

Méthode des éléments finis

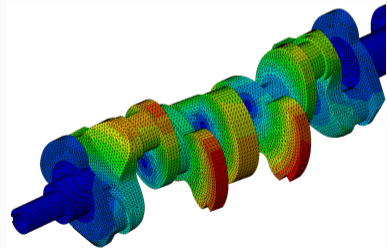
Approche globale

ME-372 Méthode des éléments finis

2025-2026

François Gallaire

Stefano Burzio



Plan

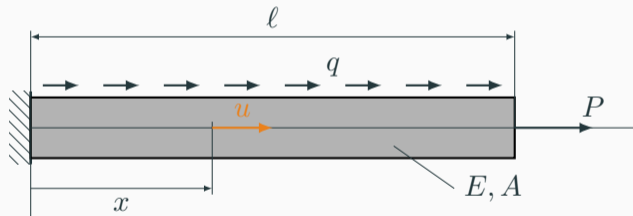
- Résumé de la semaine 2
- Principes de la méthode des éléments finis
- Éléments finis dans le système de coordonnées globales
- Caractéristiques de la méthode des éléments finis
- Exemple d'application de la méthode des éléments finis

Références bibliographiques

- ① T. Gmür, Méthode des éléments finis (§§ 2.3.1-2.3.2)
- ② T. Hughes, The finite element method (§§ 1.8-1.10)

Résumé de la semaine 2

Problème modèle : élastostatique d'une barre en traction/compression



Propriétés géométriques

- A section
- ℓ longueur

Propriétés du matériau

- E module de Young

Charges

- q charge répartie axiale
- P force ponctuelle

Déplacement

- x coordonnée axiale
- $u(x)$ déplacement axial

Formulations de l'élastostatique d'une barre en traction/compression

Forme forte

IPP

Forme faible

Méthode de Galerkin

Forme faible
discrète

Déterminer $u \in C^2([0, \ell])$ tel que

$$-\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = q$$

$$u(0) = 0, \text{ et } EA \frac{du}{dx}(\ell) = P$$



Déterminer $u \in \mathcal{U}$ tel que $\forall \delta u \in \mathcal{V}$

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} dx = P \delta u(\ell) + \int_0^\ell q \delta u dx$$



Déterminer le vecteur α tel que

$$\mathbf{K}\alpha = \mathbf{r}$$

Résumé des étapes de la méthode de Galerkin

- ① Sous-espace des déplacements réels et virtuels : $\mathcal{U} = \mathcal{V}$.
- ② Choix d'un sous-espace de dimension finie : $\mathcal{U}^h \subset \mathcal{U}$, où $\dim(\mathcal{U}^h) = n$.
- ③ Définition des fonctions de forme : $h_i, i = 1, 2, \dots, n$

Base du sous-espace \mathcal{U}^h	h_i linéairement indépendantes
Condition de régularité	$h_i \in H^1(]0, \ell[)$
Condition aux limites essentielles	$h_i(0) = 0$

- ④ Expression des déplacements réels et virtuels approchés :

$$u^h(x) = \mathbf{H}(x)\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i(x), \quad \delta u^h(x) = \mathbf{H}(x)\boldsymbol{\delta\alpha} = \sum_{i=1}^n \delta\alpha_i h_i(x)$$

- La matrice de rigidité \mathbf{K} ($n \times n$) est définie par

$$\mathbf{K} = \int_0^\ell EA \frac{d\mathbf{H}^T}{dx} \frac{d\mathbf{H}}{dx} dx = \int_0^\ell EA \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx$$
$$k_{ij} = \int_0^\ell EA \frac{dh_i}{dx} \frac{dh_j}{dx} dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

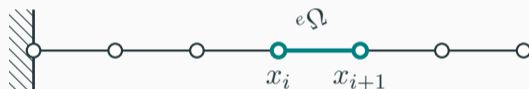
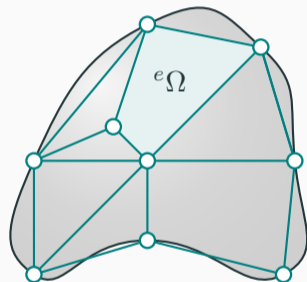
$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{H}}{dx}$ est la matrice ($1 \times n$) des déformations.

