}{2}$.

- Fonctions de base quadratiques de l'élément archétype :

$${}^a\mathbf{H}(\xi) = \begin{bmatrix} {}^ah_1(\xi) & {}^ah_2(\xi) & {}^ah_3(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) & \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) & 1 - \xi^2 \end{bmatrix}$$

Calcul de la matrice élémentaire de rigidité

Les composantes de la *matrice élémentaire de rigidité* sont données par :

$${}^e k_{ij} = \int_{{}^e \Omega} {}^e E {}^e A \frac{d{}^e h_i(x)}{dx} \frac{d{}^e h_j(x)}{dx} dx = \int_{-1}^1 {}^e E {}^e A \frac{d{}^a h_i(\xi)}{d\xi} \frac{d{}^a h_j(\xi)}{d\xi} \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{{}^e \ell}{2} d\xi$$

Matrice élémentaire de rigidité :

$${}^e \mathbf{K} = \frac{{}^e E {}^e A}{3{}^e \ell} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix}$$

- Matrice symétrique et définie positive.
- Matrice (3×3) indépendante de la position de l'élément fini dans le réseau.

Calcul de la matrice élémentaire de masse

Les composantes de la *matrice élémentaire de masse* sont données par :

$${}^e m_{ij} = \int_{{}^e \Omega} {}^e \rho {}^e h_i(x) {}^e h_j(x) dx = \int_{-1}^1 {}^e \rho^a h_i(\xi)^a h_j(\xi) \frac{{}^e \ell}{2} d\xi$$

Matrice élémentaire de masse :

$${}^e \mathbf{M} = \frac{{}^e \rho {}^e \ell}{30} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix}$$

- Matrice symétrique et définie strictement positive.
- Matrice (3×3) indépendante de la position de l'élément fini dans le réseau.

Exemple d'intégration numérique de Gauss-Legendre

Évaluation d'une composante de la matrice de rigidité d'un élément quadratique :

$$\begin{aligned} {}^e k_{11} &= \int_{-1}^1 {}^e E {}^e A \left(\frac{d^a h_1(\xi)}{d\xi} \right)^2 \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{{}^e \ell}{2} d\xi = \int_{-1}^1 {}^e E {}^e A \left(\frac{2\xi - 1}{2} \right)^2 \left(\frac{2}{{}^e \ell} \right)^2 \frac{{}^e \ell}{2} d\xi \\ &= \frac{{}^e E {}^e A}{2 {}^e \ell} \int_{-1}^1 (2\xi - 1)^2 d\xi \end{aligned}$$

Intégration numérique exacte avec deux points de Gauss

Soit f une fonction polynomiale d'au plus degré 3, alors

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$${}^e k_{11} = \frac{{}^e E {}^e A}{2 {}^e \ell} \left[\left(-\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right)^2 \right] = \frac{7 {}^e E {}^e A}{3 {}^e \ell}$$

Élément fini quadratique :

- Au moins 2 points de Gauss pour garantir une intégration exacte de ${}^e\mathbf{K}$.
- Au moins 3 points de Gauss pour garantir une intégration exacte de ${}^e\mathbf{M}$.
- Si l'élément est distordu (le nœud du milieu n'est pas centré), l'intégration numérique n'est jamais exacte.

Règle générale pour un élément fini d'ordre k non distordu :

- Les termes de la matrice ${}^e\mathbf{K}$ sont des polynômes de degré $2(k - 1)$.
- Les termes de la matrice ${}^e\mathbf{M}$ sont des polynômes de degré $2k$.
- La transformation est linéaire, donc le jacobien est constant.
- *Il faut au moins k points pour intégrer exactement la matrice de rigidité ${}^e\mathbf{K}$ et au moins $k + 1$ points pour la matrice de masse ${}^e\mathbf{M}$.*

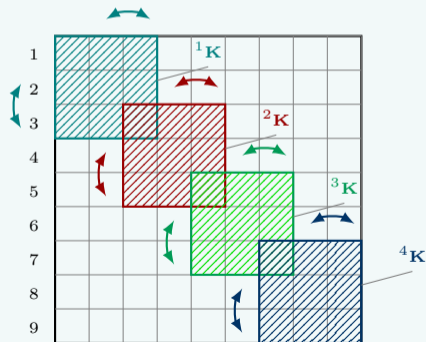
Exemple d'assemblage de la matrice globale de rigidité

$e\Omega$	${}^1\Omega$	${}^2\Omega$	${}^3\Omega$	${}^4\Omega$
1	1	3	5	7
2	3	5	7	9
3	2	4	6	8

Attention !

