

# Méthode des éléments finis

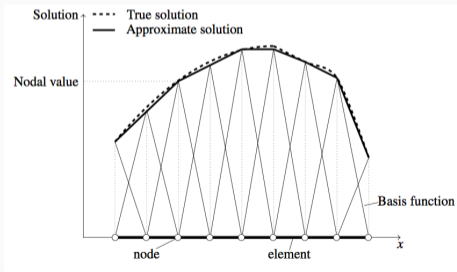
## Approche locale

ME-372 Méthode des éléments finis

2025-2026

François Gallaire

Stefano Burzio



## Plan

- Résumé de la semaine 3
- Approche locale des éléments finis
- Assemblage des grandeurs élémentaires
- Systématisation et éléments archétypes
- Exemple d'application de la méthode des éléments finis

## Références bibliographiques

- ① T. Gmür, Méthode des éléments finis (§§ 2.3.3-2.3.4)
- ② T. Hughes, The finite element method (§§ 1.12-1.16)

## Résumé de la semaine 3

---

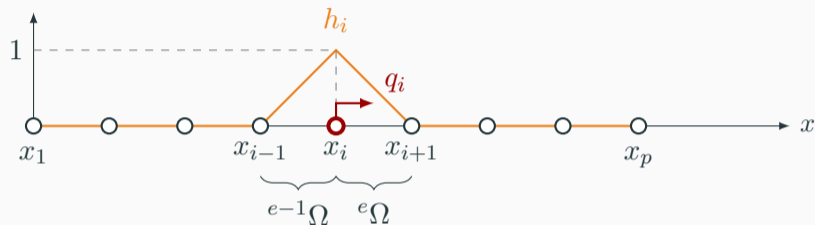
# Maillage unidimensionnel



La discrétisation du segment  $[0, \ell]$  consiste à le subdiviser en un **maillage d'éléments finis**. Le maillage est constitué de :

- un ensemble  $p$  de points appelés **nœuds**,
- un ensemble de  $m = p - 1$  intervalles appelés **éléments finis**.





## Propriétés de $h_i$ :

- Continues aux interfaces (nœuds) et différentiables à l'intérieur des éléments.
- Propriété de Kronecker:  $h_i(x_j) = \delta_{ij}$ .
- Support compact.
- Garantissent les mouvements de corps rigide et les déformations constantes.

$$u^h(x) = \mathbf{H}(x)\mathbf{q} = \sum_{i=1}^p q_i h_i(x)$$

$$\delta u^h(x) = \mathbf{H}(x)\delta\mathbf{q} = \sum_{i=1}^p \delta q_i h_i(x)$$

- $\mathbf{H}$  est une matrice ( $1 \times p$ ) de **fonctions de forme** :

$$\mathbf{H}(x) = [h_1(x), h_2(x), h_3(x), \dots, h_p(x)]$$

- $\mathbf{q}$  est un vecteur ( $p \times 1$ ) des **déplacements nodaux** (*inconnus*).
- $\delta\mathbf{q}$  est un vecteur ( $p \times 1$ ) des **déplacements nodaux virtuels**.

- **K** est **symétrique** et **définie positive**
- **K** est **matrice à bande**
- Pour des fonctions de forme linéaires, **K** est **tridiagonale** :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \ddots & \vdots \\ 0 & k_{32} & k_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & k_{p-1,p} \\ 0 & \cdots & 0 & k_{p,p-1} & k_{pp} \end{bmatrix}$$

## Conditions aux limites naturelles



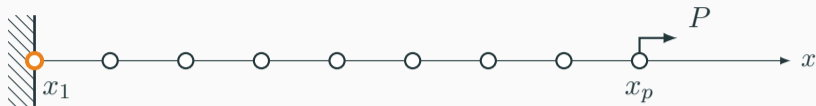
- **Force ponctuelle** : force appliquée au nœud  $x_p = \ell$  :

$$EA \frac{du}{dx}(\ell) = P$$

☞ Contribution de la force ponctuelle dans le vecteur des forces nodales :