- Le vecteur des forces appliquées \mathbf{r} ($n \times 1$) est défini par

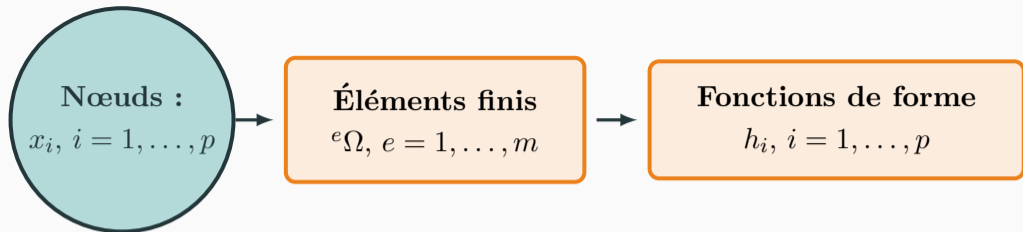
$$\mathbf{r} = \mathbf{H}^T(\ell)P + \int_0^\ell \mathbf{H}^T q dx$$
$$r_i = h_i(\ell)P + \int_0^\ell h_i q dx, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Principes de la méthode des éléments finis

- La géométrie d'un solide ou d'une structure est discrétisée lorsqu'elle est subdivisée en un **maillage d'éléments finis** ${}^1\Omega, \dots, {}^m\Omega$.



- Cette discrétisation introduit une erreur d'approximation qui peut être réduite en utilisant un maillage plus fin (c'est-à-dire davantage d'éléments), ou en augmentant la précision des éléments finis choisis.



Méthode des éléments finis :

- Cas particulier de la méthode de Galerkin, où les fonctions de forme sont systématiquement définies à partir des nœuds.
- **Association d'une fonction de forme h_i à chacun des p nœuds x_i .**
- Chaque fonction de forme est non nulle que sur un nombre très limité d'éléments finis (*support compact*).
- Le calcul de la matrice de rigidité et du vecteur des forces appliquées est facilité par la nature locale des fonctions de forme.

Approche globale des éléments finis

Déplacements réel et virtuel approchés

Le déplacement *approchée* u^h et le déplacement virtuel *approchée* δu^h s'écrivent comme combinaisons linéaires des fonctions de forme nodale :

$$\text{Version indicielle :} \quad u^h(x) = \sum_{i=1}^n q_i h_i(x) \quad \delta u^h(x) = \sum_{i=1}^n \delta q_i h_i(x)$$

$$\text{Version matricielle :} \quad u^h(x) = \mathbf{H}(x)\mathbf{q} \quad \delta u^h(x) = \mathbf{H}(x)\delta\mathbf{q}$$

$\mathbf{H} = [h_1, h_2, \dots, h_i, \dots, h_p]$ matrice ($1 \times p$) des fonctions de forme nodales

$\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_p]^T$ vecteur ($p \times 1$) des déplacements nodaux réels

$\delta\mathbf{q} = [\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_i, \dots, \delta q_p]^T$ vecteur ($p \times 1$) des déplacements nodaux virtuels

Principes de construction

Les fonctions de forme nodales globales

$$h_i : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$$

sont caractérisées par les propriétés suivantes :

- Leurs valeurs sont comprises dans l'intervalle $[0, 1]$.
- Elles vérifient les **3 critères de convergence**.
- Elles vérifient le **critère restreint de continuité**.

Critères de convergence

- ① **Continuité** : continuité des h_i aux interfaces des éléments finis pour assurer la continuité du déplacement approchée u^h :

$$h_i \in C([0, \ell])$$

- ② **Différentiabilité** : dérivabilité des h_i à l'intérieur de chaque élément fini pour assurer que u^h appartienne à la classe des fonctions \mathcal{U}^h :

$$h_i \in C^1(e\Omega)$$

- ③ **Complétude** : les h_i forment une base complète pour l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à un certain degré. De plus, les h_i permettent la représentation des états de déformation constante et les déplacements rigides :

$$\sum_{i=1}^p h_i(x) = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^p \frac{dh_i}{dx}(x) = 0.$$

Les fonctions h_i vérifient la propriété de Kronecker $h_i(x_j) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker. C'est-à-dire

$$h_i(x_i) = 1 \quad \text{et} \quad h_i(x_j) = 0 \quad \text{si } i \neq j.$$

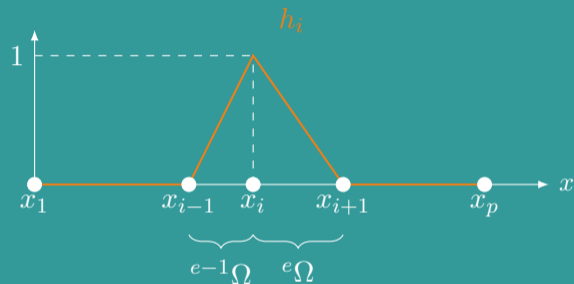
Conséquences:

- ① **Caractérisation physique des inconnues :**

$$u^h(x_j) = \sum_{i=1}^p q_i h_i(x_j) = q_j, \quad \text{et} \quad \delta u^h(x_j) = \sum_{i=1}^p \delta q_i h_i(x_j) = \delta q_j.$$

- ② **Caractère compact :** h_i est nulle sur tous les éléments finis qui ne sont pas adjacents au nœud x_i .