Inversion des 2èmes et 3èmes lignes et
colonnes des matrices élémentaires.

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^m {}^e\mathbf{L}^T {}^e\mathbf{K} {}^e\mathbf{L} =$$



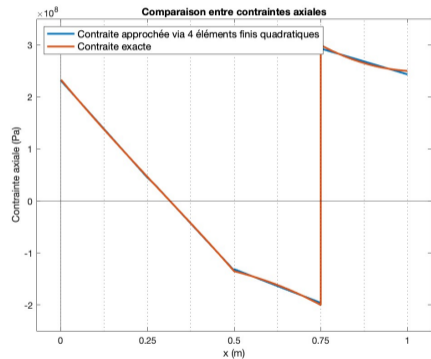
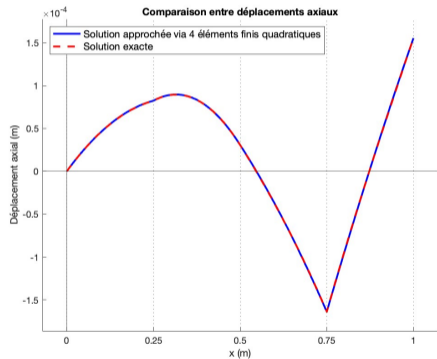
Exemple d'assemblage de la matrice globale de rigidité

Matrice globale de rigidité \mathbf{K} obtenue après assemblage des contributions des 4 éléments finis quadratiques.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} {}^1k_{1,1} & {}^1k_{1,3} & {}^1k_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1k_{3,1} & {}^1k_{3,3} & {}^2k_{3,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1k_{2,1} & {}^1k_{2,3} & {}^1k_{2,2} + {}^2k_{1,1} & {}^2k_{1,3} & {}^2k_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^2k_{3,1} & {}^2k_{3,3} & {}^2k_{3,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^2k_{2,1} & {}^2k_{2,3} & {}^2k_{2,2} + {}^3k_{1,1} & {}^3k_{1,3} & {}^3k_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^3k_{3,1} & {}^3k_{3,3} & {}^3k_{3,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^3k_{2,1} & {}^3k_{2,3} & {}^3k_{2,2} + {}^4k_{1,1} & {}^4k_{1,3} & {}^4k_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^4k_{3,1} & {}^4k_{3,3} & {}^4k_{3,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^4k_{2,1} & {}^4k_{2,3} & {}^4k_{2,2} \end{bmatrix}$$

Processus d'assemblage similaire pour la matrice de masse et le vecteur des charges appliquées.

Comparaison entre solution exacte et solutions approchées



Précision d'un modèle d'éléments finis d'ordre supérieur

Rappel de la définition de l'erreur et de ses normes principales

Notion d'erreur d'approximation dans un modèle d'éléments finis $e^h = u - u^h$, où u solution exacte et u^h solution approchée par la méthode des éléments finis.

- **Norme euclidienne de l'erreur** (norme H^0)

$$\|e^h\|_0 = \left(\int_0^\ell (e^h)^2 dx \right)^{1/2}$$

- **Norme énergétique de l'erreur** (norme H^1)

$$\|e^h\|_1 = \left(\int_0^\ell \left[(e^h)^2 + \left(\frac{de^h}{dx} \right)^2 \right] dx \right)^{1/2}$$

- **Semi-norme de l'énergie de déformation** (norme E):

$$\|e^h\|_E = \left(\int_0^\ell \left(\frac{de^h}{dx} \right)^2 dx \right)^{1/2}$$

Estimations générale d'erreur a priori :

$$\|e^h\|_s \leq C_s h^{m+1-s} \|u\|_{m+1}$$

- C_s facteur de convergence,
- s norme choisie pour mesurer l'erreur :

$$0 \leq s \leq m \quad \text{et} \quad m + 1 + s \geq 2k,$$

- m degré des fonctions de base,
- k ordre de dérivation dans la forme faible,
- h longueur caractéristique du maillage: $h = \max_e \ell$.