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}^T(\ell)P + \int_0^\ell \mathbf{H}^T(x) q(x) dx = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P \end{bmatrix} + \int_0^\ell \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ \vdots \\ h_{p-1}(x) \\ h_p(x) \end{bmatrix} q(x) dx$$

# Conditions aux limites essentielles



- **Condition essentielles** (encastrement) : déplacement imposé en  $x_1 = 0$  :

$$u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = 0$$

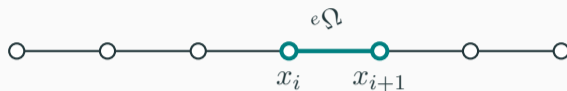
$$\delta u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta q_1 = 0$$

👉 **Reduction du système :**

$$\begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & \cdots & 0 \\ k_{32} & k_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & k_{p-1,p} \\ 0 & \cdots & k_{p,p-1} & k_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_p \end{bmatrix}$$

# Approche locale des éléments finis

---



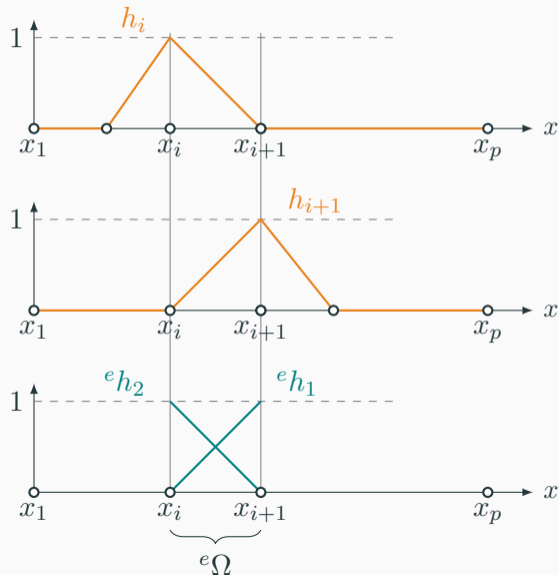
## Paramètres globaux du maillage

- Soit  $p$  le nombre de nœuds.
- Soit  $m = p - 1$  le nombre d'éléments finis.

## Paramètres locaux du maillage

- Soit  $e^\Omega$  un élément fini du maillage,  $e = 1, \dots, m$ .
- Soit  $e^p = 2$  le nombre de nœuds dans l'élément  $e^\Omega$ .

# Caractère compact des fonctions de forme



**Fonctions de forme**

$$h_i, i = 1, \dots, p$$

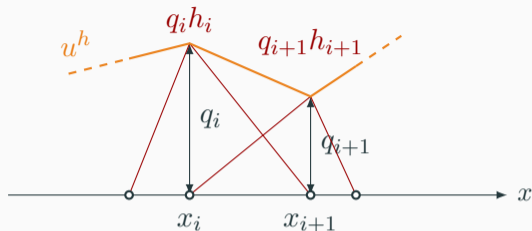
Restriction sur l'élément  
fini générique  ${}^e \Omega$

**Fonctions de base**

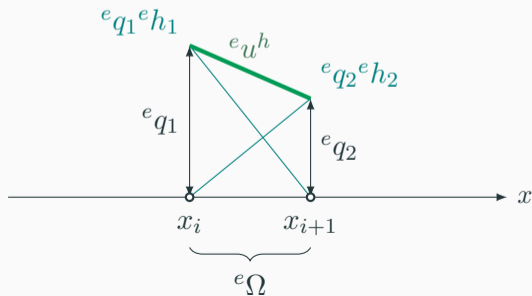
$${}^e h_1, {}^e h_2, e = 1, \dots, m$$

# Restriction du déplacement $u^h$ sur l'élément fini ${}^e\Omega$

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^p q_i h_i(x), \quad x \in [0, \ell]$$



$${}^e u^h(x) = \sum_{i=1}^e q_i {}^e h_i(x), \quad x \in {}^e\Omega$$



## Caractérisation de la localisation ${}^e u^h$

Restriction de  $u^h$  et de  $\delta u^h$  sur l'élément fini générique  ${}^e \Omega$  :

$${}^e u^h(x) = \sum_{i=1}^{e_p} {}^e h_i(x) {}^e q_i = {}^e \mathbf{H}(x) {}^e \mathbf{q}$$

$${}^e \delta u^h(x) = \sum_{i=1}^{e_p} {}^e h_i(x) {}^e \delta q_i = {}^e \mathbf{H}(x) {}^e \delta \mathbf{q}$$

