

Méthode des éléments finis

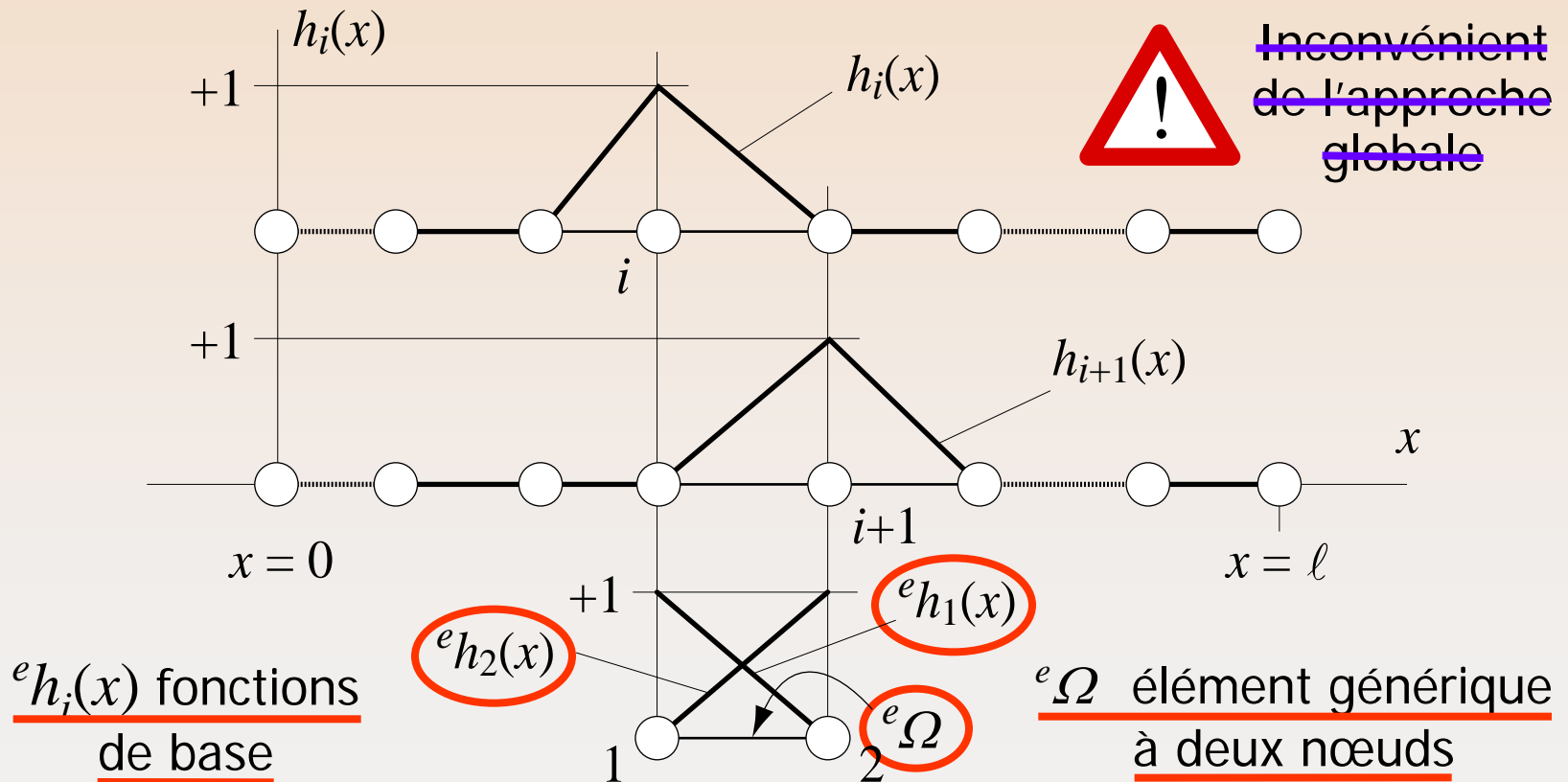
Formulation intégrale du problème modèle de la barre

Prof. Th. Gmür

EPFL-STI-IGM-LMAF, ME C1 401, téléphone : 32924,
messagerie électronique : thomas.gmuer@epfl.ch

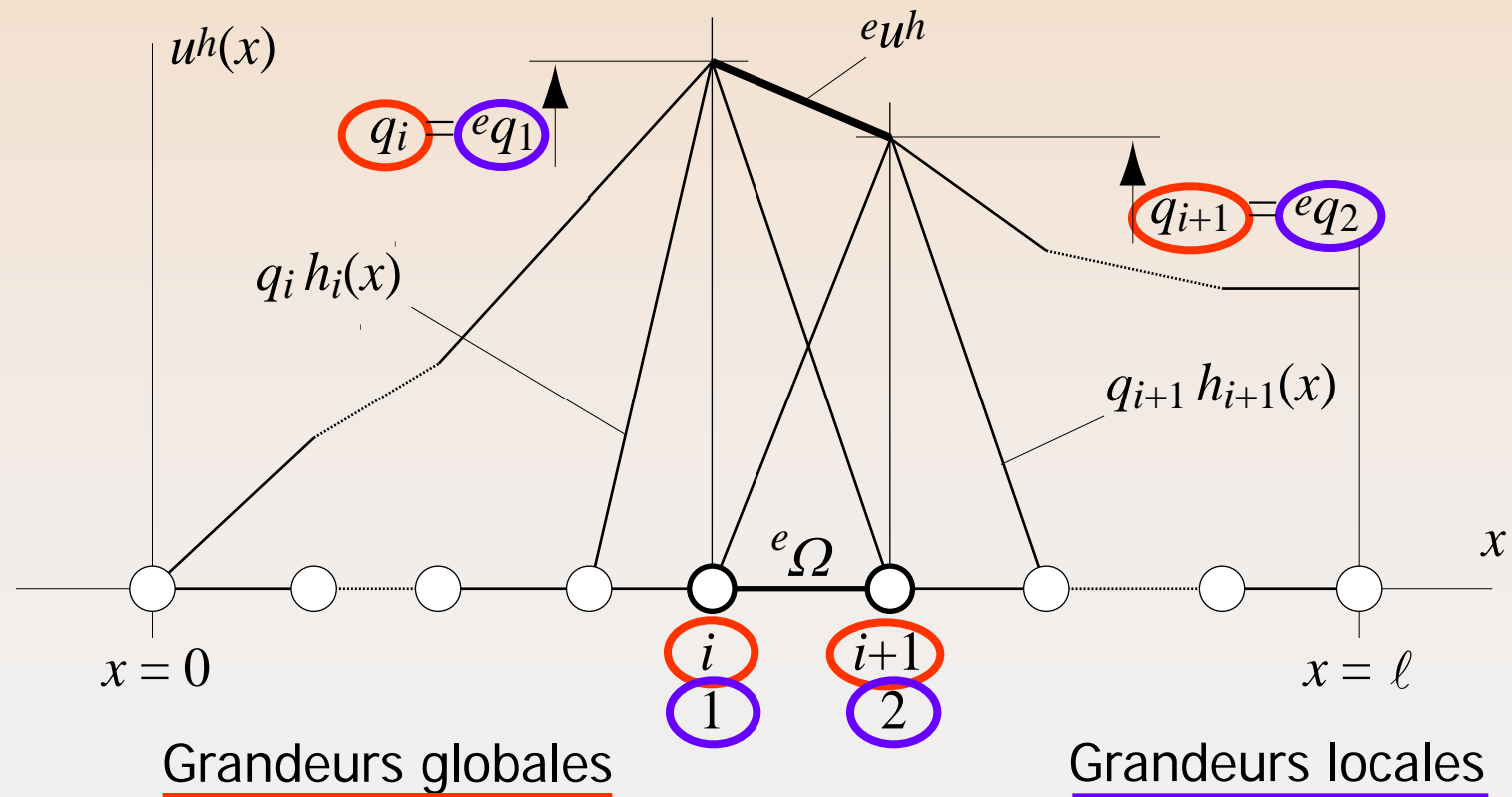
Méthode des éléments finis : approche locale

- Caractère compact des fonctions de forme nodales



Méthode des éléments finis : approche locale

- Restriction de la solution u^h sur l'élément fini générique e_Ω



Méthode des éléments finis : approche locale

- Caractérisation de la restriction ${}^e u^h$ de la solution u^h sur l'élément fini générique ${}^e \Omega$

$${}^e u^h(x) = \sum_{i=1}^{e_p} {}^e h_i(x) {}^e q_i = {}^e \mathbf{H}(x) {}^e \mathbf{q}$$