Estimations asymptotiques globales de l'erreur

Considérons un problème régulier ($u \in H^{m+1}$) du second ordre ($k = 1$).

Estimations asymptotiques sur les déplacements :

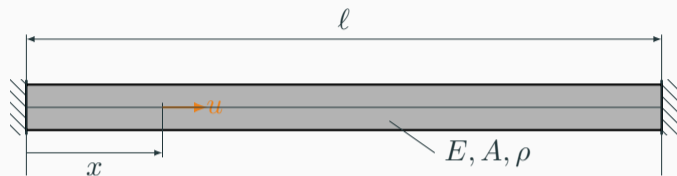
$$\|e^h\|_0 \leq C_0 h^{m+1}$$

Estimations asymptotiques sur les contraintes :

$$\|e^h\|_1 \leq C_1 h^m$$

- C_0 et C_1 facteurs de convergence,
- m degré des fonctions de base,
- h longueur caractéristique du maillage.

Exemple d'application : analyse modale d'une barre bi-encastée



Propriétés géométriques

- A section
- ℓ longueur

Conditions aux limites

- Encastrement aux deux extrémités

Propriétés du matériau

- E module de Young
- ρ densité

Déplacement

- $u(x,t)$ déplacement axial

Objectif

Déterminer les fréquences propres et les modes propres d'une barre bi-encastree.

- Équation différentielle de l'*élastodynamique* de la barre en régime libre :

$$-EA \frac{d^2 u}{dx^2} + \rho A \frac{d^2 u}{dt^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq \ell$$

- Hypothèse de solution harmonique :

$$u(x, t) = u(x) \sin(\omega t + \varphi)$$

où $u(x)$ est l'amplitude spatiale, ω la pulsation propre et φ la phase.

Forme forte :

$$-EA \frac{d^2 u}{dx^2} - \omega^2 \rho A u = 0, \quad 0 \leq x \leq \ell$$

avec les **conditions aux limites** :

$$u(0) = u(\ell) = 0$$

Intégration par parties : soit δu un déplacement virtuel tel que $\delta u(0) = \delta u(\ell) = 0$.

$$\int_0^\ell \left[EA \frac{d^2 u}{dx^2} + \omega^2 \rho A u \right] \delta u \, dx = 0 \quad \forall \delta u.$$

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} \, dx - \omega^2 \int_0^\ell \rho A u \delta u \, dx = 0 \quad \forall \delta u.$$

Forme faible : Déterminer le déplacement $u \in \mathcal{U}$ tel que, pour tout déplacement virtuel $\delta u \in \mathcal{V}$, on ait :

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} \, dx - \omega^2 \int_0^\ell \rho A u \delta u \, dx = 0.$$

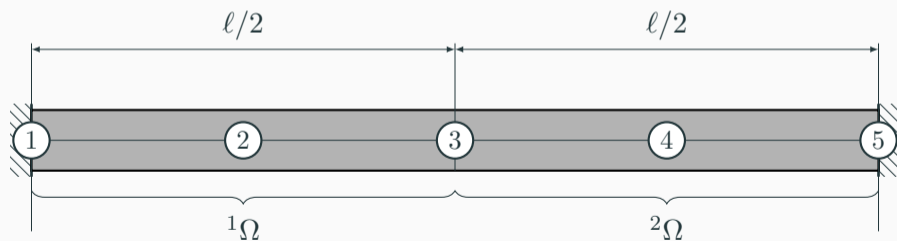
$$\mathcal{U} = \{ u(x) \mid u \in H^1(0, \ell), u(0) = u(\ell) = 0 \},$$

$$\mathcal{V} = \{ \delta u(x) \mid \delta u \in H^1(0, \ell), \delta u(0) = \delta u(\ell) = 0 \}.$$

Discrétisation de la barre par éléments finis

La discrétisation choisie est composée de :

- 5 nœuds équidistants ($p = 5$),
- 2 éléments finis quadratiques ($m = 2$),



Formulation faible discrète

Soient u^h et δu^h les approximations de u et δu dans les espaces discrets $\mathcal{U}^h \subset \mathcal{U}$ et $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$:

$$\int_0^\ell EA \frac{du^h}{dx} \frac{d\delta u^h}{dx} dx - \omega^2 \int_0^\ell \rho A u^h \delta u^h dx = 0 \quad \forall \delta u^h \in \mathcal{V}^h.$$