${}^e \mathbf{H} = [{}^e h_1, {}^e h_2, \dots, {}^e h_{e_p}]$  matrice ( $1 \times e_p$ ) des fonctions de base de l'élément  ${}^e \Omega$

${}^e \mathbf{q} = [{}^e q_1, {}^e q_2, \dots, {}^e q_{e_p}]^T$  vecteur ( $e_p \times 1$ ) des déplacements nodaux de l'élément  ${}^e \Omega$

${}^e \delta \mathbf{q} = [{}^e \delta q_1, {}^e \delta q_2, \dots, {}^e \delta q_{e_p}]^T$  vecteur ( $e_p \times 1$ ) des déplacements nodaux virtuels de l'élément  ${}^e \Omega$

# Matrices de localisation

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline e_{q_1} \\ \hline \vdots \\ \hline e_{q_{e_p}} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} \updownarrow \\ e_p \\ \updownarrow \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{|ccc|} \hline e_{l_{1,1}} & \dots & e_{l_{1,p}} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline e_{l_{e_p,1}} & \dots & e_{l_{e_p,p}} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} \leftarrow p \rightarrow \\ p \\ \leftarrow p \rightarrow \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline q_1 \\ \hline \vdots \\ \hline q_p \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} \updownarrow \\ p \\ \updownarrow \end{array} \end{array}$$

$\begin{array}{c} \leftarrow 1 \rightarrow \\ 1 \\ \leftarrow 1 \rightarrow \end{array}$

$${}^e \mathbf{q} = {}^e \mathbf{L} \mathbf{q}$$

${}^e \mathbf{L}$  est une matrice booléenne de localisation de taille  $(e_p \times p)$ :

$$e_{l_{i,j}} = \begin{cases} 1 & \text{si le nœud global } j \text{ correspond au nœud local } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

## Exemple d'une matrice de localisation



Matrice de localisation pour l'élément fini  ${}^4\Omega$  :

$${}^4\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### Utilisation de la mémoire

- Chaque matrice de localisation  ${}^e\mathbf{L}$  est des dimensions  ${}^e p \times p$  et est creuse.
- Pour un maillage de  $m = p + 1$  éléments, il est nécessaire de stocker  $m$  matrices de localisation.
- Il est donc préférable de représenter l'ensemble des matrices de localisation sous forme d'un tableau de connectivité pour optimiser le stockage.

## Exemple d'un tableau de connectivité



Tableau de connectivité :

$e\Omega$	$1\Omega$	$2\Omega$	$3\Omega$	$4\Omega$	$5\Omega$
1	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	6

# Assemblage des grandeurs élémentaires

---

## ■ Rappel de la forme faible approchée :

Trouver le déplacement approché  $u^h \in \mathcal{U}^h$  tel que pour tout déplacement virtuel  $\delta u^h \in \mathcal{V}^h$

$$\int_0^\ell EA \frac{d\delta u^h}{dx} \frac{du^h}{dx} dx = P \delta u^h(\ell) + \int_0^\ell q \delta u^h dx$$

## ■ Localisations de l'intégrale en utilisant l'additivité :

$$\sum_{e=1}^m \int_{e\Omega} {}^e E^e A \frac{d^e \delta u^h}{dx} \frac{d^e u^h}{dx} dx = \sum_{e=1}^m \left( P^e \delta u^h(\ell) \delta_{em} + \int_{e\Omega} {}^e q^e \delta u^h dx \right)$$

## ■ Remplacement par les grandeurs locales :

$${}^e u^h = {}^e \mathbf{H}^e \mathbf{q} \quad \text{et} \quad {}^e \delta u^h = {}^e \mathbf{H}^e \delta \mathbf{q}.$$

## Additivité des intégrales (suite)

Rappelons que  ${}^e u^h = {}^e \mathbf{H}^e \mathbf{L} \mathbf{q}$  et  ${}^e \delta u^h = {}^e \mathbf{H}^e \mathbf{L} \delta \mathbf{q}$ .