${}^e p$ nombre de nœuds
de l'élément ${}^e \Omega$

$${}^e \mathbf{H} = [{}^e h_1, {}^e h_2, \dots, {}^e h_i, \dots, {}^e h_{e_p}]$$

matrice ($1 \times {}^e p$) des
fonctions de base de
l'élément ${}^e \Omega$

$${}^e \mathbf{q} = \{{}^e q_1, {}^e q_2, \dots, {}^e q_i, \dots, {}^e q_{e_p}\}^T$$

vecteur (${}^e p \times 1$) des
déplacements nodaux
de l'élément ${}^e \Omega$



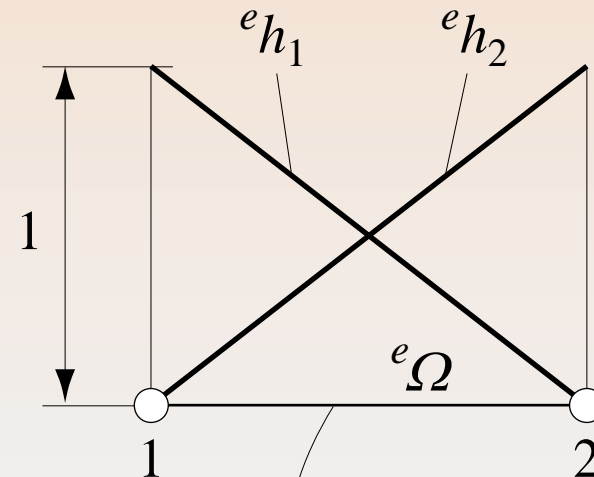
Méthode des éléments finis : approche locale

- Restriction de la solution sur un élément fini à deux nœuds

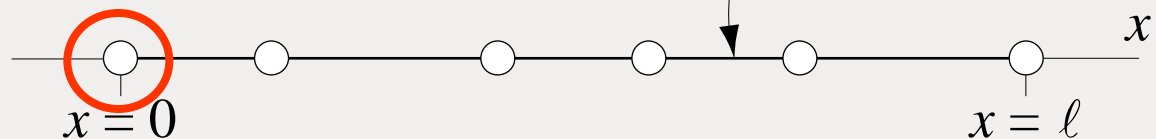
$${}^e u^h(x) = \sum_{i=1}^2 {}^e h_i(x) {}^e q_i = {}^e \mathbf{H}(x) {}^e \mathbf{q}$$

$${}^e \mathbf{H} = [{}^e h_1, {}^e h_2]$$

$${}^e \mathbf{q} = \{{}^e q_1, {}^e q_2\}^T$$



Neutralisation de la
condition aux limites
essentielle en $x = 0$



Méthode des éléments finis : approche locale

- Localisation des déplacements nodaux

$${}^e \mathbf{q} = {}^e \mathbf{L} \mathbf{q}$$

$${}^e \mathbf{L} = \begin{bmatrix} {}^e l_{11} & {}^e l_{12} & \dots & {}^e l_{1,p} \\ {}^e l_{21} & {}^e l_{22} & \dots & {}^e l_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^e l_{ep,1} & {}^e l_{ep,2} & \dots & {}^e l_{ep,p} \end{bmatrix}$$



p = nombre
total de nœuds
(point nodal "0"
compris)

matrice (${}^e p \times p$)
booléenne de
localisation



Matrice ${}^e \mathbf{L}$ très
peu peuplée

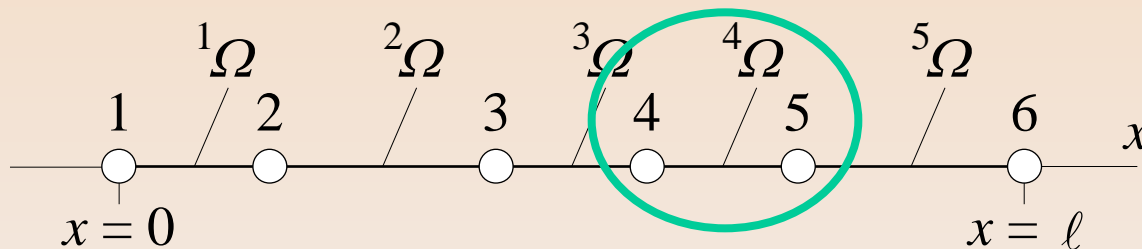


Condensation de la
localisation sous la forme
d'un tableau de connectivité



Méthode des éléments finis : approche locale

- Exemple de localisation et tableau de connectivité associé



$${}^4\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ pour l'élément fini } {}^4\Omega$$

	e_Ω	${}^1\Omega$	${}^2\Omega$	${}^3\Omega$	${}^4\Omega$	${}^5\Omega$	
numérotation <u>locale</u>	<u>1</u> <u>2</u>	1	2	3	<u>4</u> <u>5</u>	5	numérotation <u>globale</u>
		1	2	3	4	5	

Méthode des éléments finis : approche locale

- Critères de convergence à satisfaire par les fonctions ${}^e h_i(x)$
 - Critère de complétude
 - Critère de différentiabilité
 - Critère de continuité



Critères identiques à ceux
de l'approche globale

- Critères de continuité restreinte

$${}^e h_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, {}^e p)$$

- Critère de déplacement rigide $\sum_{i=1}^{{}^e p} {}^e h_i(x) = 1$



- Critère de déformation constante $\sum_{i=1}^{{}^e p} [d^e h_i(x)/dx] = 0$



Méthode des éléments finis : approche locale

- Assemblage des grandeurs élémentaires
 - Rappel de la forme faible approchée

$$u^h \in U^h : \int_0^\ell EA (du^h/dx) (d\delta u^h/dx) dx = P \delta u^h(\ell) + \int_0^\ell q \delta u^h dx \quad \forall \delta u^h \in V^h$$

- Prise en compte de l'additivité de l'intégration (m éléments finis)

$$\sum_{e=1}^m \left(\int_{\Omega^e} EA (du^h/dx) (d\delta u^h/dx) dx - P \delta u^h(\ell) \delta_{em} - \int_{\Omega^e} q \delta u^h dx \right) = 0 \quad \forall \delta u^h$$



Restriction à
l'élément Ω^e



Méthode des éléments finis : approche locale

- Assemblage des grandeurs élémentaires
 - Rappel de la forme faible approchée

$$u^h \in U^h : \int_0^\ell EA (du^h/dx) (d\delta u^h/dx) dx = P \delta u^h(\ell) + \int_0^\ell q \delta u^h dx \quad \forall \delta u^h \in V^h$$

- Prise en compte de l'additivité de l'intégration (m éléments finis)

$$\sum_{e=1}^m \left(\int_{e\Omega} {}^e E^e A (d^e u^h/dx) (d^e \delta u^h/dx) dx - P^e \delta u^h(\ell) \delta_{em} - \int_{e\Omega} {}^e q^e \delta u^h dx \right) = 0 \quad \forall \delta u^h$$



~~Inconvénient
de l'approche
globale~~



Méthode des éléments finis : approche locale

- Assemblage des grandeurs élémentaires
 - Rappel de la forme faible approchée

$$u^h \in U^h : \int_0^\ell EA (du^h/dx) (d\delta u^h/dx) dx = P \delta u^h(\ell) + \int_0^\ell q \delta u^h dx \quad \forall \delta u^h \in V^h$$

- Prise en compte de l'additivité de l'intégration (m éléments finis)

$$\sum_{e=1}^m \left(\int_{e\Omega} {}^e E^e A (d^e u^h/dx) (d^e \delta u^h/dx) dx - P^e \delta u^h(\ell) \delta_{em} - \int_{e\Omega} {}^e q^e \delta u^h dx \right) = 0 \quad \forall \delta u^h$$



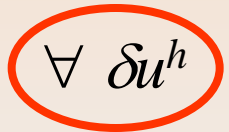
Condition aux limites naturelle



Méthode des éléments finis : approche locale

- Insertion de l'approximation locale ${}^e u^h = {}^e \mathbf{H} {}^e \mathbf{q}$
 ${}^e \delta u^h = {}^e \mathbf{H} {}^e \delta \mathbf{q}$

$$\sum_{e=1}^m {}^e \delta \mathbf{q}^T \left(\int_{{}^e \Omega} {}^e E^e A (d^e \mathbf{H}^T / dx) (d^e \mathbf{H} / dx) dx \cdot {}^e \mathbf{q} - {}^e \mathbf{H}^T(\ell) P \delta_{em} - \int_{{}^e \Omega} {}^e \mathbf{H}^T {}^e q dx \right) = 0 \quad \forall \delta u^h$$



Méthode des éléments finis : approche locale

- Insertion de l'approximation locale ${}^e u^h = {}^e \mathbf{H} {}^e \mathbf{q}$
 ${}^e \delta u^h = {}^e \mathbf{H} {}^e \delta \mathbf{q}$

$$\sum_{e=1}^m {}^e \delta \mathbf{q}^T \left(\int_{e\Omega} {}^e E^e A (d^e \mathbf{H}^T / dx) (d^e \mathbf{H} / dx) dx \cdot {}^e \mathbf{q} - {}^e \mathbf{H}^T(\ell) P \delta_{em} - \int_{e\Omega} {}^e \mathbf{H}^T {}^e q dx \right) = 0 \quad \forall \delta u^h$$

