

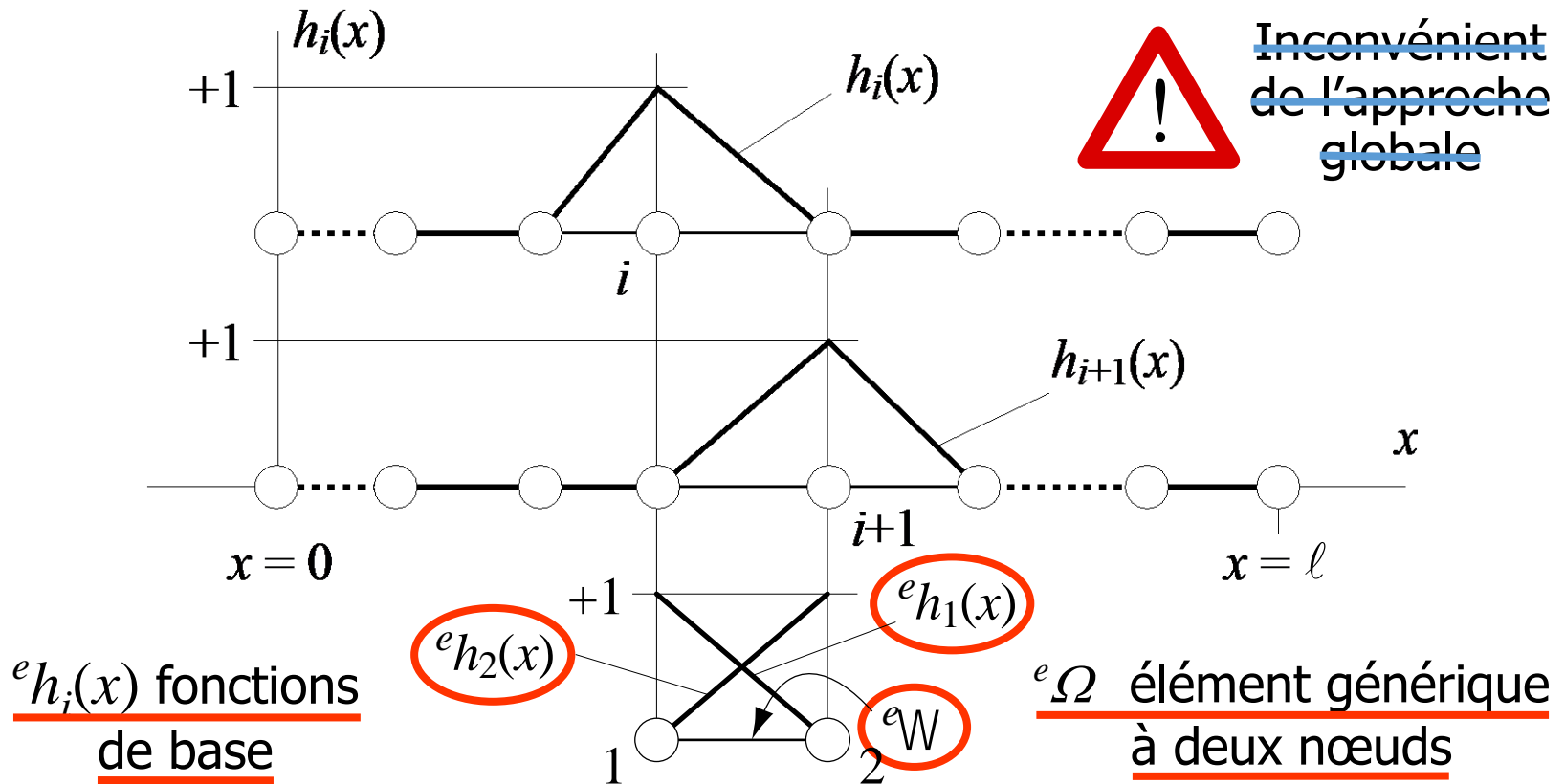
# Méthode des éléments finis

## Formulation intégrale du problème modèle de la barre

Prof. F. Gallaire

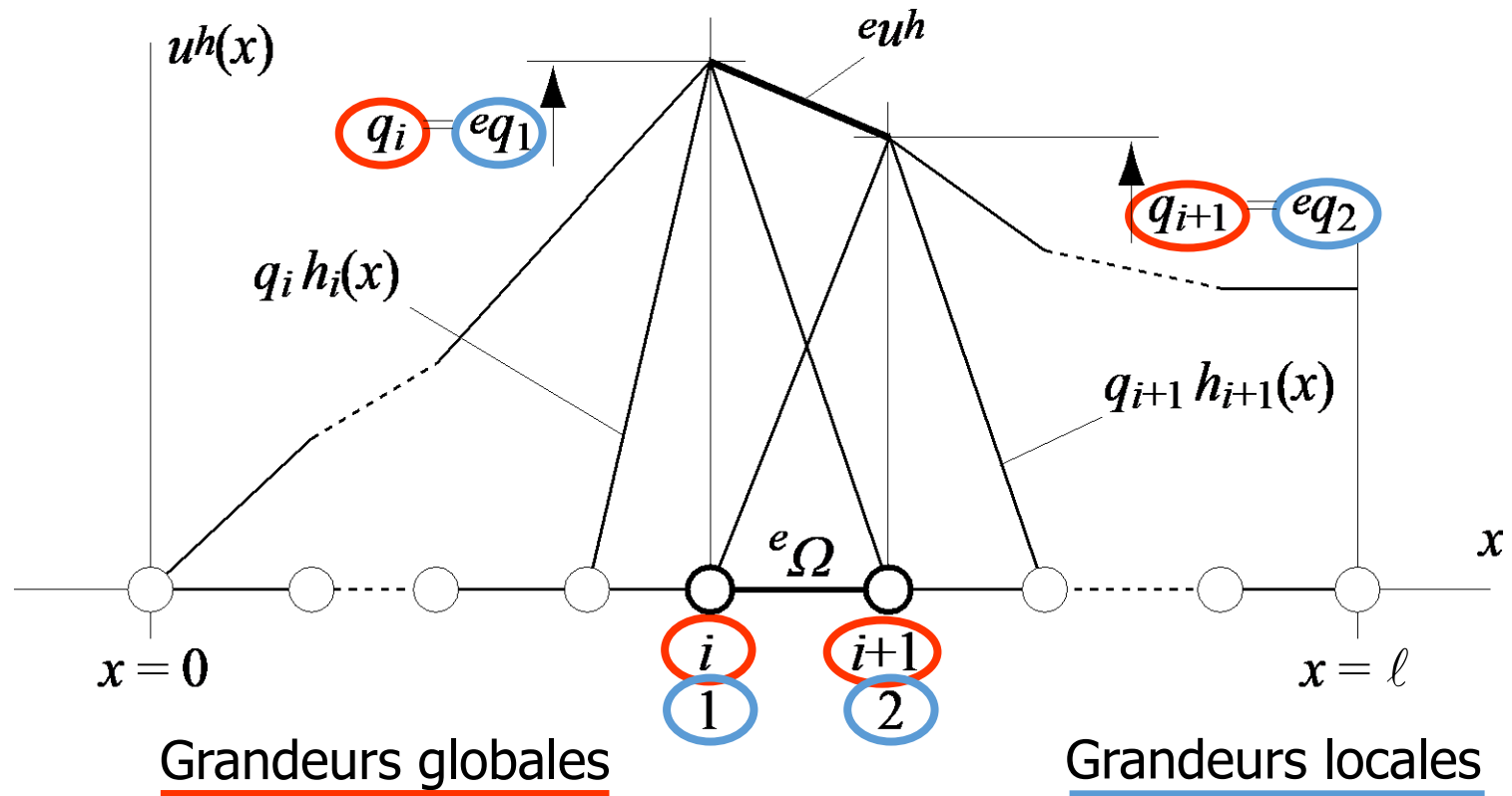
# Méthode des éléments finis : approche locale