- Considérons uniquement le terme lié au travail virtuel des forces internes :

$$\sum_{e=1}^m \int_{{}^e \Omega} {}^e E^e A \frac{d^e \delta u^h}{dx} \frac{d^e u^h}{dx} dx = \delta \mathbf{q}^T \sum_{e=1}^m {}^e \mathbf{L}^T \underbrace{\left( \int_{{}^e \Omega} {}^e E^e A \frac{d^e \mathbf{H}^T}{dx} \frac{d^e \mathbf{H}}{dx} dx \right)}_{{}^e \mathbf{K}} {}^e \mathbf{L} \mathbf{q}$$

- De manière analogue, pour le terme lié au travail virtuel des forces externes :

$$\sum_{e=1}^m \left( P^e \delta u^h(\ell) \delta_{em} + \int_{{}^e \Omega} {}^e q^e \delta u^h dx \right) = \delta \mathbf{q}^T \sum_{e=1}^m {}^e \mathbf{L}^T \underbrace{\left( P^e \mathbf{H}^T(\ell) \delta_{em} + \int_{{}^e \Omega} {}^e \mathbf{H}^T {}^e q dx \right)}_{{}^e \mathbf{r}}$$

- Matrice élémentaire de rigidité ( ${}^e p \times {}^e p$ ) :

$${}^e \mathbf{K} = \int_{{}^e \Omega} {}^e E {}^e A {}^e \mathbf{B}^T {}^e \mathbf{B} dx$$

$${}^e \mathbf{B} = \frac{d}{dx} {}^e \mathbf{H} = \left[ \frac{d^e h_1}{dx}, \frac{d^e h_2}{dx}, \dots, \frac{d^e h_{e_p}}{dx} \right] \text{ matrice élémentaire de déformation.}$$

- Vecteur élémentaire des forces appliquées ( ${}^e p \times 1$ ) :

$${}^e \mathbf{r} = P {}^e \mathbf{H}^T(\ell) \delta_{em} + \int_{{}^e \Omega} {}^e \mathbf{H}^T {}^e q dx.$$

Nous définissons l'opérateur d'assemblage comme suit

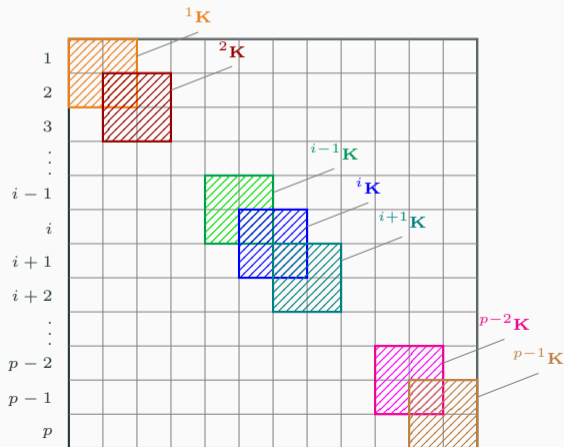
$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \mathbf{K} = \sum_{e=1}^m \mathbf{e}_L^T \mathbf{K}^e \mathbf{e}_L$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} \mathbf{r} = \sum_{e=1}^m \mathbf{e}_L^T \mathbf{r}^e$$

# Exemple d'assemblage de la matrice globale de rigidité

$e\Omega$	$1\Omega$	$2\Omega$	$\dots$	$i-1\Omega$	$i\Omega$	$i+1\Omega$	$\dots$	$p-2\Omega$	$p-1\Omega$
1	1	2	$\dots$	$i-1$	$i$	$i+1$	$\dots$	$p-2$	$p-1$
2	2	3	$\dots$	$i$	$i+1$	$i+2$	$\dots$	$p-1$	$p$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^m e\mathbf{L}^T e\mathbf{K} e\mathbf{L} =$$