- Insertion de la localisation des déplacements ${}^e \mathbf{q} = {}^e \mathbf{L} \mathbf{q}$
 ${}^e \delta \mathbf{q} = {}^e \mathbf{L} \delta \mathbf{q}$

$$\sum_{e=1}^m \delta \mathbf{q}^T {}^e \mathbf{L}^T \left(\int_{e\Omega} {}^e E^e A (d^e \mathbf{H}^T / dx) (d^e \mathbf{H} / dx) dx \cdot {}^e \mathbf{L} \mathbf{q} - {}^e \mathbf{H}^T(\ell) P \delta_{em} - \int_{e\Omega} {}^e \mathbf{H}^T {}^e q dx \right) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q}$$



Méthode des éléments finis : approche locale

- Forme faible discrète locale $\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r}$

$$\sum_{e=1}^m {}^e \mathbf{L}^T \left(\int_{{}^e \Omega} {}^e E^e A (d^e \mathbf{H}^T / dx) (d^e \mathbf{H} / dx) dx \right) {}^e \mathbf{L} \cdot \mathbf{q}$$

matrice de
rigidité \mathbf{K}

$$= \sum_{e=1}^m {}^e \mathbf{L}^T \left({}^e \mathbf{H}^T(\ell) P \delta_{em} + \int_{{}^e \Omega} {}^e \mathbf{H}^T {}^e q dx \right)$$

vecteur des forces
appliquées \mathbf{r}

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^m {}^e \mathbf{L}^T \mathbf{K}^e \mathbf{L}$$

grandeurs élémentaires

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^m {}^e \mathbf{L}^T \mathbf{r}^e$$



Méthode des éléments finis : approche locale

- Matrice élémentaire (${}^e p \times {}^e p$) de rigidité

$${}^e \mathbf{K} = \int_{{}^e \Omega} {}^e E {}^e A (d{}^e \mathbf{H}^T/dx) (d{}^e \mathbf{H}/dx) dx$$

- Vecteur élémentaire (${}^e p \times 1$) des forces extérieures

$${}^e \mathbf{r} = {}^e \mathbf{H}^T(\ell) P \delta_{em} + \int_{{}^e \Omega} {}^e \mathbf{H}^T {}^e q dx$$

- Opération d'assemblage des matrices et vecteurs élémentaires

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^m {}^e \mathbf{L}^T {}^e \mathbf{K} {}^e \mathbf{L} = \mathbf{A} \mathbf{K}$$

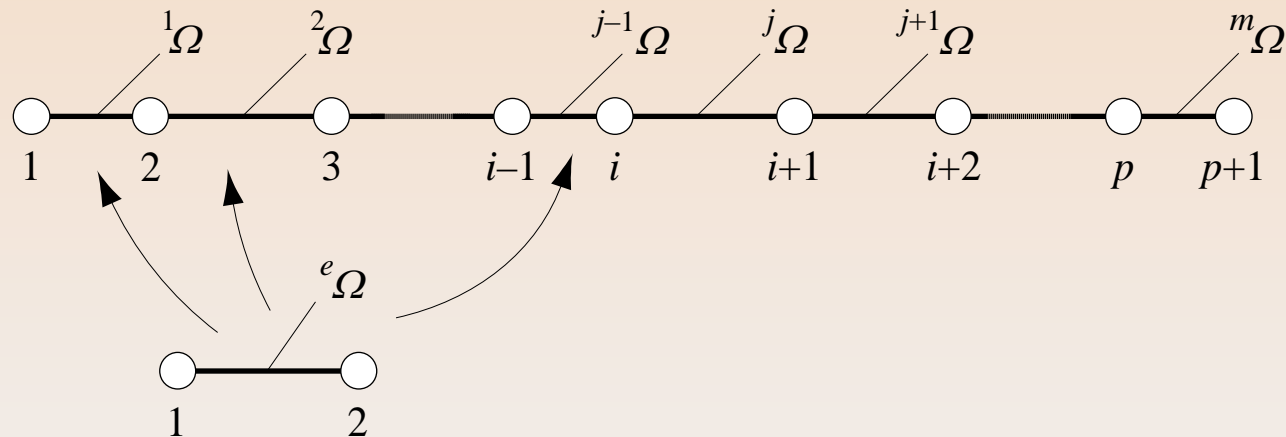
$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^m {}^e \mathbf{L}^T {}^e \mathbf{r} = \mathbf{A} \mathbf{r}$$

\mathbf{A} opérateur
d'assemblage



Méthode des éléments finis : approche locale

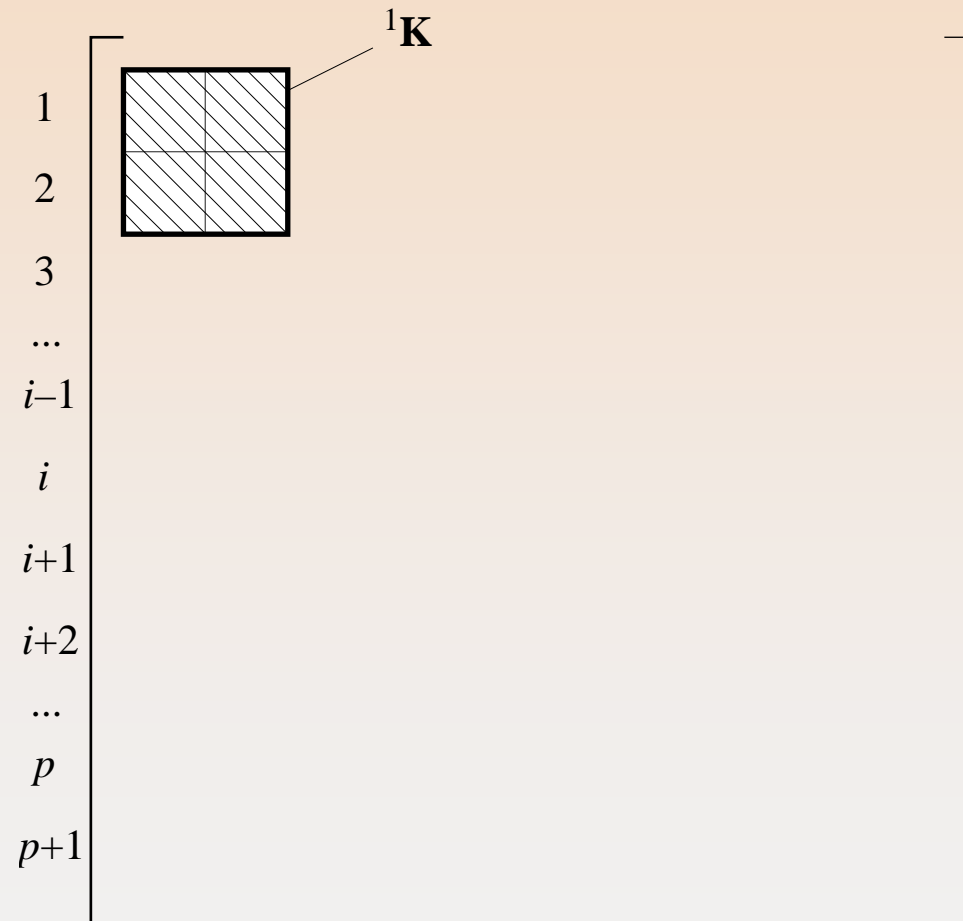
- Exemple d'assemblage d'éléments finis à deux points nodaux



e_Ω	1_Ω	2_Ω	...	$j-1_\Omega$	j_Ω	$j+1_\Omega$...	m_Ω
1	1	2	...	$i-1$	i	$i+1$...	p
2	2	3	...	i	$i+1$	$i+2$...	$p+1$

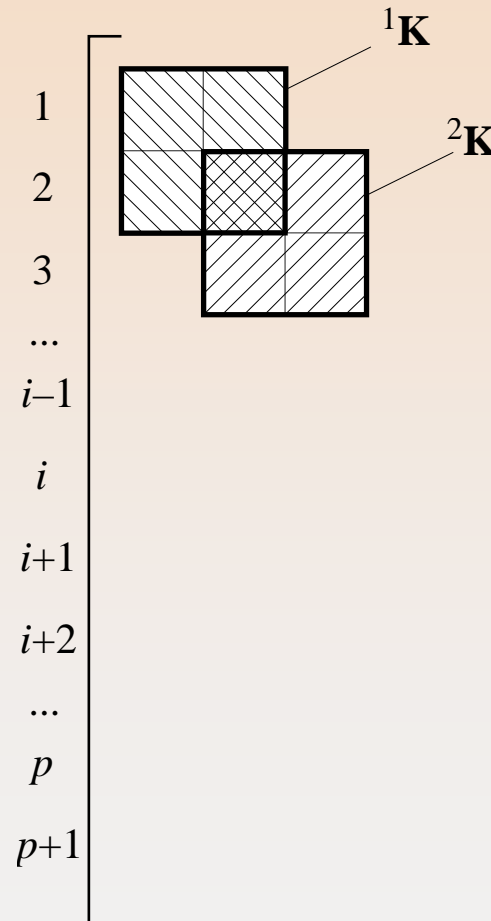
Méthode des éléments finis : approche locale