- Caractère compact des fonctions de forme nodales



# Méthode des éléments finis : approche locale

- Restriction de la solution  $u^h$  sur l'élément fini générique  $e_\Omega$



# Méthode des éléments finis : approche locale

- Caractérisation de la restriction  ${}^e u^h$  de la solution  $u^h$  sur l'élément fini générique  ${}^e \Omega$

$${}^e u^h(x) = \sum_{i=1}^{e_p} {}^e h_i(x) {}^e q_i = {}^e \mathbf{H}(x) {}^e \mathbf{q}$$

${}^e p$  nombre de nœuds de l'élément  ${}^e \Omega$

$${}^e \mathbf{H} = [{}^e h_1, {}^e h_2, \dots, {}^e h_i, \dots, {}^e h_{e_p}]$$

matrice ( $1 \times {}^e p$ ) des fonctions de base de l'élément  ${}^e \Omega$

$${}^e \mathbf{q} = \{{}^e q_1, {}^e q_2, \dots, {}^e q_i, \dots, {}^e q_{e_p}\}^T$$

vecteur ( ${}^e p \times 1$ ) des déplacements nodaux de l'élément  ${}^e \Omega$

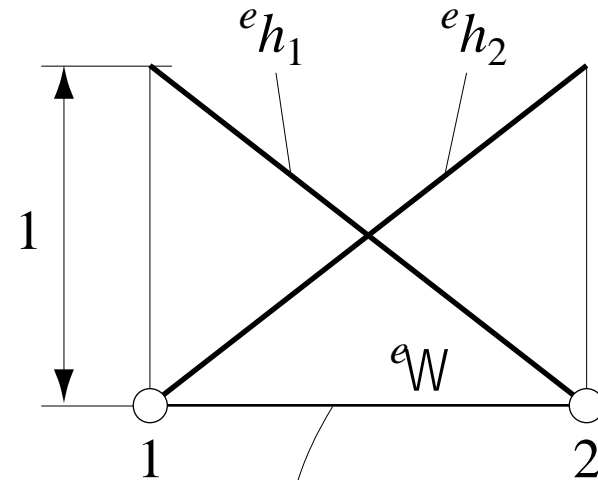
# Méthode des éléments finis : approche locale

- Restriction de la solution sur un élément fini à deux nœuds

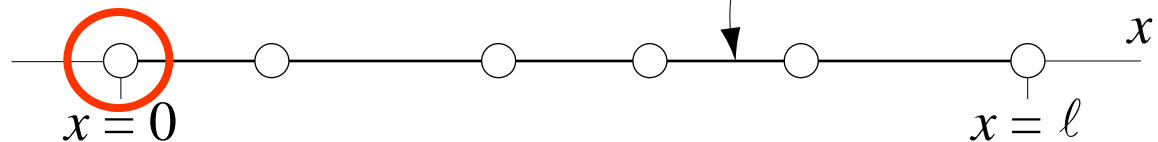
$${}^e u^h(x) = \sum_{i=1}^2 {}^e h_i(x) {}^e q_i = {}^e \mathbf{H}(x) {}^e \mathbf{q}$$

$${}^e \mathbf{H} = [{}^e h_1, {}^e h_2]$$

$${}^e \mathbf{q} = \{{}^e q_1, {}^e q_2\}^T$$



Neutralisation de la condition aux limites essentielle en  $x = 0$



# Méthode des éléments finis : approche locale

- Localisation des déplacements nodaux

$${}^e \mathbf{q} = {}^e \mathbf{L} \mathbf{q}$$

$${}^e \mathbf{L} = \begin{bmatrix} {}^e l_{11} & {}^e l_{12} & \dots & {}^e l_{1,p} \\ {}^e l_{21} & {}^e l_{22} & \dots & {}^e l_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^e l_{ep,1} & {}^e l_{ep,2} & \dots & {}^e l_{ep,p} \end{bmatrix}$$



$p$  = nombre total de nœuds (point nodal "0" compris)

matrice ( ${}^e p \times p$ ) booléenne de localisation



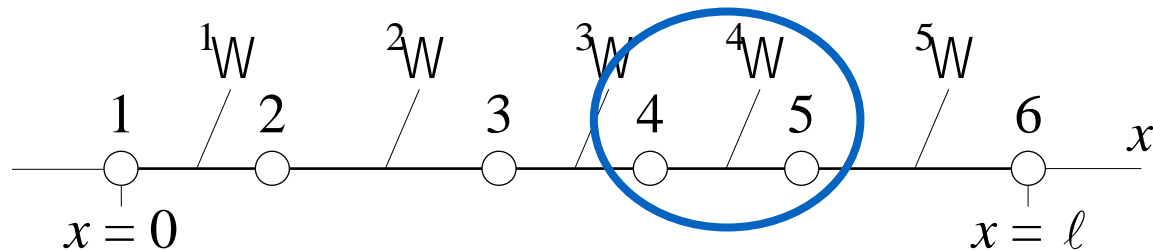
Matrice  ${}^e \mathbf{L}$  très peu peuplée



