

# Méthode des éléments finis

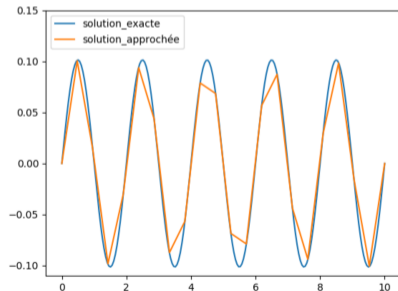
## Convergence et formulation variationnelle

ME-372 Méthode des éléments finis

2025-2026

François Gallaire

Stefano Burzio



## Plan

- Résumé de la semaine 4
- Intégration numérique
- Analyse de convergence de la méthode des éléments finis
- Formulation variationnelle
- Exemple d'application de la méthode des éléments finis

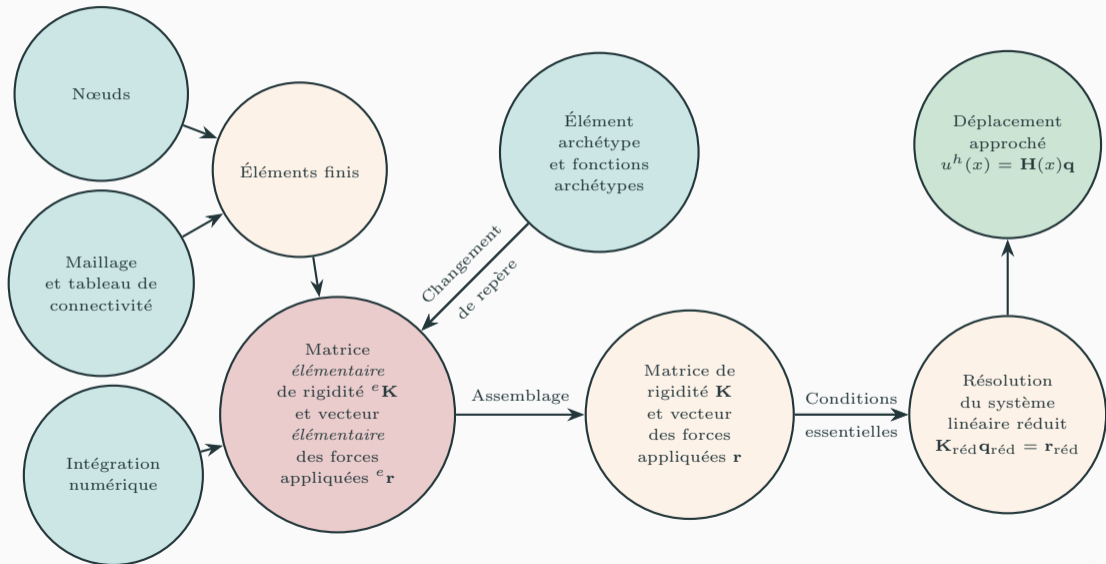
## Références bibliographiques

- ① T. Gmür, Méthode des éléments finis (§§ 2.3.5 et §§ 2.4)
- ② T. Hughes, The finite element method (§§ 4.1)

## Résumé de la semaine 4

---

# Déroulement de la méthode des éléments finis



# Éléments finis

Structure physique réelle

$$\Omega = [0, \ell]$$



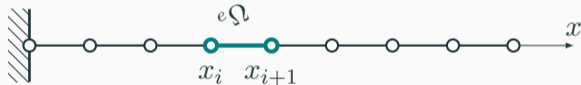
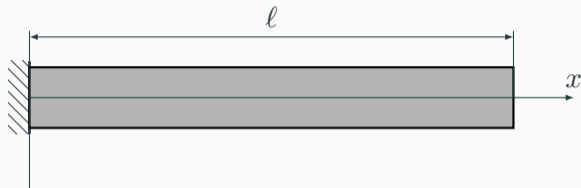
Éléments finis

$${}^1\Omega, {}^2\Omega, \dots, {}^m\Omega$$

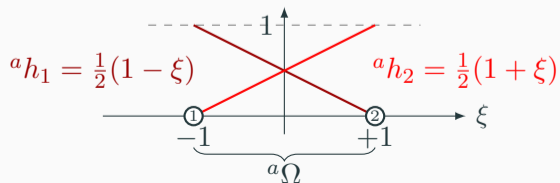
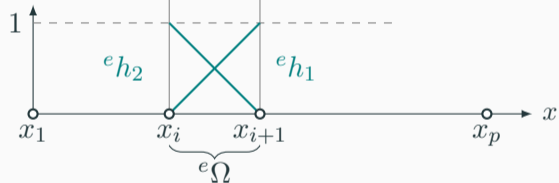
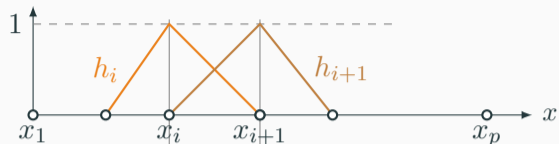