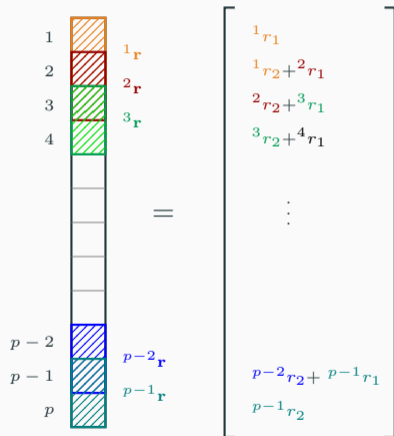


## Exemple d'assemblage de la matrice globale de rigidité

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
 {}^1k_{1,1} & {}^1k_{1,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 {}^1k_{2,1} & {}^1k_{2,2} + {}^2k_{1,1} & {}^2k_{1,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 0 & {}^2k_{2,1} & {}^2k_{2,2} + {}^3k_{1,1} & {}^3k_{1,2} & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & {}^{p-2}k_{2,2} + {}^{p-1}k_{1,1} & {}^{p-1}k_{1,2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & {}^{p-1}k_{2,1} & {}^{p-1}k_{2,2}
 \end{bmatrix}$$

# Exemple d'assemblage du vecteur des forces global

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^m e \mathbf{L}^T e_{\mathbf{r}} =$$



## QCM : matrice élémentaire de rigidité

Considérons le maillage uniforme suivant :



Matrice élémentaire de rigidité pour l'élément fini  ${}^4\Omega$  :

$${}^4\mathbf{K} = \int_{x_4}^{x_5} {}^4E^4 A \begin{bmatrix} \frac{d^4 h_1}{dx} & \frac{d^4 h_1}{dx} & \frac{d^4 h_1}{dx} & \frac{d^4 h_2}{dx} \\ \frac{d^4 h_2}{dx} & \frac{d^4 h_1}{dx} & \frac{d^4 h_2}{dx} & \frac{d^4 h_2}{dx} \end{bmatrix} dx$$

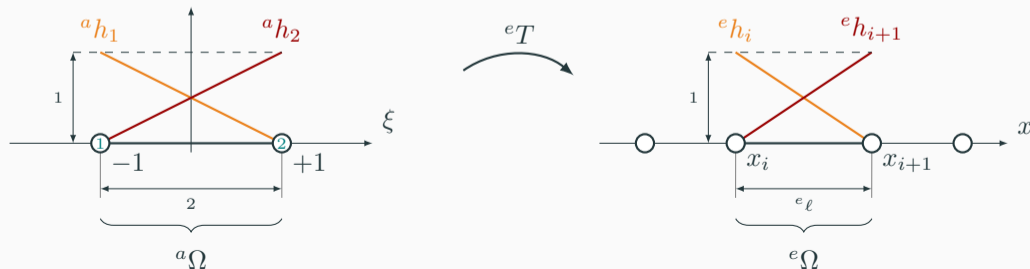
# Systematisation et éléments archétypes

---

# Changement de repère

Pour simplifier le calcul des intégrales, nous utilisons un changement de variable pour passer de la *coordonnée physique*  $x$  à la *coordonnée naturelle ou intrinsèque*  $\xi$  définie sur l'**élément archétype**  ${}^a\Omega = [-1, 1]$ .

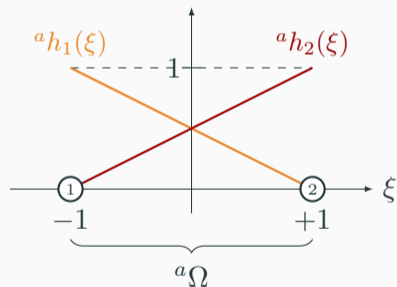
$$\xi(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} (2x - x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{e_\ell} (2x - x_i - x_{i+1})$$



## Fonctions de base linéaires de l'élément archétype

$${}^a h_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$${}^a h_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$