Condensation de la localisation sous la forme d'un tableau de connectivité

# Méthode des éléments finis : approche locale

- Exemple de localisation et tableau de connectivité associé



$${}^4\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ pour l'élément fini } {}^4\Omega$$

	${}^4W$	${}^1W$	${}^2W$	${}^3W$	${}^4W$	${}^5W$	
numérotation <u>locale</u>	<u>1</u> <u>2</u>	1	2	3	<u>4</u> <u>5</u>	5	numérotation <u>globale</u>
		1	2	3	4	5	
		2	3	4	5	6	

# Méthode des éléments finis : approche locale

- Critères de convergence à satisfaire par les fonctions  ${}^e h_i(x)$ 
  - Critère de complétude
  - Critère de différentiabilité
  - Critère de continuité



Critères identiques à ceux de l'approche globale

- Critères de continuité restreinte

$${}^e h_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, {}^e p)$$

- Critère de déplacement rigide  $\sum_{i=1}^{{}^e p} {}^e h_i(x) = 1$
- Critère de déformation constante  $\sum_{i=1}^{{}^e p} [d^e h_i(x)/dx] = 0$



# Méthode des éléments finis : approche locale

- Assemblage des grandeurs élémentaires
  - Rappel de la forme faible approchée

$$u^h \in U^h : \int_0^\ell EA (du^h/dx) (d\delta u^h/dx) dx = P \delta u^h(\ell) + \int_0^\ell q \delta u^h dx \quad \forall \delta u^h \in V^h$$

- Prise en compte de l'additivité de l'intégration ( $m$  éléments finis)

$$\sum_{e=1}^m \left( \int_{\Omega^e} EA (du^h/dx) (d\delta u^h/dx) dx - P \delta u^h(\ell) \delta_{em} - \int_{\Omega^e} q \delta u^h dx \right) = 0 \quad \forall \delta u^h$$




~~Inconvénient~~  
~~Restriction à~~  
~~de l'approche~~  
~~Condition aux~~  
~~limites naturelle~~  
~~globale~~

# Méthode des éléments finis : approche locale


- Insertion de l'approximation locale  ${}^e u^h = {}^e \mathbf{H} {}^e \mathbf{q}$

$${}^e \delta u^h = {}^e \mathbf{H} {}^e \delta \mathbf{q}$$

$$\sum_{e=1}^m {}^e \delta \mathbf{q}^T \left( \int_{{}^e \Omega} {}^e E^e A (d{}^e \mathbf{H}^T/dx) (d{}^e \mathbf{H}/dx) dx \cdot {}^e \mathbf{q} - {}^e \mathbf{H}^T(\ell) P \delta_{em} - \int_{{}^e \Omega} {}^e \mathbf{H}^T {}^e q dx \right) = 0 \quad \forall \delta u^h$$


- Insertion de la localisation des déplacements  ${}^e \mathbf{q} = {}^e \mathbf{L} \mathbf{q}$

$${}^e \delta \mathbf{q} = {}^e \mathbf{L} \delta \mathbf{q}$$

$$\sum_{e=1}^m \delta \mathbf{q}^T {}^e \mathbf{L}^T \left( \int_{{}^e \Omega} {}^e E^e A (d{}^e \mathbf{H}^T/dx) (d{}^e \mathbf{H}/dx) dx \cdot {}^e \mathbf{L} \mathbf{q} - {}^e \mathbf{H}^T(\ell) P \delta_{em} - \int_{{}^e \Omega} {}^e \mathbf{H}^T {}^e q dx \right) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q}$$


# Méthode des éléments finis : approche locale

- Forme faible discrète locale  $\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r}$

$$\sum_{e=1}^m {}^e\mathbf{L}^T \left( \int_{{}^e\Omega} {}^eE^e A (d^e\mathbf{H}^T/dx) (d^e\mathbf{H}/dx) dx \right) {}^e\mathbf{L} \cdot \mathbf{q}$$

matrice de rigidité  $\mathbf{K}$

$$= \sum_{e=1}^m {}^e\mathbf{L}^T \left( {}^e\mathbf{H}^T(\ell) P \delta_{em} + \int_{{}^e\Omega} {}^e\mathbf{H}^T {}^e q dx \right)$$

vecteur des forces appliquées  $\mathbf{r}$

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^m {}^e\mathbf{L}^T \mathbf{K}^e \mathbf{L}$$

grandeurs élémentaires

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^m {}^e\mathbf{L}^T \mathbf{r}^e$$

# Méthode des éléments finis : approche locale

- Matrice élémentaire ( ${}^e p \times {}^e p$ ) de rigidité

$${}^e \mathbf{K} = \int_{{}^e \Omega} {}^e E {}^e A (d{}^e \mathbf{H}^T/dx) (d{}^e \mathbf{H}/dx) dx$$

- Vecteur élémentaire ( ${}^e p \times 1$ ) des forces extérieures

$${}^e \mathbf{r} = {}^e \mathbf{H}^T(\ell) P \delta_{em} + \int_{{}^e \Omega} {}^e \mathbf{H}^T {}^e q dx$$

- Opération d'assemblage des matrices et vecteurs élémentaires

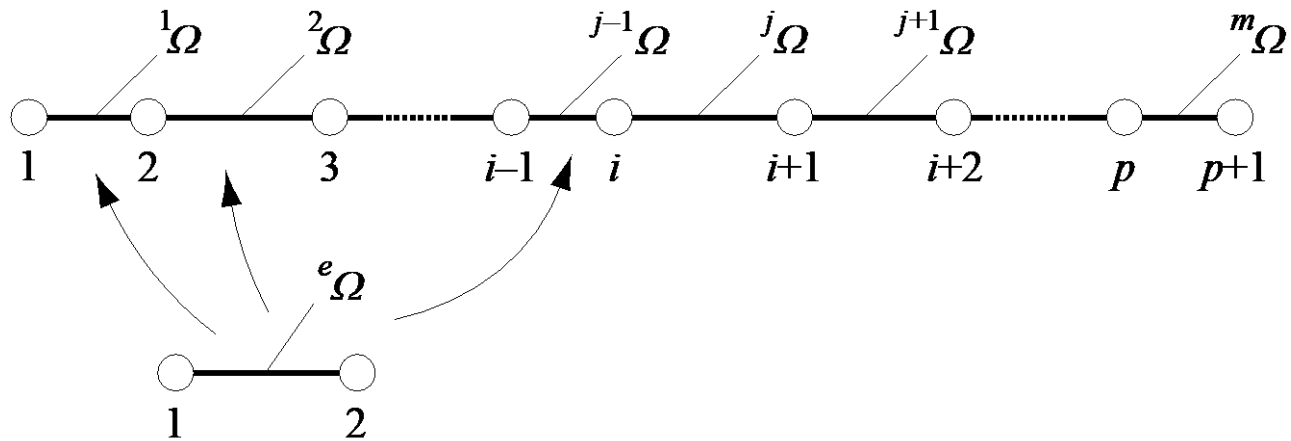
$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^m {}^e \mathbf{L}^T {}^e \mathbf{K} {}^e \mathbf{L} = \mathbf{A} \mathbf{K}$$