Élément archétype

$${}^a\Omega = [-1, 1]$$



# Fonctions de forme, de base et archétypes



**Fonctions de forme**

$$h_i(x), i = 1, \dots, p$$

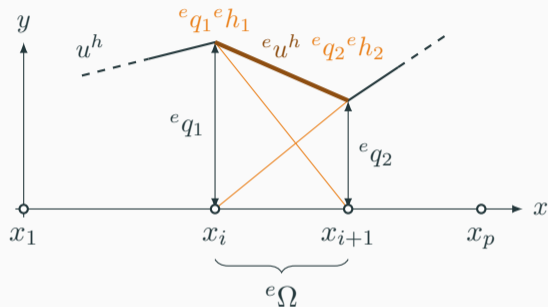
**Fonctions de base**

$${}^e h_1(x), {}^e h_2(x), e = 1, \dots, m$$

**Fonctions archétypes**

$${}^a h_1(\xi), {}^a h_2(\xi)$$

## Restriction du déplacement $u^h$ sur l'élément fini ${}^e\Omega$



$${}^e u^h(x) = \sum_{i=1}^2 {}^e h_i(x) {}^e q_i = {}^e \mathbf{H}(x) {}^e \mathbf{q}$$
$${}^e \delta u^h(x) = \sum_{i=1}^2 {}^e h_i(x) {}^e \delta q_i = {}^e \mathbf{H}(x) {}^e \delta \mathbf{q}$$

$${}^e \mathbf{H} = [{}^e h_1, {}^e h_2]$$

matrice  $(1 \times 2)$  des fonctions de base de l'élément  ${}^e\Omega$

$$\mathbf{q} = [{}^e q_1, {}^e q_2]^T$$

vecteur  $(2 \times 1)$  des déplacements nœuds de l'élément  ${}^e\Omega$

$${}^e \delta \mathbf{q} = [{}^e \delta q_1, {}^e \delta q_2]^T$$

vecteur  $(2 \times 1)$  des déplacements nœuds virtuels de l'élément  ${}^e\Omega$

- Matrice élémentaire de rigidité ( $2 \times 2$ ) :

$${}^e\mathbf{K} = \int_{{}^e\Omega} {}^eE {}^eA \frac{d{}^e\mathbf{H}^T}{dx} \frac{d{}^e\mathbf{H}}{dx} dx = \int_{{}^e\Omega} {}^eE {}^eA {}^e\mathbf{B}^T {}^e\mathbf{B} dx$$

$${}^e\mathbf{B} = \frac{d}{dx} {}^e\mathbf{H} = \left[ \frac{d{}^eh_1}{dx}, \frac{d{}^eh_2}{dx} \right] \text{ matrice élémentaire de déformation.}$$

- Vecteur élémentaire des forces appliquées ( $2 \times 1$ ) :

$${}^e\mathbf{r} = P {}^e\mathbf{H}^T(\ell) \delta_{em} + \int_{{}^e\Omega} {}^e\mathbf{H}^T {}^eq dx.$$

# Changement de repère

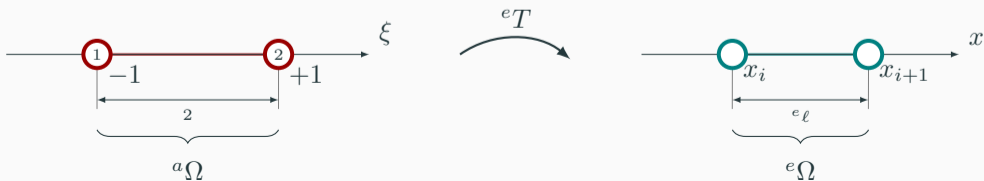
Pour simplifier le calcul des intégrales, nous utilisons un changement de variable :

$${}^eT : {}^a\Omega \rightarrow {}^e\Omega$$

$$\xi \mapsto x$$

$$x(\xi) = x_i {}^a h_1(\xi) + x_{i+1} {}^a h_2(\xi) = \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) \xi + \left( \frac{x_{i+1} + x_i}{2} \right)$$

$$\xi(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} (2x - x_i - x_{i+1}) = \frac{1}{e_\ell} (2x - x_i - x_{i+1})$$



**Matrice élémentaire de rigidité ( $2 \times 2$ ) :**

$${}^e\mathbf{K} = \frac{{}^eE^eA}{{}^e\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Considérons une **charge répartie constante**  $q$ , alors