Assemblage
schématique de la
matrice de rigidité
globale



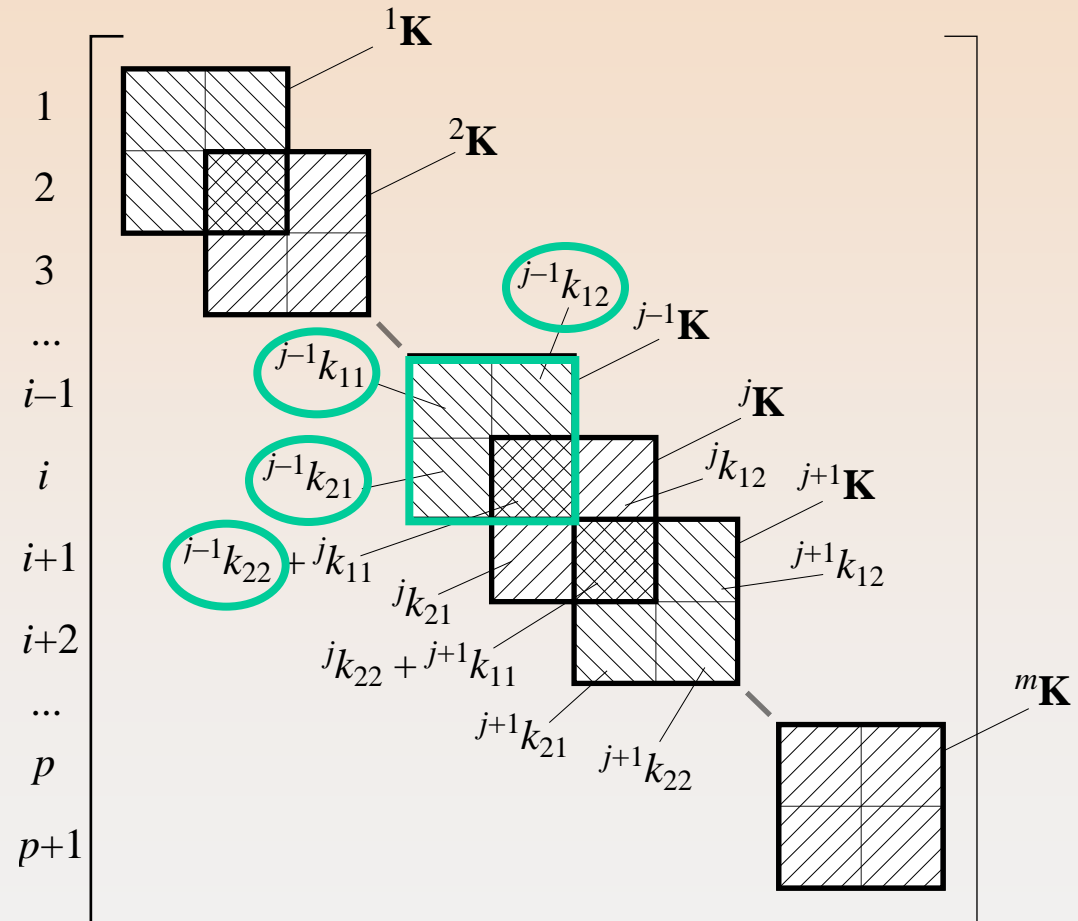
Méthode des éléments finis : approche locale

Assemblage
schématique de la
matrice de rigidité
globale



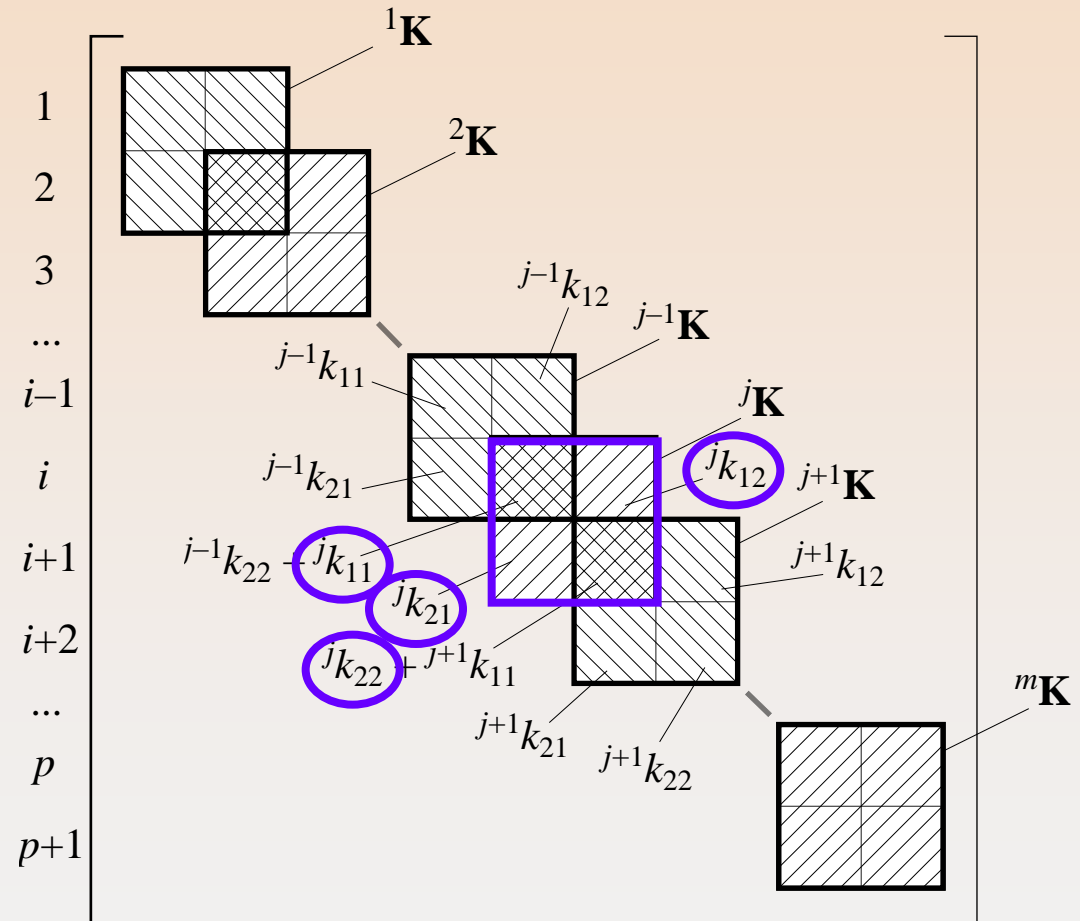
Méthode des éléments finis : approche locale