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^m {}^e \mathbf{L}^T {}^e \mathbf{r} = \mathbf{A} \mathbf{r}$$

$\mathbf{A}$  opérateur  
d'assemblage

# Méthode des éléments finis : approche locale

- Exemple d'assemblage d'éléments finis à deux points nodaux



$e_\Omega$	$1_\Omega$	$2_\Omega$	...	$j-1_\Omega$	$j_\Omega$	$j+1_\Omega$	...	$m_\Omega$
1	1	2	...	$i-1$	$i$	$i+1$	...	$p$
2	2	3	...	$i$	$i+1$	$i+2$	...	$p+1$

# Méthode des éléments finis : approche locale

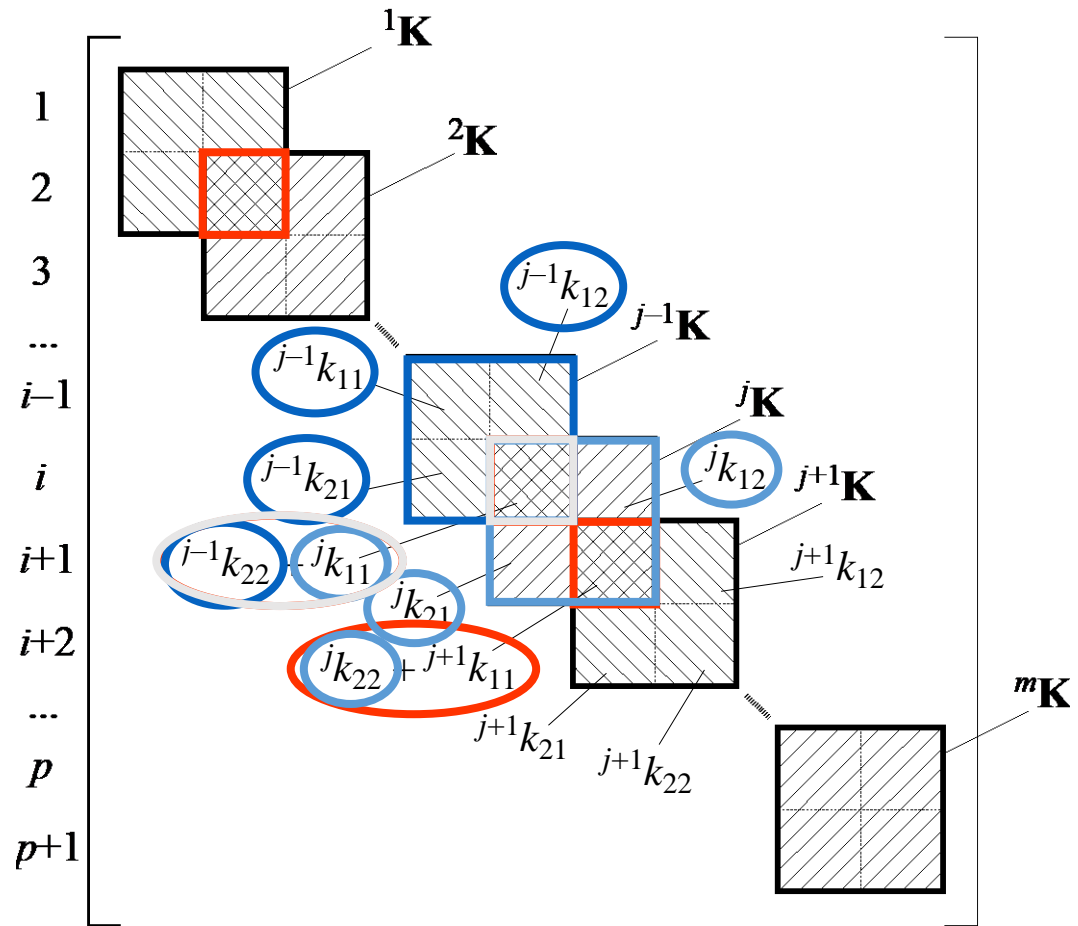
Assemblage schématique de la matrice de rigidité globale