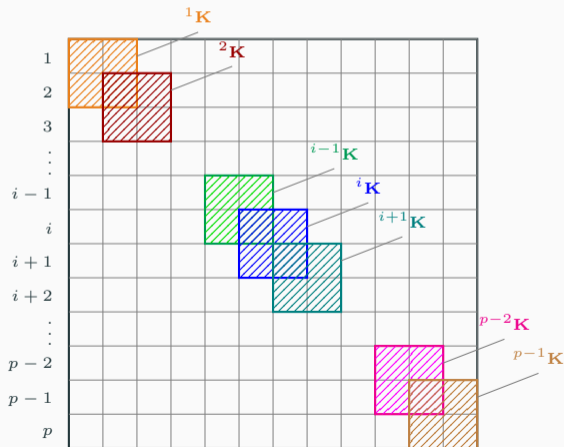
**Vecteur élémentaire des forces appliquées ( $2 \times 1$ ) :**

$${}^e\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix} \delta_{em} + q \frac{{}^e\ell}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Assemblage de la matrice globale de rigidité

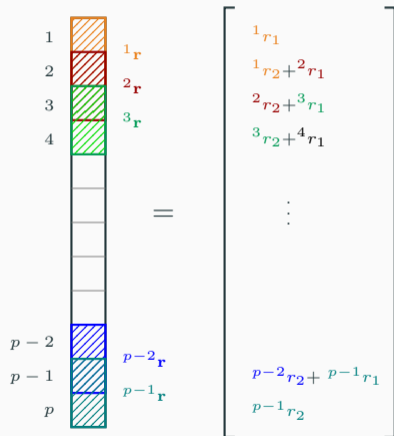
$e\Omega$	$1\Omega$	$2\Omega$	$\dots$	$i-1\Omega$	$i\Omega$	$i+1\Omega$	$\dots$	$p-2\Omega$	$p-1\Omega$
1	1	2	$\dots$	$i-1$	$i$	$i+1$	$\dots$	$p-2$	$p-1$
2	2	3	$\dots$	$i$	$i+1$	$i+2$	$\dots$	$p-1$	$p$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^m e\mathbf{L}^T e\mathbf{K} e\mathbf{L} =$$



# Exemple d'assemblage du vecteur des forces global

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^m e \mathbf{L}^T e_{\mathbf{r}} =$$



# Intégration numérique

---

# Quadrature de Gauss-Legendre

- Les intégrales intervenant dans les expressions de  ${}^e\mathbf{K}$ , et  ${}^e\mathbf{r}$  sont, dans les logiciels d'éléments finis, calculées numériquement.
- L'intégration est approximée comme suit :

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^r \omega_i f(\xi_i)$$

où  $\xi_i$  sont appelés **points de Gauss** et  $\omega_i$  sont les **poids de Gauss** associés.

- L'erreur de l'approximation dépend du nombre de points de Gauss  $r$  utilisés :

$$\text{erreur} = \left| \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi - \sum_{i=1}^r \omega_i f(\xi_i) \right| \leq C 2^{2r}$$

## Intégration exacte

Si la fonction  $f$  à intégrer est un **polynôme de degré inférieur ou égal à  $2r - 1$** , alors l'intégration par la méthode de Gauss-Legendre est **exacte**.

# Points et poids de Gauss

r	Points de Gauss $\xi_i$	Poids de Gauss $\omega_i$	Précision
1	0	2	ordre 1
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	ordre 3
3	$0, \pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{8}{9}, \frac{5}{9}, \frac{5}{9}$	ordre 5
4	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}, \pm \sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}, \frac{18+\sqrt{30}}{36}, \frac{18-\sqrt{30}}{36}, \frac{18-\sqrt{30}}{36}$	ordre 7



Illustration des points de Gauss - éléments 1d

## Intégration numérique en pratique : matrice de rigidité

Calcul de la matrice de rigidité d'un élément fini **linéaire** à l'aide de la formule de quadrature.

$$\begin{aligned} {}^e k_{ij} &= \int_{{}^e\Omega} {}^e E {}^e A \frac{d^e h_i}{dx} \frac{d^e h_j}{dx} dx = \int_{-1}^1 \underbrace{{}^e E {}^e A \frac{d^a h_i}{d\xi} \frac{d^a h_j}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}}_{\text{constante}} d\xi \\ &= \omega_1 {}^e E {}^e A \frac{d^a h_i}{d\xi}(0) \frac{d^a h_j}{d\xi}(0) \frac{2}{e\ell} = \pm \frac{{}^e E {}^e A}{e\ell} \end{aligned}$$

*Rappel:*  $\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{e\ell}$ ,  $\frac{d^a h_i}{d\xi} = \pm \frac{1}{2}$  et  $\omega_1 = 2$ .