Forme faible discrète : déterminer le vecteur des déplacements nodaux \mathbf{q} tel que $q_1 = q_5 = 0$ et pour tout $\delta \mathbf{q}$ tel que $\delta q_1 = \delta q_5 = 0$, on ait

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} = 0.$$

Les matrices globales de rigidité et de masse, $\mathbf{K} = \mathbf{A}_{e=1}^2 {}^e \mathbf{K}$ et $\mathbf{M} = \mathbf{A}_{e=1}^2 {}^e \mathbf{M}$, sont obtenues par assemblage des contributions élémentaires :

$${}^e \mathbf{K} = \int_0^\ell {}^e E {}^e A \frac{d{}^e \mathbf{H}^T}{dx} \frac{d{}^e \mathbf{H}}{dx} dx, \quad {}^e \mathbf{M} = \int_0^\ell {}^e \rho {}^e A {}^e \mathbf{H}^T {}^e \mathbf{H} dx.$$

Matrices élémentaires de rigidité et de masse

Maillage uniforme : les nœuds également espacés entraînent des matrices élémentaires identiques pour tous les éléments finis.

■ Matrices élémentaires de rigidité :

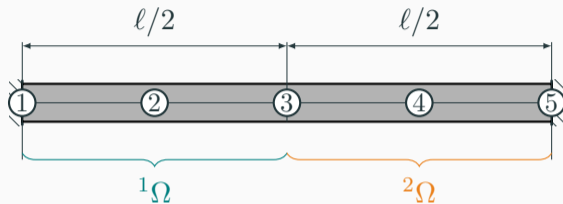
$${}^1\mathbf{K} = {}^2\mathbf{K} = \frac{2EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix},$$

■ Matrices élémentaires de masse :

$${}^1\mathbf{M} = {}^2\mathbf{M} = \frac{\rho A \ell}{60} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix}.$$

Assemblage des matrices globales de rigidité et de masse

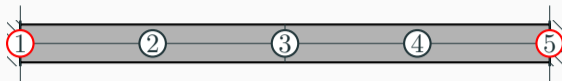
$e\Omega$	${}^1\Omega$	${}^2\Omega$
1	1	3
2	3	5
3	2	4



$$\mathbf{K} = \frac{2EA}{3l} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 7+7 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A l}{60} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4+4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Application des conditions aux limites



En appliquant les conditions aux limites, $q_1 = q_5 = 0$ et $\delta q_1 = \delta q_5 = 0$, on supprime les degrés de liberté correspondant aux nœuds encastres et on obtient un système réduit pour les inconnues libres q_2, q_3, q_4 :

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} = 0$$

$$\left(\frac{2EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho A \ell}{60} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 8 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Système réduit et équation caractéristique

- Le système réduit 3×3 est :

$$\left(\frac{2EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 16 & -8 & 0 \\ -8 & 14 & -8 \\ 0 & -8 & 16 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho A \ell}{60} \begin{bmatrix} 16 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 16 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

- Le système admet des solutions non triviales si et seulement si :

$$\det(\mathbf{K}_{\text{réd}} - \omega^2 \mathbf{M}_{\text{réd}}) = 0.$$

- Équation caractéristique :

$$\left(\omega^2 - \frac{40E}{\rho \ell^2} \right) \left(\omega^4 - \frac{416E}{3\rho \ell^2} \omega^2 + \frac{1280E^2}{\rho^2 \ell^4} \right) = 0$$

Pulsations et formes propres de la barre

■ Pulsations propres

$$\omega_1 = 3.153 \sqrt{\frac{E}{\rho \ell^2}} \text{ rad/sec,}$$

(erreur relative : 0.4%)

$$\omega_2 = 6.325 \sqrt{\frac{E}{\rho \ell^2}} \text{ rad/sec,}$$

(erreur relative : 0.7%)

$$\omega_3 = 11.35 \sqrt{\frac{E}{\rho \ell^2}} \text{ rad/sec,}$$

(erreur relative : 20.4%)

■ Formes propres associées

Comparaison des formes propres: exactes vs approchés