## Composantes de la matrice élémentaire de rigidité

$${}^e k_{11} = \int_{{}^e \Omega} {}^e E {}^e A \left( \frac{d^e h_1}{dx} \right)^2 dx = \int_{-1}^1 {}^e E {}^e A \left( \frac{d^a h_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{{}^e \ell}{2} d\xi = \frac{{}^e E {}^e A}{{}^e \ell}$$

$${}^e k_{12} = {}^e k_{21} = \int_{{}^e \Omega} {}^e E {}^e A \frac{d^e h_1}{dx} \frac{d^e h_2}{dx} dx = \int_{-1}^1 {}^e E {}^e A \left( \frac{d^a h_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right) \left( \frac{d^a h_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right) \frac{{}^e \ell}{2} d\xi = -\frac{{}^e E {}^e A}{{}^e \ell}$$

$${}^e k_{22} = \int_{{}^e \Omega} {}^e E {}^e A \left( \frac{d^e h_2}{dx} \right)^2 dx = \int_{-1}^1 {}^e E {}^e A \left( \frac{d^a h_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{{}^e \ell}{2} d\xi = \frac{{}^e E {}^e A}{{}^e \ell}$$

*Remarque :* Comme  $\xi = \frac{1}{{}^e \ell} (2x - x_i - x_{i+1})$  alors

$$dx = \frac{{}^e \ell}{2} d\xi.$$

Matrice élémentaire de rigidité ( $2 \times 2$ ) :

$${}^e\mathbf{K} = \frac{{}^eE^eA}{{}^e\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matrice symétrique et singulière.
- Matrice indépendante de la position de l'élément fini dans le réseau.
- Paramètres de la matrice :
  - matériau de l'élément fini :  ${}^eE$ ,
  - géométrie de l'élément fini :  ${}^eA$  et  ${}^e\ell$ .

# Composantes du vecteur élémentaire des forces appliquées

Considérons une charge répartie constante  $q$ .

$${}^e r_1 = P {}^e h_1(\ell) \delta_{em} + \int_{{}^e \Omega} {}^e h_1 q dx = \int_{-1}^1 {}^a h_1(\xi) q \frac{{}^e \ell}{2} d\xi = q \frac{{}^e \ell}{2}$$

$${}^e r_2 = P {}^e h_2(\ell) \delta_{em} + \int_{{}^e \Omega} {}^e h_2 q dx = P \delta_{em} + \int_{-1}^1 {}^a h_2(\xi) q \frac{{}^e \ell}{2} d\xi = P \delta_{em} + q \frac{{}^e \ell}{2}$$

**Vecteur élémentaire des forces appliquées ( $2 \times 1$ ) :**

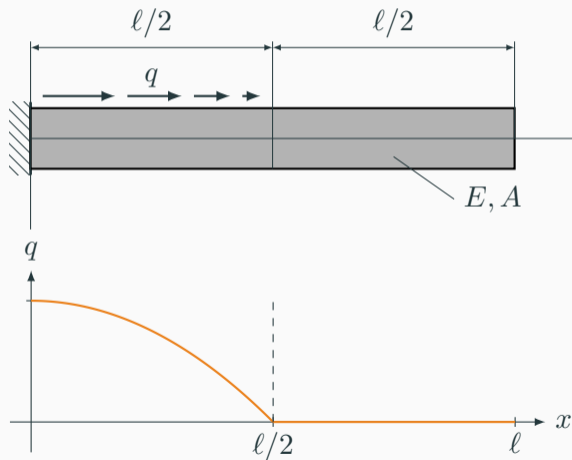
$${}^e \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix} \delta_{em} + q \frac{{}^e \ell}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Paramètres du vecteur : charges ponctuelle  $P$  et répartie  $q$ , et géométrie de l'élément  ${}^e \ell$ .

## Exemple d'application de la méthode des éléments finis

---

# Barre prismatique écastrée soumise à une charge quadratique



## Données

- Charge quadratique agissant sur la moitié de la structure :

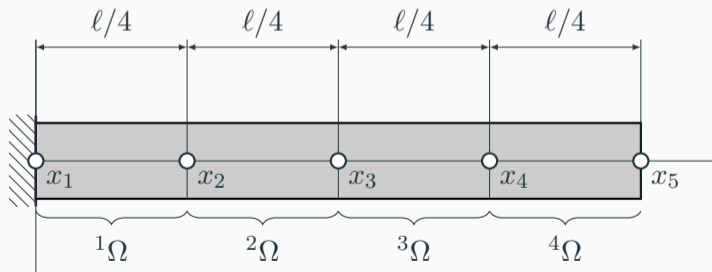
$$q(x) = \begin{cases} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) & 0 \leq x \leq \ell/2 \\ 0 & \ell/2 < x \leq \ell \end{cases}$$

- Charge ponctuelle axiale agissant sur l'extrémité droite nulle :

$$P = 0$$

## Discrétisation du domaine

La discrétisation choisie est composée de : 5 nœuds équidistants ( $p = 5$ ), 4 éléments finis ( $m = 4$ ), fonctions de forme linéaires par morceaux.