**Un seul point de Gauss** est suffisant pour intégrer exactement la matrice de rigidité d'un élément fini **linéaire**.

Soit la **charge répartie**  $q$  un **polynôme de degré**  $d$ , alors nous pouvons calculer exactement et numériquement le vecteur élémentaire des forces appliquées pour un élément fini **linéaire** :

$$\begin{aligned} {}^e r_i &= \int_{{}^e \Omega} q(x) {}^e h_i dx = \int_{-1}^1 \underbrace{q(x(\xi)) {}^a h_i \frac{d\xi}{dx}}_{\text{polynôme de degré } d+1} d\xi \\ &= \sum_{j=1}^{\lceil d/2 \rceil + 1} \omega_j q(x(\xi_j)) {}^a h_i(\xi_j) \frac{2}{e\ell} \end{aligned}$$

Au moins  $\lceil d/2 \rceil + 1$  **points de Gauss** sont nécessaires pour intégrer exactement le vecteur des forces appliquées d'un élément fini **linéaire** soumis à une charge répartie  $q$  de degré  $d$ .

# Analyse de convergence de la méthode des éléments finis

---

# Propriété d'orthogonalité entre erreur et déplacement approché

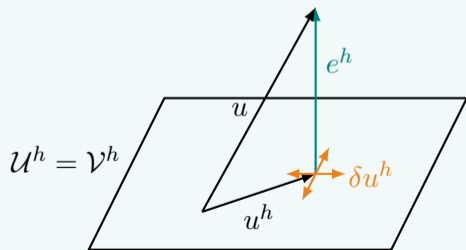
Soient

- $u$  la solution exacte du problème,
- $u^h$  la solution approchée par la méthode des éléments finis,
- $e^h = u - u^h$  l'erreur d'approximation.

Alors, pour chaque déplacement virtuel approché  $\delta u^h \in \mathcal{V}^h$ , on a que

$e^h$  est orthogonale à  $\delta u^h$  au sens du produit scalaire suivant :

$$\langle e^h, \delta u^h \rangle_E = \int_0^\ell \frac{de^h}{dx} \frac{d\delta u^h}{dx} dx = 0.$$



# Démonstration de la propriété d'orthogonalité

① Rappel de la formulation faible du problème :

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} dx = P \delta u(\ell) + \int_0^\ell q \delta u dx, \quad \forall \delta u \in \mathcal{V}$$

# Démonstration de la propriété d'orthogonalité

- ① Rappel de la formulation faible du problème :

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} dx = P \delta u(\ell) + \int_0^\ell q \delta u dx, \quad \forall \delta u \in \mathcal{V}$$

- ② Comme  $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$ , on a aussi :

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u^h}{dx} dx = P \delta u^h(\ell) + \int_0^\ell q \delta u^h dx, \quad \forall \delta u^h \in \mathcal{V}^h$$

# Démonstration de la propriété d'orthogonalité

- ① Rappel de la formulation faible du problème :

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} dx = P \delta u(\ell) + \int_0^\ell q \delta u dx, \quad \forall \delta u \in \mathcal{V}$$

- ② Comme  $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$ , on a aussi :

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u^h}{dx} dx = P \delta u^h(\ell) + \int_0^\ell q \delta u^h dx, \quad \forall \delta u^h \in \mathcal{V}^h$$

- ③ La solution approchée  $u^h$  satisfait la formulation faible approchée :

$$\int_0^\ell EA \frac{du^h}{dx} \frac{d\delta u^h}{dx} dx = P \delta u^h(\ell) + \int_0^\ell q \delta u^h dx, \quad \forall \delta u^h \in \mathcal{V}^h$$

# Démonstration de la propriété d'orthogonalité

- ① Rappel de la formulation faible du problème :

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} dx = P \delta u(\ell) + \int_0^\ell q \delta u dx, \quad \forall \delta u \in \mathcal{V}$$

- ② Comme  $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$ , on a aussi :

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u^h}{dx} dx = P \delta u^h(\ell) + \int_0^\ell q \delta u^h dx, \quad \forall \delta u^h \in \mathcal{V}^h$$

- ③ La solution approchée  $u^h$  satisfait la formulation faible approchée :

$$\int_0^\ell EA \frac{du^h}{dx} \frac{d\delta u^h}{dx} dx = P \delta u^h(\ell) + \int_0^\ell q \delta u^h dx, \quad \forall \delta u^h \in \mathcal{V}^h$$

- ④ En soustrayant les deux équations au points 2 et 3, on obtient :

$$\int_0^\ell EA \frac{d(u - u^h)}{dx} \frac{d\delta u^h}{dx} dx = 0, \quad \forall \delta u^h \in \mathcal{V}^h$$

# Meilleure approximation de la solution cherchée dans le sous-espace $\mathcal{U}^h$

La solution approchée  $u^h$  est la meilleure approximation de la solution exacte  $u$  dans le sous-espace  $\mathcal{U}^h$ , au sens de l'énergie de déformation.