Sommation des termes communs

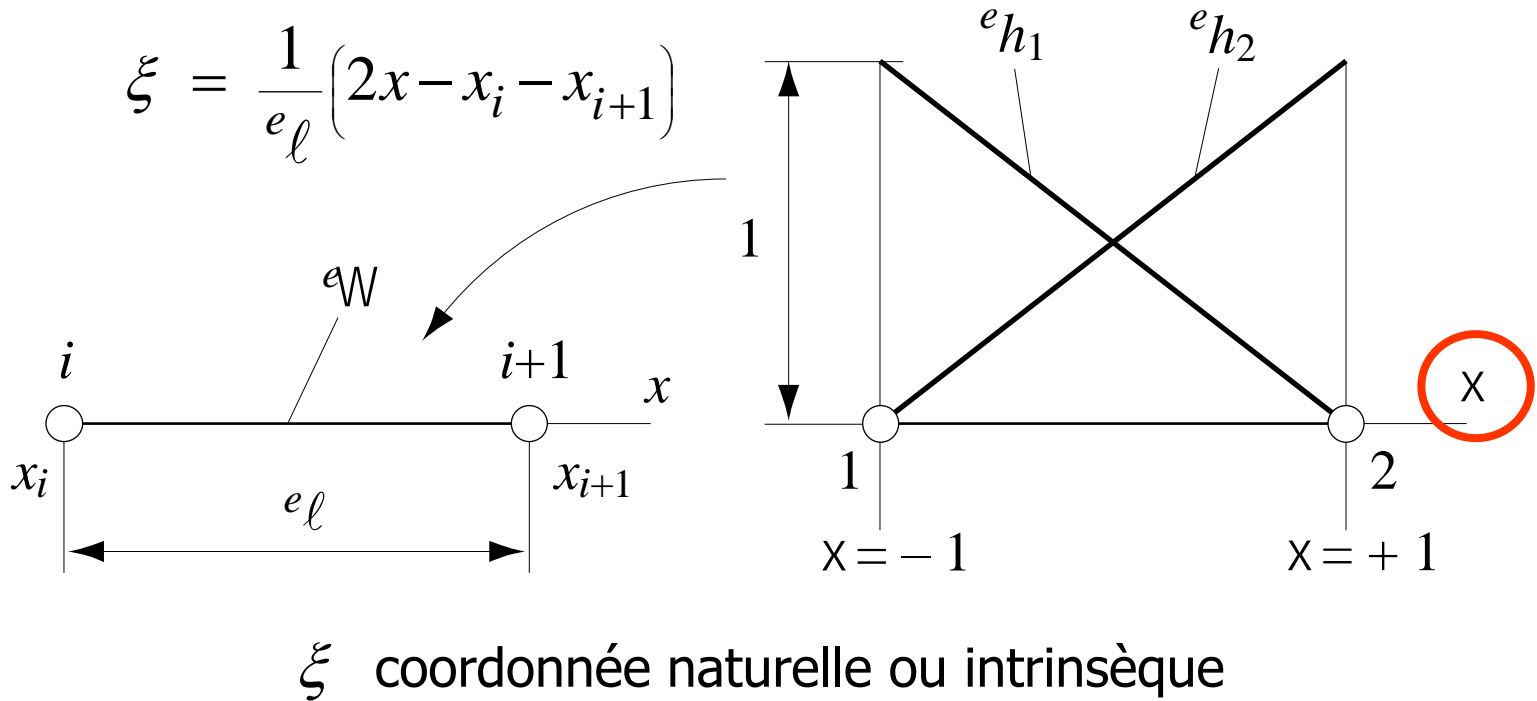


Structure en forme de bande



# Méthode des éléments finis : approche locale

- Matrice de rigidité d'un élément fini à deux points nodaux
  - Changement de repère

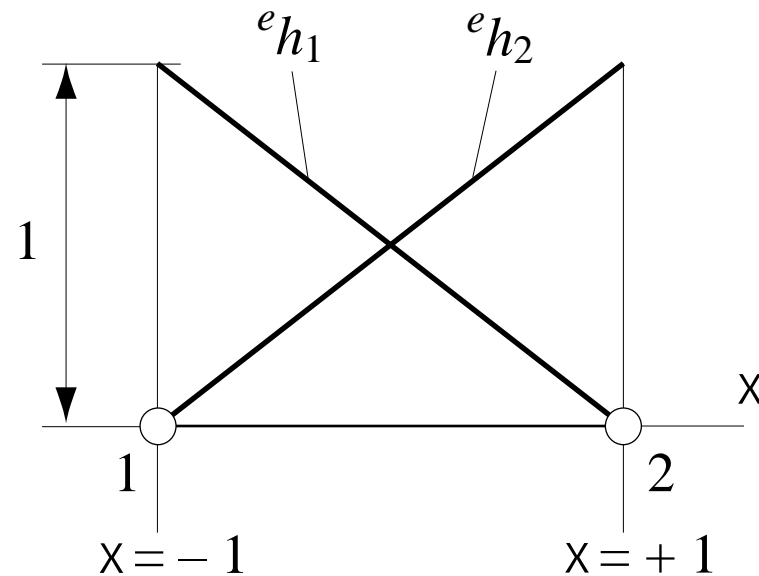


# Méthode des éléments finis : approche locale

- Fonctions de base linéaires de l'élément

$${}^e h_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi)$$

$${}^e h_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi)$$



# Méthode des éléments finis : approche locale

- Composantes de la matrice de rigidité

$$\begin{aligned}
 {}^e k_{11} &= \int_{{}^e \Omega} {}^e E {}^e A (d^e h_1/dx)^2 dx \\
 &= \int_{{}^e \Omega} {}^e E {}^e A (d^e h_1/d\xi)^2 (d\xi/dx) dx \\
 &= \int_{-1}^{+1} {}^e E {}^e A \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{{}^e \ell}\right)^2 \frac{{}^e \ell}{2} d\xi = {}^e E {}^e A / {}^e \ell
 \end{aligned}$$



$$\xi = (2x - x_i - x_{i+1})/{}^e \ell \Rightarrow d\xi/dx = 2/{}^e \ell ; dx = ({}^e \ell/2) d\xi$$

$${}^e k_{12} = {}^e k_{21} = \int_{{}^e \Omega} {}^e E {}^e A (d^e h_1/dx) (d^e h_2/dx) dx = - {}^e E {}^e A / {}^e \ell$$

$${}^e k_{22} = \int_{{}^e \Omega} {}^e E {}^e A (d^e h_2/dx)^2 dx = {}^e E {}^e A / {}^e \ell$$

# Méthode des éléments finis : approche locale

- Matrice élémentaire de rigidité

$${}^e\mathbf{K} = \frac{{}^eE {}^eA}{{}^e\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