Assemblage
schématique de la
matrice de rigidité
globale



Méthode des éléments finis : approche locale

Assemblage
schématique de la
matrice de rigidité
globale

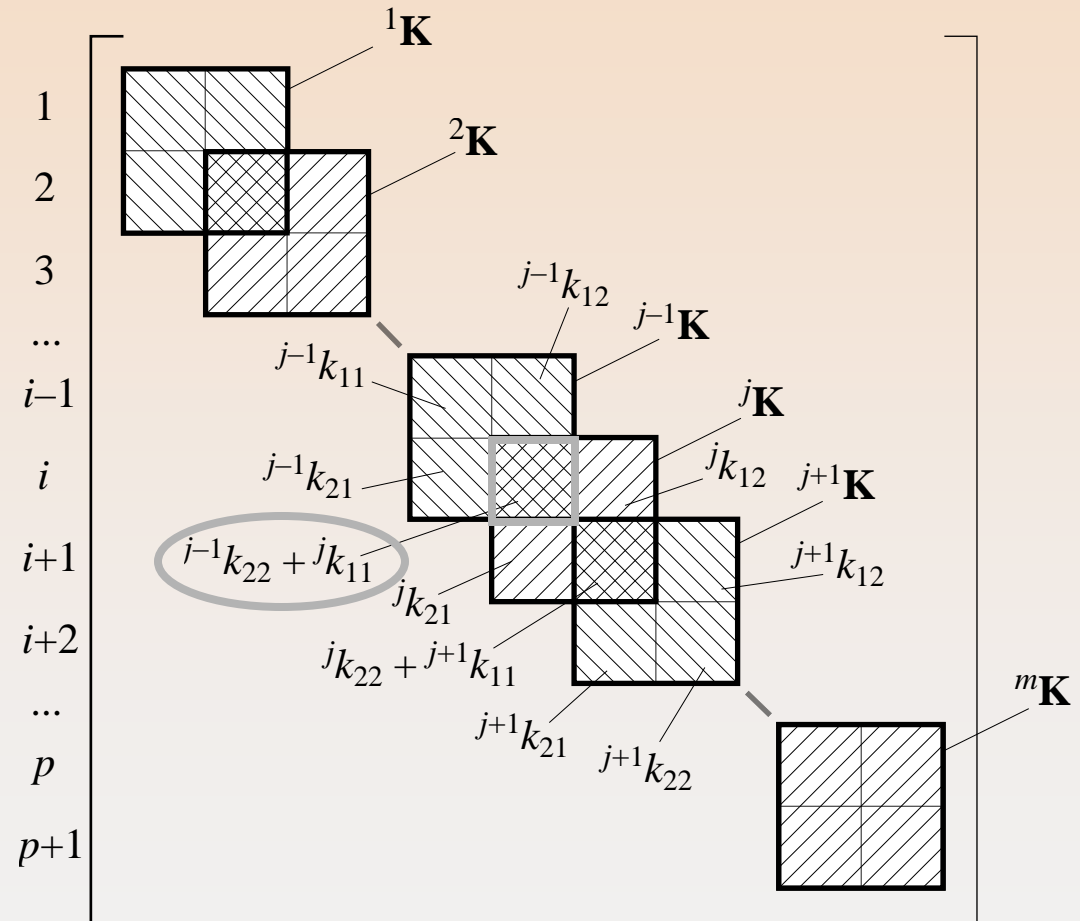


Méthode des éléments finis : approche locale

Assemblage
schématique de la
matrice de rigidité
globale



Structure
en forme
de bande



Méthode des éléments finis : approche locale

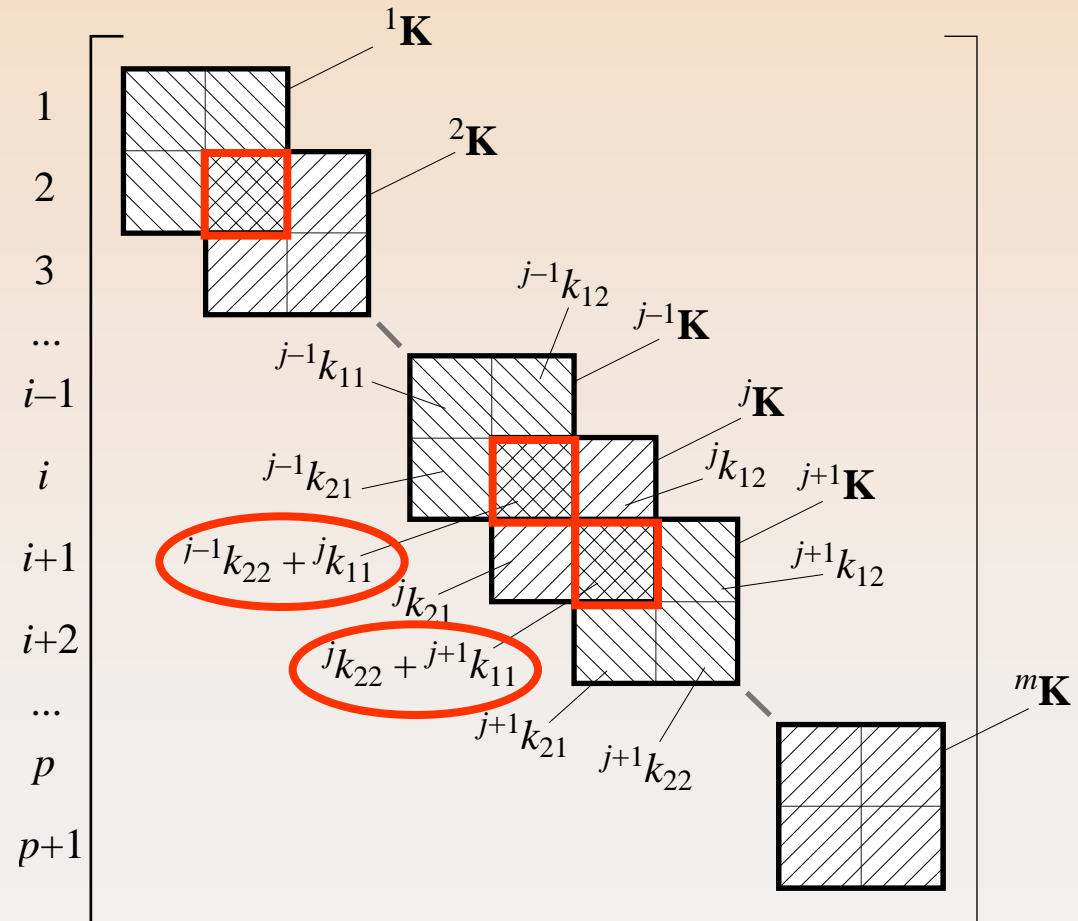
Assemblage
schématique de la
matrice de rigidité
globale



Sommation
des termes
communs



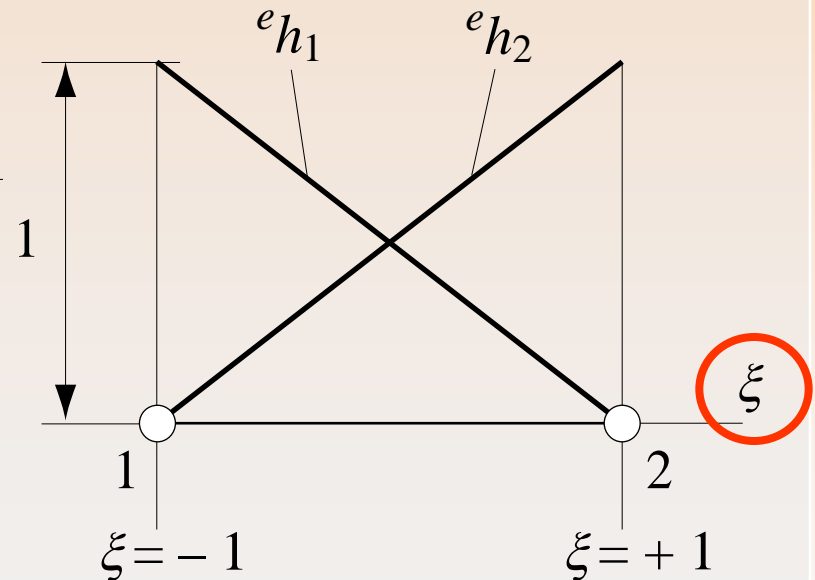
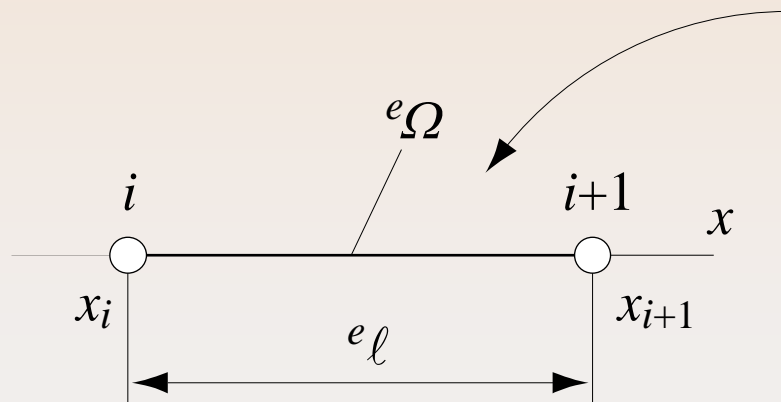
Structure
en forme
de bande