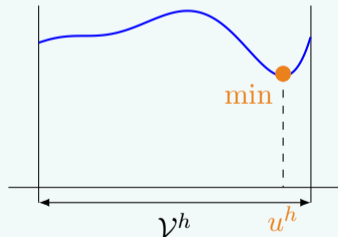
Soit la **semi-norme de l'énergie de déformation** définie par :

$$\|v\|_E^2 = \langle v, v \rangle_E = \int_0^\ell \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx$$

Alors, pour toute fonction  $v^h \in \mathcal{V}^h$ , on a :

$$\|u - u^h\|_E \leq \|u - v^h\|_E$$

$$err(v^h) = \|u - v^h\|_E$$



# Démonstration de la propriété de meilleure approximation

① On décompose  $u - v^h$  en deux parties :

$$u - v^h = (u - u^h) + (u^h - v^h) = e^h + w^h$$

# Démonstration de la propriété de meilleure approximation

- ① On décompose  $u - v^h$  en deux parties :

$$u - v^h = (u - u^h) + (u^h - v^h) = e^h + w^h$$

- ② Par définition de la semi-norme d'énergie, on a :

$$\|u - v^h\|_E^2 = \|e^h + w^h\|_E^2 = \langle e^h + w^h, e^h + w^h \rangle_E = \|e^h\|_E^2 + 2\langle e^h, w^h \rangle_E + \|w^h\|_E^2$$

# Démonstration de la propriété de meilleure approximation

- ① On décompose  $u - v^h$  en deux parties :

$$u - v^h = (u - u^h) + (u^h - v^h) = e^h + w^h$$

- ② Par définition de la semi-norme d'énergie, on a :

$$\|u - v^h\|_E^2 = \|e^h + w^h\|_E^2 = \langle e^h + w^h, e^h + w^h \rangle_E = \|e^h\|_E^2 + 2\langle e^h, w^h \rangle_E + \|w^h\|_E^2$$

- ③ En utilisant la propriété d'orthogonalité entre  $e^h$  et  $w^h \in \mathcal{V}^h$ , on a :

$$\|u - v^h\|_E^2 = \|e^h\|_E^2 + \|w^h\|_E^2 \geq \|e^h\|_E^2$$

# Démonstration de la propriété de meilleure approximation

- ① On décompose  $u - v^h$  en deux parties :

$$u - v^h = (u - u^h) + (u^h - v^h) = e^h + w^h$$

- ② Par définition de la semi-norme d'énergie, on a :

$$\|u - v^h\|_E^2 = \|e^h + w^h\|_E^2 = \langle e^h + w^h, e^h + w^h \rangle_E = \|e^h\|_E^2 + 2\langle e^h, w^h \rangle_E + \|w^h\|_E^2$$

- ③ En utilisant la propriété d'orthogonalité entre  $e^h$  et  $w^h \in \mathcal{V}^h$ , on a :

$$\|u - v^h\|_E^2 = \|e^h\|_E^2 + \|w^h\|_E^2 \geq \|e^h\|_E^2$$

- ④ Par conséquent, on obtient :

$$\|u - u^h\|_E \leq \|u - v^h\|_E$$

ce qui montre que  $u^h$  est optimale dans  $\mathcal{V}^h$ .

# Estimations asymptotiques globales de l'erreur d'approximation

$$\|e^h\|_0 = \left( \int_0^\ell (e^h)^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{Norme euclidienne de l'erreur ou norme } L^2$$

$$\|e^h\|_1 = \left( \int_0^\ell (e^h)^2 + \left( \frac{de^h}{dx} \right)^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{Norme énergétique de l'erreur ou norme } H^1$$

## Estimations d'erreur a priori :

$$\|e^h\|_k \leq C_k h^p$$

- $C_k$  facteur de convergence,
- $p = m + 1 - k$  taux de convergence,
- $m$  degré du polynôme complet caractérisant les fonctions de base,
- $h$  taille maximale des éléments dans le maillage:  $h = \max_e \ell$

# Estimations d'erreur a priori avec des fonctions de base linéaires

En utilisant des fonctions de base linéaires on a  $m = 1$  et donc  $p = 2 - k$ .

- Norme euclidienne ( $k = 0$ ) :

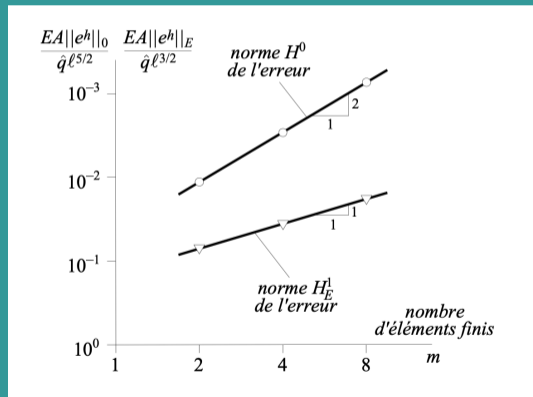
$$\|e^h\|_0 \leq C_0 h^2$$

- Norme énergétique ( $k = 1$ ) :

$$\|e^h\|_1 \leq C_1 h$$

- Norme de l'énergie de déformation :

$$\|e^h\|_E \leq C_E h$$



Pour un maillage fixé, les déplacements approchés sont plus précis que les contraintes afférentes. En utilisant des fonctions de base linéaires, on a que :