Matrice (2×2)  
singulière



Critère de  
déplacement  
rigide



Matrice indépendante de la  
position de l'élément fini  
dans le réseau

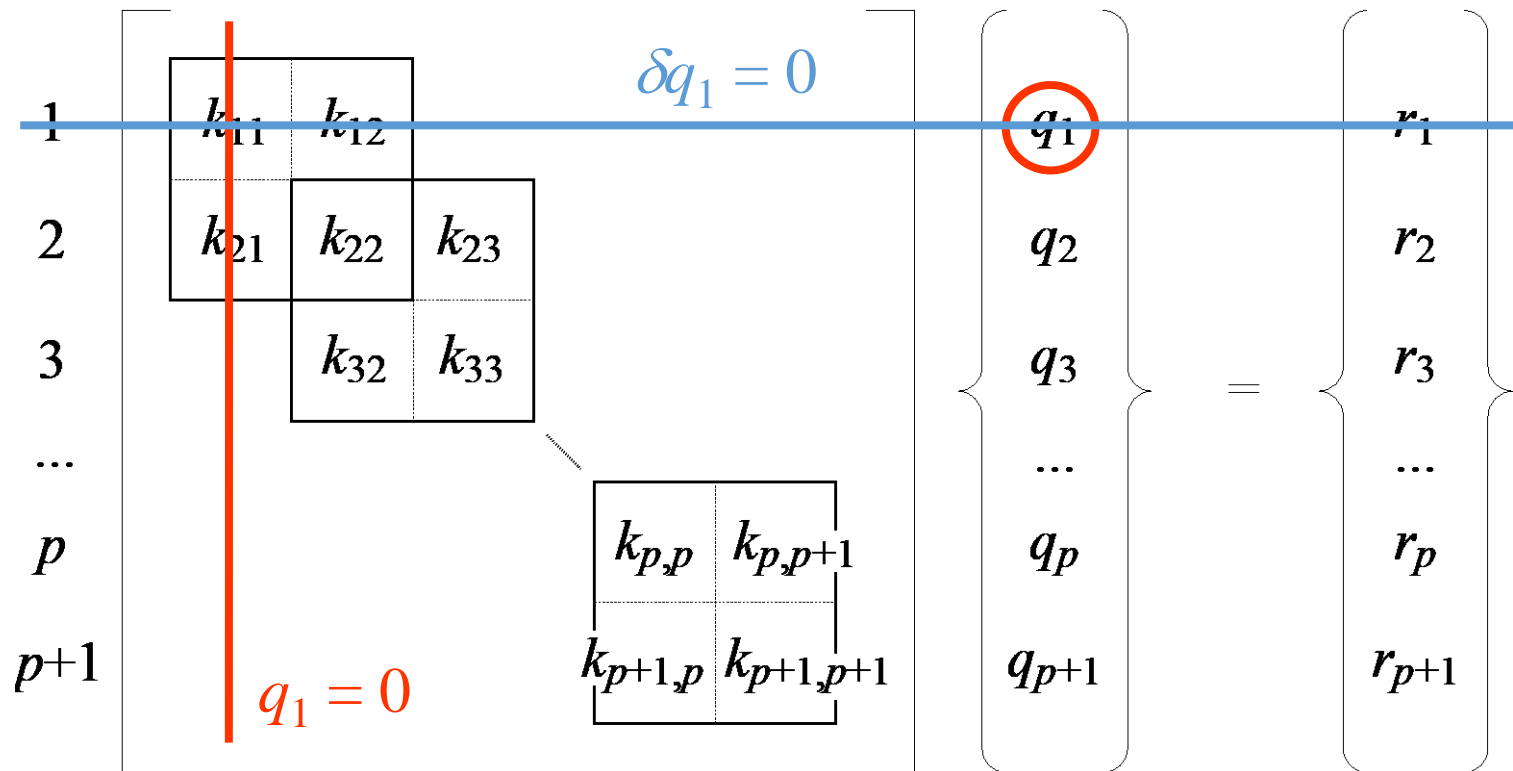


Paramètres de la matrice : matériau  
( ${}^eE$ ) et géométrie ( ${}^eA$ ,  ${}^e\ell$ ) de  
l'élément fini

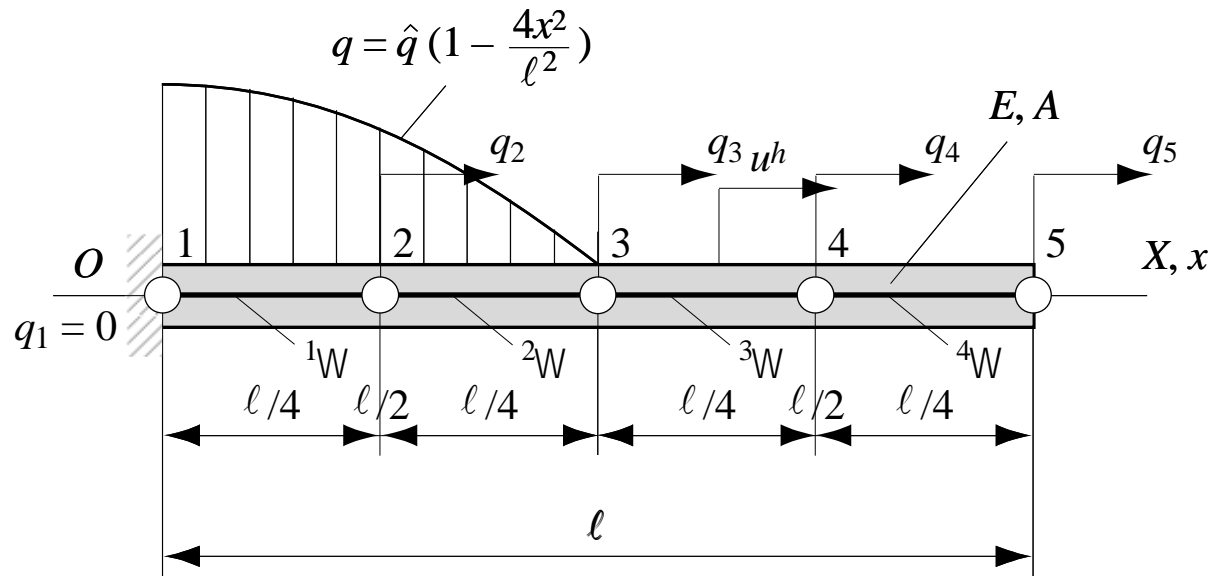


# Méthode des éléments finis : approche locale

- Prise en compte de la condition aux limites essentielle en  $x = 0$



# Exemple d'application de la méthode des éléments finis



Barre prismatique soumise à une charge répartie et subdivisée en quatre éléments finis identiques

# Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Matrice élémentaire de rigidité

$${}^e\mathbf{K} = \frac{{}^eE {}^eA}{{}^e\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{4EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Assemblage de la matrice globale de rigidité

$${}^e\mathbf{K} = \frac{4EA}{\ell} \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & & & & \\ -1 & \boxed{2} & -1 & & & \\ & -1 & \boxed{2} & -1 & & \\ & & -1 & \boxed{2} & -1 & \\ & & & -1 & \boxed{2} & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Matrice globale de rigidité

$$\mathbf{K} = \frac{4EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Composantes du vecteur élémentaire des forces externes

$${}^e r_i = \int_{{}^e \Omega} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) {}^e h_i dx \quad (i = 1, 2)$$