# Calcul de la matrice globale de rigidité K

- Matrice élémentaire de rigidité :

$${}^e\mathbf{K} = \frac{{}^eE^eA}{{}^e\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{4EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad e = 1, 2, 3, \text{ et } 4.$$

- Assemblage de la matrice globale de rigidité :

$$\mathbf{K} = \frac{4EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1	1	-1			
2	-1	2	-1		
3		-1	2	-1	
4			-1	2	-1
5				-1	1
	1	2	3	4	5

Même matrice que celle obtenue la semaine dernière à l'aide de l'approche globale.

## Calcul du vecteur global des forces externes $r$

Rappel :  $\xi = \frac{1}{\ell} (2x - x_i - x_{i+1})$

■ Pour  ${}^1\Omega$  on a  $\xi = \frac{8x}{\ell} - 1$

$${}^1r_1 = \int_0^{\ell/4} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{8x}{\ell} - 1\right)\right] dx = \frac{23\hat{q}\ell}{192}$$

$${}^1r_2 = \int_0^{\ell/4} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{8x}{\ell} - 1\right)\right] dx = \frac{7\hat{q}\ell}{64}$$

■ Pour  ${}^2\Omega$  on a  $\xi = \frac{4x}{\ell} - 3$

$${}^2r_1 = \int_{\ell/4}^{\ell/2} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{8x}{\ell} - 3\right)\right] dx = \frac{13\hat{q}\ell}{192}$$

$${}^2r_2 = \int_{\ell/4}^{\ell/2} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{8x}{\ell} - 3\right)\right] dx = \frac{7\hat{q}\ell}{192}$$

## Calcul du vecteur global des forces externes $\mathbf{r}$

■ Pour  ${}^3\Omega$  et  ${}^4\Omega$  on  $q = 0$  donc  ${}^3\mathbf{r} = {}^4\mathbf{r} = \mathbf{0}$ .

■ **Assemblage du vecteur global des forces externes :**

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} {}^1r_1 \\ {}^1r_2 + {}^2r_1 \\ {}^2r_2 + {}^3r_1 \\ {}^3r_2 + {}^4r_1 \\ {}^4r_2 \end{bmatrix} = \frac{\hat{q}\ell}{192} \begin{bmatrix} 23 \\ 7 + 13 \\ 7 + 0 \\ 0 + 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\hat{q}\ell}{192} \begin{bmatrix} 23 \\ 34 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Même vecteur que celui obtenu la semaine dernière à l'aide de l'approche globale.

*Remarque (conservation de la charge totale) :* on peut vérifier que la somme des forces nodales  $\sum_{i=1}^5 r_i = \hat{q}\frac{\ell}{3}$  est égale à la force totale appliquée sur la structure:

$$\int_0^\ell q \, dx = \int_0^{\ell/2} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) dx = \hat{q}\frac{\ell}{3}$$

- **Système linéaire réduit** :  $\mathbf{K}_{\text{réd}} \mathbf{q}_{\text{réd}} = \mathbf{r}_{\text{réd}}$

$$\mathbf{K}_{\text{réd}} = \frac{4EA}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{\text{réd}} = \frac{\hat{q}\ell}{192} \begin{bmatrix} 34 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- **Déplacements nodaux approchés** :

$$\mathbf{q}_{\text{réd}} = \mathbf{K}_{\text{réd}}^{-1} \mathbf{r}_{\text{réd}} = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = \frac{\hat{q}\ell^2}{192EA} \begin{bmatrix} 55 \\ 96 \\ 96 \\ 55 \end{bmatrix}.$$