- Les déplacements convergent *quadratiquement* :

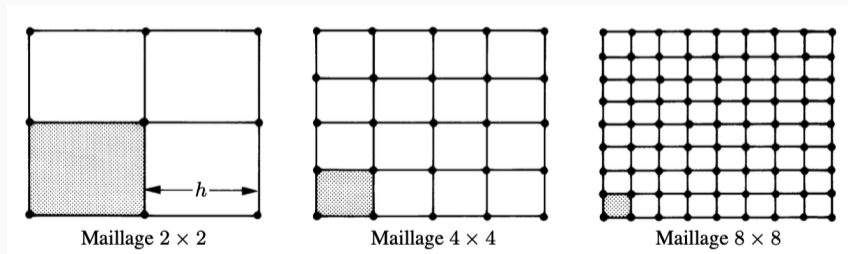
$$\left( \int_0^\ell (u - u^h)^2 dx \right)^{1/2} = \|e^h\|_0 \leq C_0 h^2$$

- Les contraintes convergent *linéairement* :

$$\left( \int_0^\ell (\sigma - \sigma^h)^2 dx \right)^{1/2} = E \|e^h\|_E \leq EC_E h$$

# Deux types de raffinement

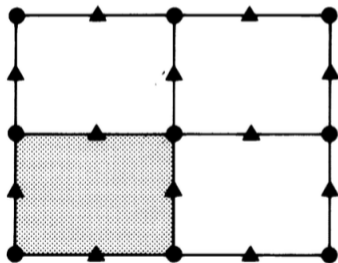
- 1 **Raffinement  $h$**  : raffinement du maillage sans modifier le degré des polynômes utilisés dans l'interpolation ( $p$  constant)



(Credit: Frey, Jirousek - Méthode des éléments finis)

## Deux types de raffinement

- ② **Raffinement  $p$**  : augmentation du degré des polynômes utilisés dans l'interpolation sans modifier le maillage ( $h$  constant)



(Credit: Frey, Jirousek - Méthode des éléments finis)

## Démonstration de l'estimation d'erreur en norme énergétique $\| \cdot \|_E$

*Idée: si l'on parvient à construire une solution approchée dans  $\mathcal{V}^h$  dont on puisse calculer l'erreur correspondante, celle-ci est au mieux égale à l'erreur de l'approximation  $u^h$ .*

- ① Par la propriété de meilleure approximation, on a :

$$\|u - u^h\|_E \leq \|u - v^h\|_E, \quad \forall v^h \in \mathcal{V}^h$$

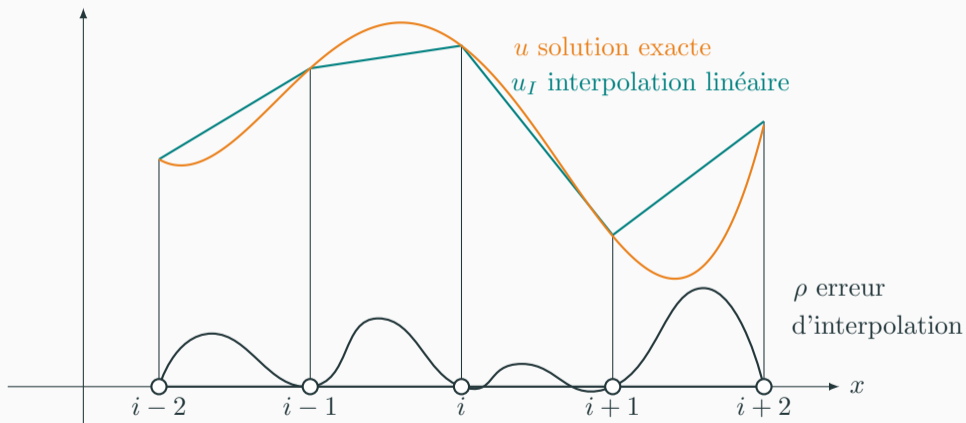
- ② Soit  $u_I$  l'interpolation linéaire de  $u$  (solution exacte aux nœuds):

$$u_I(x_i) = u(x_i) \quad i = 1, 2, \dots, p$$

- ③ Comme  $u_I \in \mathcal{V}^h$ , en choisissant  $v^h = u_I$ , on obtient :

$$\|u - u^h\|_E \leq \|u - u_I\|_E$$

Soit  $\rho(x) = u(x) - u_I(x)$  l'erreur d'interpolation (résidu).