Mélange de  
grandeurs  
globales et  
locales

# Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes du vecteur des forces externes

$${}^1r_1 = \int_0^{l/4} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right) \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{8x}{l} - 1\right)\right] dx = 23\hat{q}l/192$$

$${}^1r_2 = \int_0^{l/4} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right) \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{8x}{l} - 1\right)\right] dx = 23\hat{q}l/192$$

$${}^2r_1 = \int_{l/4}^{l/2} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right) \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{8x}{l} - 3\right)\right] dx = 13\hat{q}l/192$$



$$\xi = (2x - x_i - x_{i+1})/l \Rightarrow \xi = \left(\frac{8x}{l} - 1\right) \text{ pour } {}^1\Omega$$



Termes dépendant de la position de l'élément fini



Intégration locale possible

# Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes du vecteur des forces externes (*suite*)

$${}^2r_2 = \int_{\ell/4}^{\ell/2} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{8x}{\ell} - 3\right)\right] dx = 7\hat{q}\ell/192$$

$${}^3r_1 = {}^3r_2 = {}^4r_1 = {}^4r_2 = 0$$

- Assemblage du vecteur des forces externes

$$\mathbf{r} = \frac{\hat{q}\ell}{192} \{23, 34, 7, 0, 0\}^T$$

- Vecteur des forces externes

$$\mathbf{r} = \frac{\hat{q}\ell}{192} \{23, 34, 7, 0, 0\}^T$$



Conservation de la charge totale

# Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Système d'équations linéaires

$$\frac{4EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \frac{\hat{q}l}{192} \begin{Bmatrix} 23 \\ 34 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Système  
singulier



Prise en compte de  
l'encastrement au nœud 1

# Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Système réduit d'équations linéaires

$$\frac{4EA}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \frac{\hat{q}\ell}{192} \begin{Bmatrix} 34 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Résolution du système par la méthode  
d'élimination de Cholesky

# Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Solutions nodales

$$q_2 = 41\hat{q}\ell^2/(768EA)$$

$$q_3 = \hat{q}\ell^2/(16EA)$$

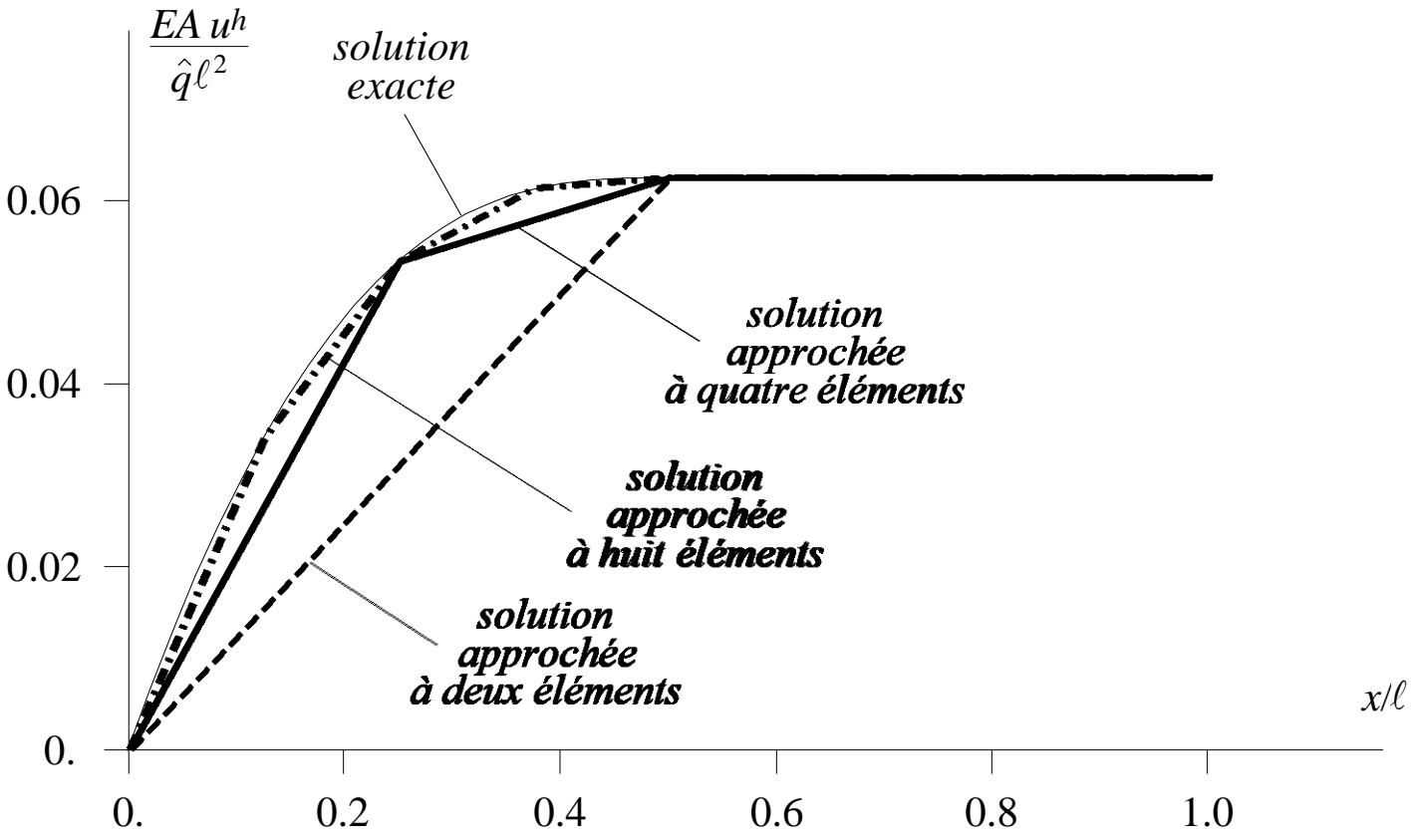
$$q_4 = \hat{q}\ell^2/(16EA)$$

$$q_5 = \hat{q}\ell^2/(16EA)$$

- Déplacement approché

$$u^h(x) = \frac{\hat{q}\ell^2}{EA} \{0.05339 h_2(x) + 0.0625 h_3(x) \\ + 0.0625 h_4(x) + 0.0625 h_5(x)\}$$