Méthode des éléments finis : approche locale

- Matrice de rigidité d'un élément fini à deux points nodaux
 - Changement de repère

$$\xi = \frac{1}{e_\ell} (2x - x_i - x_{i+1})$$



ξ coordonnée naturelle ou intrinsèque

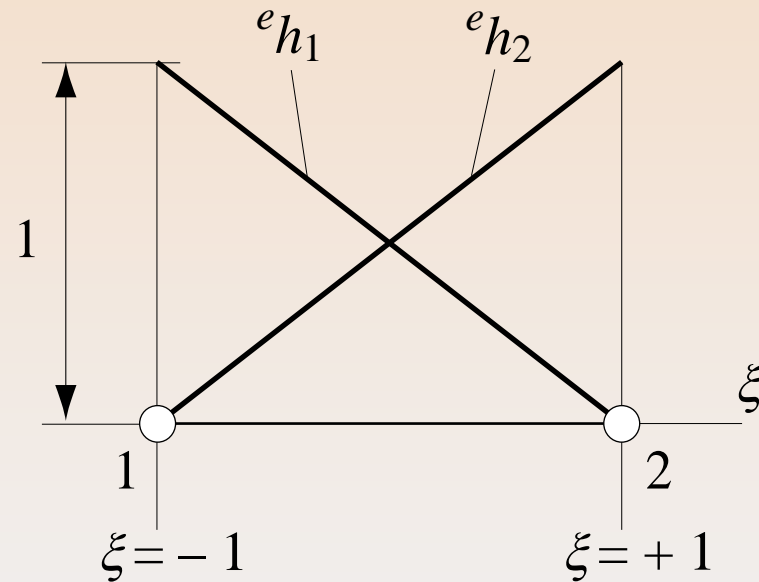


Méthode des éléments finis : approche locale

- Fonctions de base linéaires de l'élément

$${}^e h_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi)$$

$${}^e h_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi)$$



Méthode des éléments finis : approche locale

- Composantes de la matrice de rigidité

$$\begin{aligned}
 {}^e k_{11} &= \int_{{}^e \Omega} {}^e E {}^e A (d^e h_1/dx)^2 dx \\
 &= \int_{{}^e \Omega} {}^e E {}^e A (d^e h_1/d\xi)^2 (d\xi/dx) dx \\
 &= \int_{-1}^{+1} {}^e E {}^e A \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{{}^e \ell}\right)^2 \frac{{}^e \ell}{2} d\xi = {}^e E {}^e A / {}^e \ell
 \end{aligned}$$



$$\xi = (2x - x_i - x_{i+1})/{}^e \ell \Rightarrow d\xi/dx = 2/{}^e \ell ; dx = ({}^e \ell/2) d\xi$$

$$\begin{aligned}
 {}^e k_{12} &= {}^e k_{21} = \int_{{}^e \Omega} {}^e E {}^e A (d^e h_1/dx) (d^e h_2/dx) dx \\
 &= - {}^e E {}^e A / {}^e \ell
 \end{aligned}$$

$${}^e k_{22} = \int_{{}^e \Omega} {}^e E {}^e A (d^e h_2/dx)^2 dx = {}^e E {}^e A / {}^e \ell$$



Méthode des éléments finis : approche locale

- Matrice élémentaire de rigidité

$${}^e\mathbf{K} = \frac{{}^eE {}^eA}{{}^e\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



Matrice (2×2)
singulière



Critère de
déplacement
rigide



Méthode des éléments finis : approche locale

- Matrice élémentaire de rigidité

$${}^e\mathbf{K} = \frac{{}^eE {}^eA}{{}^e\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



Matrice (2×2)
singulière



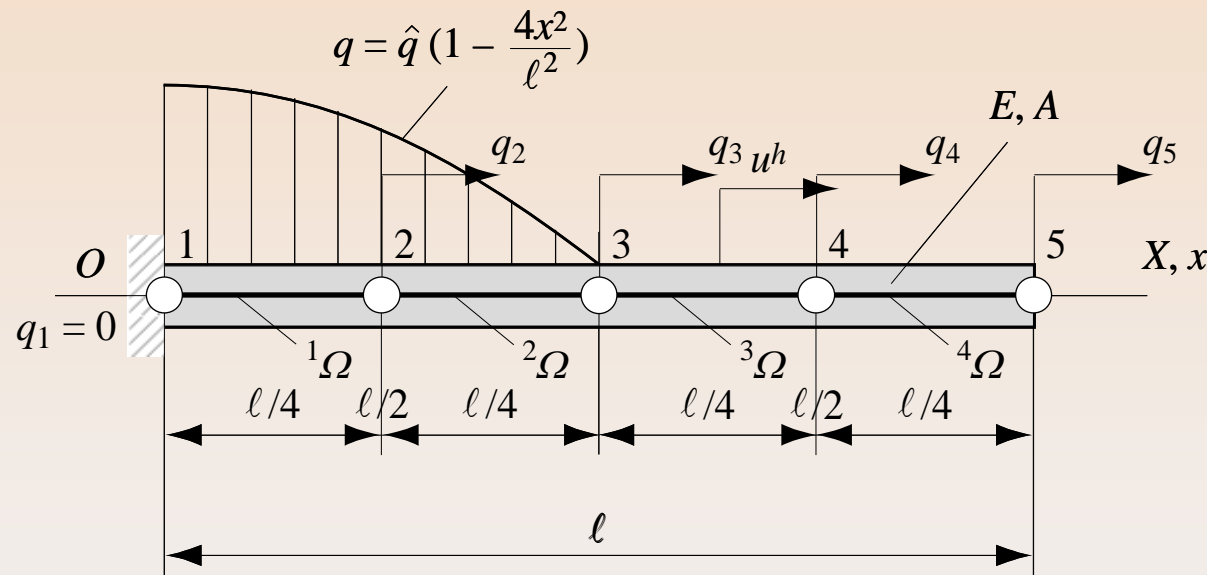
Matrice indépendante de la
position de l'élément fini
dans le réseau



Paramètres de la matrice : matériau
(eE) et géométrie (eA , ${}^e\ell$) de
l'élément fini



Exemple d'application de la méthode des éléments finis



Barre prismatique soumise à une charge répartie et subdivisée en quatre éléments finis identiques

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Matrice élémentaire de rigidité

$${}^e\mathbf{K} = \frac{{}^eE {}^eA}{{}^e\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{4EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Assemblage de la matrice globale de rigidité

$${}^e\mathbf{K} = \frac{4EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Matrice élémentaire de rigidité

$${}^e\mathbf{K} = \frac{{}^eE {}^eA}{{}^e\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{4EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Assemblage de la matrice globale de rigidité

$${}^e\mathbf{K} = \frac{4EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Matrice globale de rigidité

$$\mathbf{K} = \frac{4EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Composantes du vecteur élémentaire des forces externes

$${}^e r_i = \int_{{}^e \Omega} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right) {}^e h_i dx \quad (i = 1, 2)$$



Mélange de
globales et
locales



Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes du vecteur des forces externes

$${}^1r_1 = \int_0^{l/4} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{l^2}\right) \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{8x}{l} - 1\right)\right] dx = 23\hat{q}l/192$$

$${}^1r_1 = \int_{-1}^{+1} \hat{q} \left\{1 - \frac{4}{l^2} \left[\frac{l}{8}(1+\xi)\right]^2\right\} \frac{1}{2} (1-\xi) \frac{l}{8} d\xi = 23\hat{q}l/192$$



$$\xi = (2x - x_i - x_{i+1})/l \Rightarrow \xi = \left(\frac{8x}{l} - 1\right) \text{ pour } {}^1\Omega$$



Intégration
locale possible



Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes du vecteur des forces externes

$${}^1r_1 = \int_0^{\ell/4} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{8x}{\ell} - 1\right)\right] dx = 23\hat{q}\ell/192$$

$${}^1r_2 = \int_0^{\ell/4} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{8x}{\ell} - 1\right)\right] dx = 7\hat{q}\ell/64$$

$${}^2r_1 = \int_{\ell/4}^{\ell/2} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{8x}{\ell} - 3\right)\right] dx = 13\hat{q}\ell/192$$



$$\xi = (2x - x_i - x_{i+1})/\ell \Rightarrow \xi = \left(\frac{8x}{\ell} - 1\right) \text{ pour } {}^1\Omega$$



Termes dépendant de la position de l'élément fini



Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes du vecteur des forces externes (*suite*)

$${}^2r_2 = \int_{\ell/4}^{\ell/2} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{8x}{\ell} - 3\right)\right] dx = 7\hat{q}\ell/192$$

$${}^3r_1 = {}^3r_2 = {}^4r_1 = {}^4r_2 = 0$$

- Assemblage du vecteur des forces externes

$$\mathbf{r} = \frac{\hat{q}\ell}{192} \{23, 21\}^T$$



Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes du vecteur des forces externes (*suite*)

$${}^2r_2 = \int_{\ell/4}^{\ell/2} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{8x}{\ell} - 3\right)\right] dx = 7\hat{q}\ell/192$$

$${}^3r_1 = {}^3r_2 = {}^4r_1 = {}^4r_2 = 0$$

- Assemblage du vecteur des forces externes

$$\mathbf{r} = \frac{\hat{q}\ell}{192} \{23, 21, 13, 7\}^T$$



Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes du vecteur des forces externes (*suite*)

$${}^2r_2 = \int_{\ell/4}^{\ell/2} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{8x}{\ell} - 3\right)\right] dx = 7\hat{q}\ell/192$$

$${}^3r_1 = {}^3r_2 = {}^4r_1 = {}^4r_2 = 0$$

- Assemblage du vecteur des forces externes

$$\mathbf{r} = \frac{\hat{q}\ell}{192} \{23, 21 + 13, 7, 0, 0\}^T$$



Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes du vecteur des forces externes (*suite*)

$${}^2r_2 = \int_{\ell/4}^{\ell/2} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{8x}{\ell} - 3\right)\right] dx = 7\hat{q}\ell/192$$