- ④ Décomposition en *série de Fourier* du résidu entre solution exacte et interpolation nodale entre deux nœuds successifs :

$$\rho(x) = u(x) - u_I(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin\left(\frac{m\pi x}{e\ell}\right), \quad 0 \leq x \leq e\ell$$

où  $e\ell$  est la longueur de l'élément fini.

- ⑤ Norme des dérivées première et seconde de la fonction résidu :

$$\int_0^{e\ell} \left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 dx = \frac{e\ell}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{e\ell}\right)^2 a_m^2$$

$$\int_0^{e\ell} \left(\frac{d^2\rho}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{e\ell}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{e\ell}\right)^4 a_m^2$$

- ⑥ En combinant les deux expressions précédentes, on obtient l'*inégalité de Poincaré-Friedrich*:

$$\int_0^{e\ell} \left( \frac{d\rho}{dx} \right)^2 dx \leq \frac{e\ell^2}{\pi^2} \int_0^{e\ell} \left( \frac{d^2\rho}{dx^2} \right)^2 dx$$

- ⑦ Comme  $\frac{d^2 u_I}{dx^2} = 0$  puisque  $u_I$  est une fonction linéaire par morceaux et en posant  $h = \max_e e\ell$  on a la caractérisation de la norme de la dérivée du résidu:

$$\int_0^{e\ell} \left( \frac{d\rho}{dx} \right)^2 dx \leq \frac{e\ell^2}{\pi^2} \int_0^{e\ell} \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 dx \leq \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^{e\ell} \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 dx$$

- ⑧ En sommant sur tous les éléments finis, on obtient la caractérisation de la norme de l'erreur d'interpolation en norme de l'énergie de déformation :

$$\|u - u_I\|_E^2 = \sum_{e=1}^p \int_0^{e\ell} \left( \frac{d\rho}{dx} \right)^2 dx \leq \sum_{e=1}^p \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^{e\ell} \left( \frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^\ell \left( \frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 dx$$

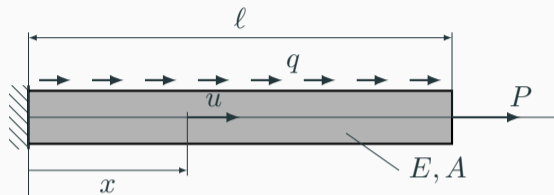
- ⑨ Conclusion : estimations d'erreur a priori en norme de l'énergie de déformation

$$\|u - u^h\|_E \leq \|u - u_I\|_E \leq C_1 h$$

# Formulation variationnelle

---

## Forme variationnelle du problème modèle de la barre



Energie potentielle totale (fonctionnelle) du système

$$J(w) = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^\ell EA \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx}_{\substack{\text{Énergie de déformation} \\ \text{interne} \\ U(w)}} - \underbrace{\left[ \int_0^\ell qw dx + Pw(\ell) \right]}_{\substack{\text{Travail des forces} \\ \text{externes} \\ V(w)}}$$

La solution exacte  $u$  du problème modèle de la barre est la fonction qui minimise la fonctionnelle  $J$  dans l'espace des déplacements admissibles  $\mathcal{U}$ :

$$J(u) \leq J(w) \quad \forall w \in \mathcal{U}$$

- Pour toute perturbation virtuelle admissible  $\delta w \in \mathcal{V}$ , on définit la variation première de la fonctionnelle  $J$  :

$$\delta J(w) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} J(w + \varepsilon \delta w) \right|_{\varepsilon=0}$$

- **Condition nécessaire garantissant la stationnarité :**

La solution exacte  $u$  satisfait

$$\delta J(u) = 0$$

pour toute perturbation virtuelle admissible  $\delta w \in \mathcal{V}$ .

- Variation première de la fonctionnelle :

$$\delta J(w) = \int_0^\ell EA \left( \frac{dw}{dx} \right) \left( \frac{d\delta w}{dx} \right) dx - \left[ \int_0^\ell q \delta w dx + P \delta w(\ell) \right]$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\delta J(w) = - \int_0^\ell \left[ EA \frac{d^2 w}{dx^2} + q \right] \delta w dx + \left[ EA \frac{dw}{dx} \Big|_{x=\ell} - P \right] \delta w(\ell)$$

- **Équations d'Euler-Lagrange** : La condition  $\delta J(u) = 0$  pour toute perturbation virtuelle admissible  $\delta w \in \mathcal{V}$  implique que la solution exacte  $u$  satisfait :

$$\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) + q = 0, \quad \text{et} \quad EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=\ell} = P.$$

La solution approchée  $u^h$  est la fonction qui minimise la fonctionnelle  $J$  dans le sous-espace des déplacements approchés  $\mathcal{U}^h$  de dimension finie  $n$  :

$$J(u^h) \leq J(w^h) \quad \forall w^h \in \mathcal{U}^h$$

- **Approximation de Ritz-Galerkin** : on cherche une solution approchée sous la forme :

$$w^h(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i(x)$$

où  $h_i$  sont les fonctions de base de l'espace des fonctions approchées admissibles  $\mathcal{U}^h$  et  $\alpha_i$  les coefficients inconnus.