# Exemple d'application de la méthode des éléments finis



# Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Discussion des résultats et commentaires

- Accroissement de la précision globale avec le nombre  $p$  d'éléments finis du réseau

- Solution exacte en  $x = 0$



Condition aux limites essentielle vérifiée par l'approximation  $u^h$

- Solutions nodales exactes



Superconvergence (résultat non généralisable)

- Condition aux limites naturelle exacte en  $x = \ell$



Approximation linéaire (résultat non généralisable)

# Exemple d'application (Matlab) : allongement d'une barre

```
% ALLONGEMENT D'UNE BARRE DISCRETISEE EN ELEMENTS  
LINEAIRES  
% Initialisation des variables  
close all  
clear all  
syms E A L xsi le je dxsidx h H B Q Ke K re r  
syms Kr rr q  
nelem=4;  
nnode=nelem+1;  
% Test  
t=idivide(int32(nelem),int32(2));  
if 2*t~=nelem  
    warning('nelem impair')  
    break  
end
```

## Exemple d'application (Matlab) : allongement d'une barre

```
% Définition des fonctions de base et de leurs dérivées
le=L/nelem;
je=le/2;
dxsidx=2/le;
h(1)=(1-xsi)/2;
h(2)=(1+xsi)/2;
H=[h(1),h(2)];
B=diff(H,xsi)*dxsidx;
% Calcul de la matrice élémentaire de rigidité
Ke=int(E*A*(transpose(B)*B)*je,xsi,-1,1)
% Assemblage des quantités élémentaires
K(1:nnode,1:nnode)=0;
for i=1:nelem
    for j=1:2
        for k=1:2
            K(i+j-1,i+k-1)=K(i+j-1,i+k-1)+Ke(j,k);
```

# Exemple d'application (Matlab) : allongement d'une barre

```
        end
    end
    K
end
% Calcul des vecteurs élémentaire et global des charges
externes
r(1:nnode)=0;
for i=1:nelem/2
    x=le*(i-1)*(1-xsi)/2+le*i*(1+xsi)/2;
    re=int(H*Q*(1-4*(x/L)^2)*je,xsi,-1,1)
    for j=1:2
        r(i+j-1)=r(i+j-1)+re(j);
    end
end
r
end
```

# Exemple d'application (Matlab) : allongement d'une barre

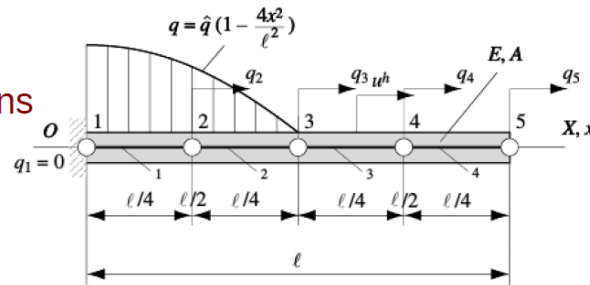
```
% Résolution du système d'équations
Kr=K(2:nnode,2:nnode)
rr=r(2:nnode)
q=inv(Kr)*transpose(rr)
% Application numérique
E=1
A=1
Q=1
L=1
q=eval(q)
w(1:nnode)=0;
for i=2:nnode
    w(i)=q(i-1);
end
```

# Exemple d'application (Matlab) : allongement d'une barre

```

clear all
syms E A L xsi le je dxsidx h H B Q Ke K re r
syms Kr rr q % work in symbolic expressions
nelem=4; % number of elements
nnode=nelem+1; % number of nodes
% Test
t=idivide(int32(nelem),int32(2));
% Because the load is applied to until L/2, it is better to use the number of element as
muptle of 2
if 2*t~=nelem
    warning('nelem impair')
    %break
end
% Definition des fonctions de base et de leurs derivees
le=L/nelem;
je=le/2; % dx = (dxsidx) dxsi
dxsidx=2/le;
h(1)=(1-xsi)/2;
h(2)=(1+xsi)/2;
H=[h(1),h(2)];
B=diff(H,xsi)*dxsidx;
% Calcul de la matrice elementaire de rigidite
Ke=int(E*A*(transpose(B)*B)*je,xsi,-1,1)

```



Comment/remove this line!

$$dx = (\ell/2) d\xi$$

$$d\xi/dx = 2/\ell$$

$$B = d^e H/dx = d^e H/d\xi (d\xi/dx)$$

$${}^e K = \int_{-1}^1 E {}^e B^T B d(\ell/2) d\xi$$

# Exemple d'application (Matlab) : allongement d'une barre

**% Assemblage des quantites elementaires**

```
K(1:nnode,1:nnode)=0;
for i=1:nelem
  for j=1:2
    for k=1:2
      K(i+j-1,i+k-1)=K(i+j-1,i+k-1)+Ke(j,k);
    end
  end
end
K
```

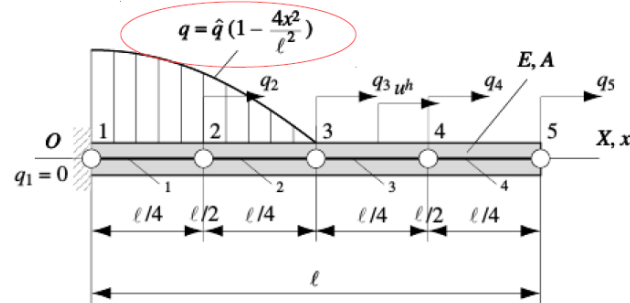
**% Calcul des vecteurs elementaire et global des charges externes**

```
r(1:nnode)=0;
for i=1:nelem/2 % because it is applied to until L/2
```

```
  x=le*(i-1)*(1-xxi)/2+le*i*(1+xxi)/2;
  re=int(H*Q*(1-4*(x/L)^2)*je,xxi,-1,1)
  for j=1:2
    r(i+j-1)=r(i+j-1)+re(j);
  end
end
```

From  $\xi = (2x - x_i - x_{i+1})/e\ell$

$${}^e r_i = \int_{\Omega} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) {}^e h_i dx \quad (i = 1, 2)$$



```
r
end
```

**% Resolution du systeme d'equations**

**% Remove first row and column from BC (at x=0, q1=0)**

```
Kr=K(2:nnode,2:nnode)
rr=r(2:nnode)
q=inv(Kr)*transpose(rr)
```

$$\frac{4EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \frac{\hat{q}\ell}{192} \begin{Bmatrix} 23 \\ 34 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$