$${}^3r_1 = {}^3r_2 = {}^4r_1 = {}^4r_2 = 0$$

- Assemblage du vecteur des forces externes

$$\mathbf{r} = \frac{\hat{q}\ell}{192} \{23, 21 + 13, 7 + 0, 0 + 0, 0\}^T$$



Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes du vecteur des forces externes (*suite*)

$${}^2r_2 = \int_{\ell/4}^{\ell/2} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{8x}{\ell} - 3\right)\right] dx = 7\hat{q}\ell/192$$

$${}^3r_1 = {}^3r_2 = {}^4r_1 = {}^4r_2 = 0$$

- Assemblage du vecteur des forces externes

$$\mathbf{r} = \frac{\hat{q}\ell}{192} \{23, 21 + 13, 7 + 0, 0 + 0, 0\}^T$$



Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes du vecteur des forces externes (*suite*)

$${}^2r_2 = \int_{\ell/4}^{\ell/2} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{8x}{\ell} - 3\right)\right] dx = 7\hat{q}\ell/192$$

$${}^3r_1 = {}^3r_2 = {}^4r_1 = {}^4r_2 = 0$$

- Assemblage du vecteur des forces externes

$$\mathbf{r} = \frac{\hat{q}\ell}{192} \{23, 34, 7, 0, 0\}^T$$

- Vecteur des forces externes

$$\mathbf{r} = \frac{\hat{q}\ell}{192} \{23, 34, 7, 0, 0\}^T$$



Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Calcul des composantes du vecteur des forces externes (*suite*)

$${}^2r_2 = \int_{\ell/4}^{\ell/2} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{8x}{\ell} - 3\right)\right] dx = 7\hat{q}\ell/192$$

$${}^3r_1 = {}^3r_2 = {}^4r_1 = {}^4r_2 = 0$$

- Assemblage du vecteur des forces externes

$$\mathbf{r} = \frac{\hat{q}\ell}{192} \{23, 34, 7, 0, 0\}^T$$

- Vecteur des forces externes

$$\mathbf{r} = \frac{\hat{q}\ell}{192} \{23, 34, 7, 0, 0\}^T$$



Conservation de la charge totale



Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Système d'équations linéaires

$$\frac{4EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \frac{\hat{q}l}{192} \begin{Bmatrix} 23 \\ 34 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Systeme
singulier



Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Système d'équations linéaires

$$\frac{4EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \frac{\hat{q}l}{192} \begin{Bmatrix} 23 \\ 34 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Prise en compte de
l'encastrement au nœud 1



Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Système réduit d'équations linéaires

$$\frac{4EA}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \frac{\hat{q}\ell}{192} \begin{Bmatrix} 34 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Résolution du système par la méthode
d'élimination de Cholesky



Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Solutions nodales

$$q_2 = 41\hat{q}\ell^2/(768EA)$$

$$q_3 = \hat{q}\ell^2/(16EA)$$

$$q_4 = \hat{q}\ell^2/(16EA)$$

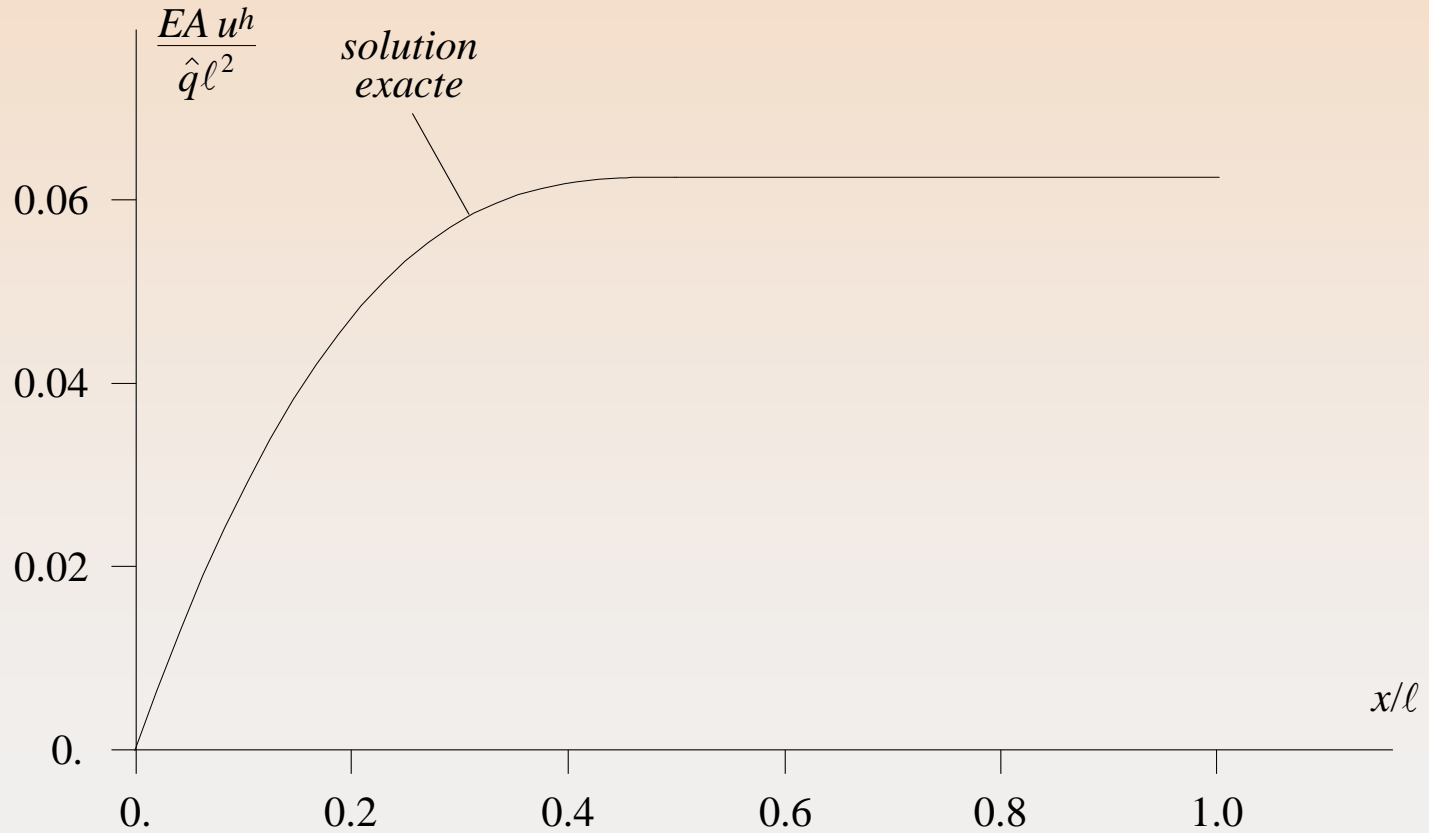
$$q_5 = \hat{q}\ell^2/(16EA)$$

- Déplacement approché

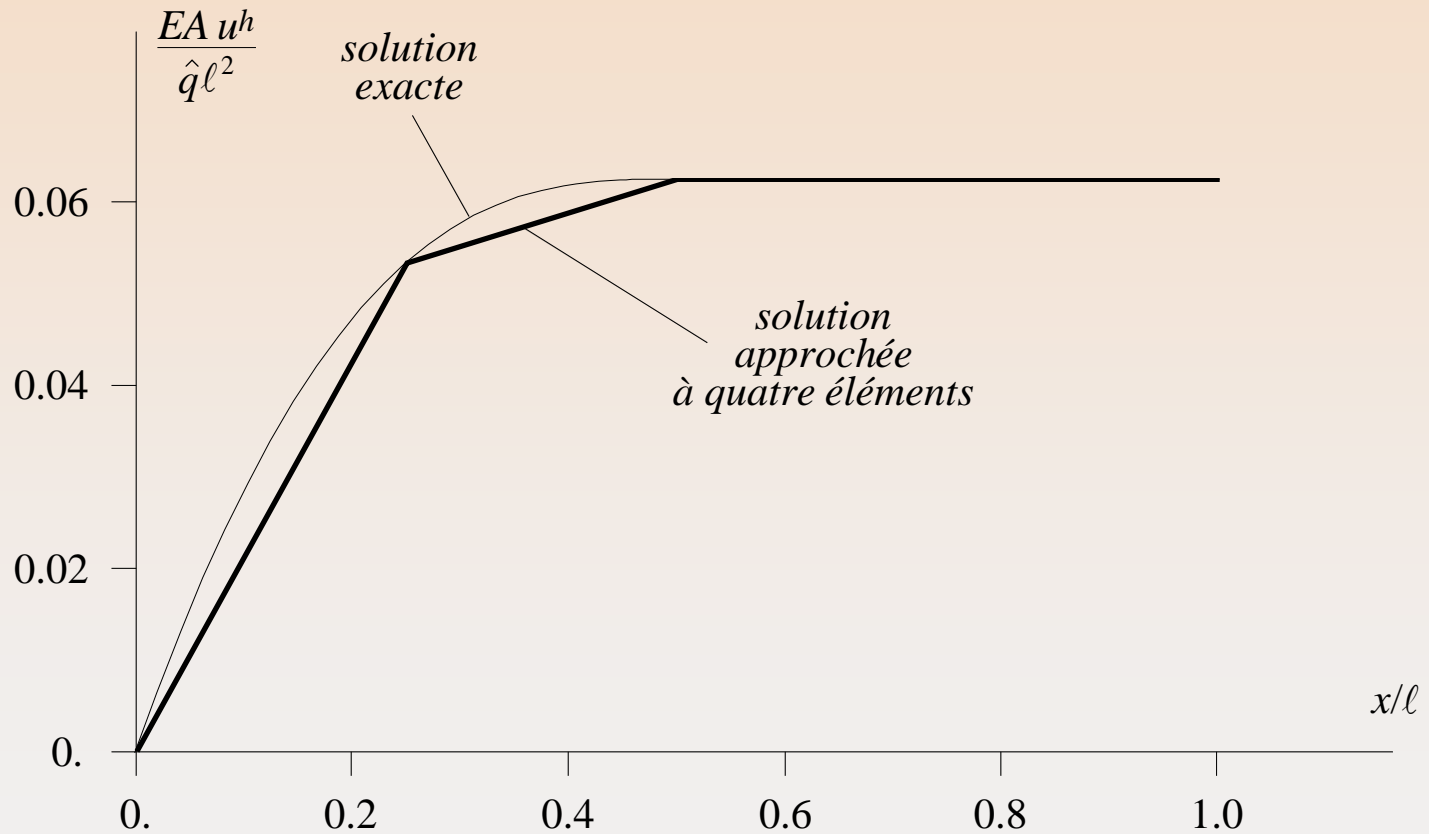
$$u^h(x) = \frac{\hat{q}\ell^2}{EA} \{0.05339 h_2(x) + 0.0625 h_3(x) + 0.0625 h_4(x) + 0.0625 h_5(x)\}$$