# Équivalence forme variationnelle approchée et forme faible approchée

- **Fonctionnelle approchée** : En substituant  $w^h$  dans  $J$ , on obtient :

$$J(w^h) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i k_{ij} \alpha_j - \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$$

avec

$$k_{ij} = \int_0^\ell EA \frac{dh_i}{dx} \frac{dh_j}{dx} dx, \quad \text{et} \quad r_i = h_i(\ell)P + \int_0^\ell h_i q dx.$$

- **Variation première approchée** : La condition  $\delta J(u^h) = 0$  pour toute perturbation virtuelle admissible approchée  $\delta u^h \in \mathcal{U}^h$  implique que

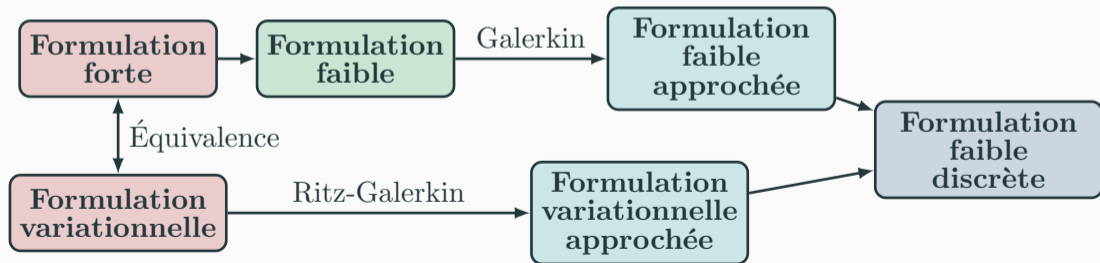
$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i}(u^h) = 0$$

- Ce qui conduit au **système d'équations linéaires** suivant :

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} \alpha_j = r_i$$

## Résumé des formulations

- La méthode variationnelle permet de formuler le problème modèle de la barre comme un **problème de minimisation**.
- En utilisant la méthode de Ritz-Galerkin, on peut approximer la solution exacte en résolvant un système d'équations linéaires.



## Interprétation physique de la forme variationnelle approchée

- Comme la solution approchée  $u^h$  minimise l'énergie potentielle totale du système, cela signifie qu'il y a une **surestimation de l'énergie potentielle totale**:

$$J(u) \leq J(u^h) \quad \forall u^h \in \mathcal{U}^h$$

- L'énergie de déformation est **sous-estimée** par la solution approchée  $u^h$  :

$$U(u) \geq U(u^h) \quad \forall u^h \in \mathcal{U}^h$$

Ceci est cohérent avec la propriété de meilleure approximation en norme de l'énergie de déformation.

**Conséquence :**

**Sous-estimation des déplacements** et **surestimation de la rigidité**.

# Démonstration de la sous-estimation de l'énergie de déformation

- ① Energie potentielle totale au point de stationnarité ( $w = u$ )

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\ell EA \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^\ell qu dx - Pu(\ell)$$

# Démonstration de la sous-estimation de l'énergie de déformation

- ① Energie potentielle totale au point de stationnarité ( $w = u$ )

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\ell EA \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^\ell qu dx - Pu(\ell)$$

- ② Variation première de la fonctionnelle au point de stationnarité ( $w = u$  et  $\delta w = u$ )

$$\delta J(u) = \int_0^\ell EA \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^\ell q\delta u dx - P\delta u(\ell) = 0$$

# Démonstration de la sous-estimation de l'énergie de déformation

- ① Energie potentielle totale au point de stationnarité ( $w = u$ )

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\ell EA \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^\ell qu dx - Pu(\ell)$$

- ② Variation première de la fonctionnelle au point de stationnarité ( $w = u$  et  $\delta w = u$ )

$$\delta J(u) = \int_0^\ell EA \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^\ell q\delta u dx - P\delta u(\ell) = 0$$

- ③ Réécriture de l'énergie potentielle totale au point de stationnarité:

$$J(u) = -\frac{1}{2} \int_0^\ell EA \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx = -U(u).$$

Au point minimal l'énergie potentielle totale du système est égale, au signe près, à son énergie de déformation :  $J(u) = -U(u)$ . Comme  $u^h$  minimise  $J$ ,  $J(u^h) \leq J(u)$ , on a :  $-U(u^h) \leq -U(u)$ .