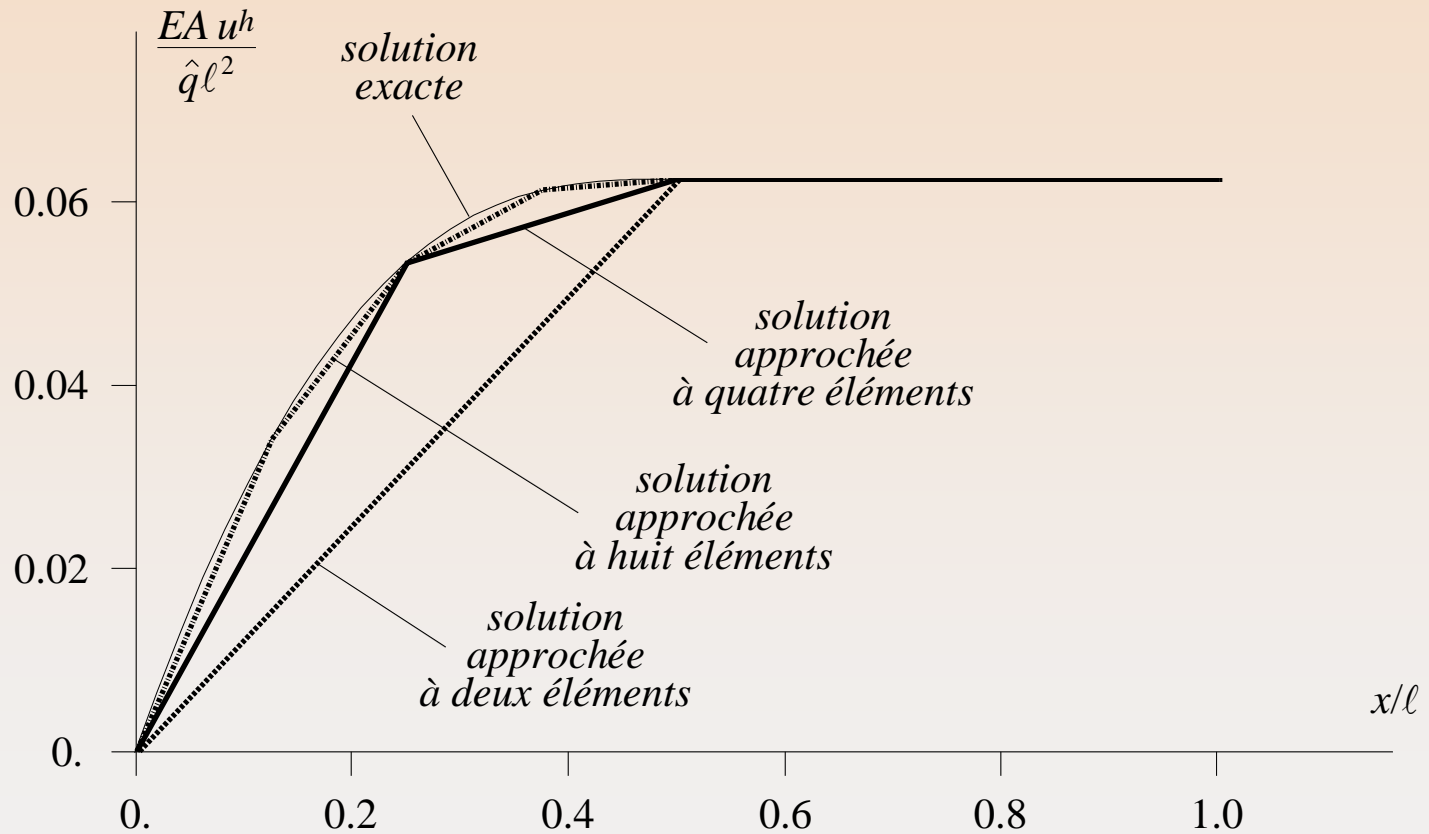
Exemple d'application de la méthode des éléments finis



Exemple d'application de la méthode des éléments finis



Exemple d'application de la méthode des éléments finis



Exemple d'application de la méthode des éléments finis

- Discussion des résultats et commentaires

- Accroissement de la précision globale avec le nombre p d'éléments finis du réseau

- Solution exacte en $x = 0$



Condition aux limites essentielle vérifiée par l'approximation u^h

- Solutions nodales exactes



Superconvergence (résultat non généralisable)

- Condition aux limites naturelle exacte en $x = \ell$



Approximation linéaire (résultat non généralisable)



Exemple d'application (Matlab) : allongement d'une barre

```
% ALLONGEMENT D'UNE BARRE DISCRETISEE EN ELEMENTS  
LINEAIRES  
% Initialisation des variables  
close all  
clear all  
syms E A L xsi le je dxsidx h H B Q Ke K re r  
syms Kr rr q  
nelem=4;  
nnode=nelem+1;  
% Test  
t=idivide(int32(nelem),int32(2));  
if 2*t~=nelem  
    warning('nelem impair')  
    break  
end
```



Exemple d'application (Matlab) : allongement d'une barre

```
% Définition des fonctions de base et de leurs dérivées
le=L/nelem;
je=le/2;
dxsidx=2/le;
h(1)=(1-xsi)/2;
h(2)=(1+xsi)/2;
H=[h(1),h(2)];
B=diff(H,xsi)*dxsidx;
% Calcul de la matrice élémentaire de rigidité
Ke=int(E*A*(transpose(B)*B)*je,xsi,-1,1)
% Assemblage des quantités élémentaires
K(1:nnode,1:nnode)=0;
for i=1:nelem
    for j=1:2
        for k=1:2
            K(i+j-1,i+k-1)=K(i+j-1,i+k-1)+Ke(j,k);
```



Exemple d'application (Matlab) : allongement d'une barre

```
        end
    end
    K
end
% Calcul des vecteurs élémentaire et global des charges
externes
r(1:nnode)=0;
for i=1:nelem/2
    x=le*(i-1)*(1-xsi)/2+le*i*(1+xsi)/2;
    re=int(H*Q*(1-4*(x/L)^2)*je,xsi,-1,1)
    for j=1:2
        r(i+j-1)=r(i+j-1)+re(j);
    end
end
r
end
```



Exemple d'application (Matlab) : allongement d'une barre

```
% Résolution du système d'équations
Kr=K(2:nnode,2:nnode)
rr=r(2:nnode)
q=inv(Kr)*transpose(rr)
% Application numérique
E=1
A=1
Q=1
L=1
q=eval(q)
w(1:nnode)=0;
for i=2:nnode
    w(i)=q(i-1);
end
```



Exemple d'application (Matlab) : allongement d'une barre

```
y=[0:1/nelem:1];  
plot(y,w)  
xlabel('x/L');  
ylabel('EAu/(QL^2)');
```

moodle.epfl.ch : [charge.m](#) ⇒ \MATLAB\work