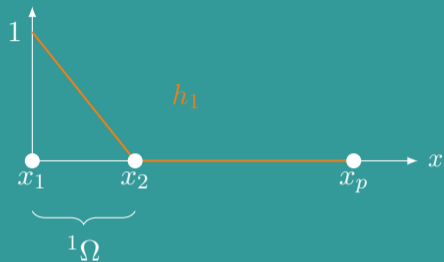
Fonctions de forme linéaires



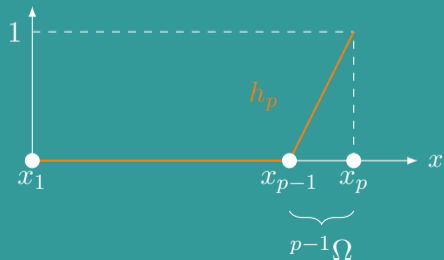
$$h_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in e^{-1}\Omega \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & x \in e\Omega \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

- Les h_i sont des fonctions linéaires par morceaux qui, à l'intérieur de chaque élément fini, correspondent à un polynôme du premier degré.
- Les fonctions de forme linéaires satisfont les **3 critères de convergence** (continuité, différentiabilité, complétude) ainsi que le **critère restreint de continuité**.

Cas particuliers: h_1 et h_p

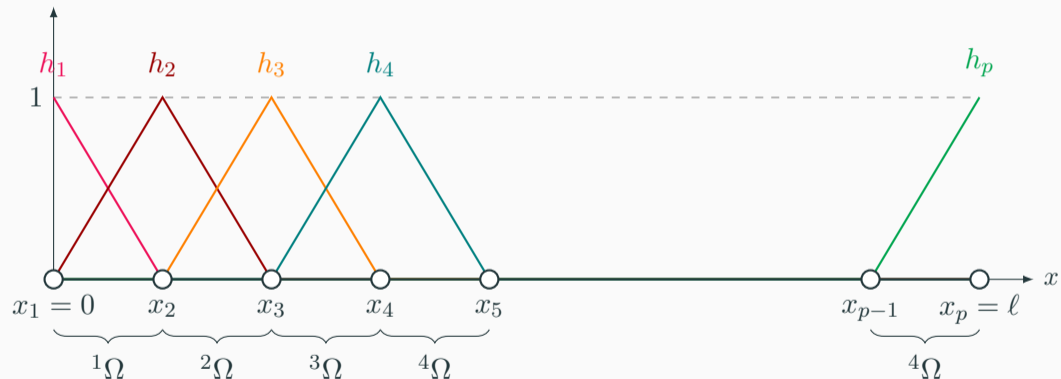


$$h_1(x) = \begin{cases} -\frac{x - x_2}{x_2 - x_1} & x \in {}^1\Omega \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$



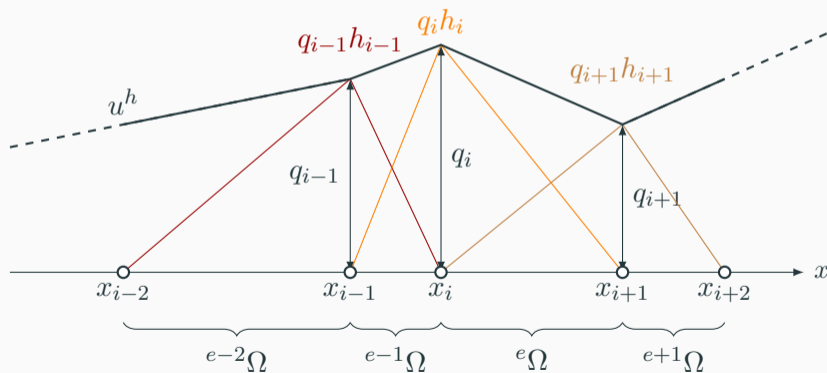
$$h_p(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{p-1}}{x_p - x_{p-1}} & x \in {}^{p-1}\Omega \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Cas particulier: nœuds équidistants



Approximation du déplacement via des fonctions de forme linéaires

$u^h(x) = \sum_{i=1}^p q_i h_i(x)$ est une fonction continue et linéaire par morceaux.



La solution linéaire par morceaux n'est pas solution de la forme forte

u^h ne satisfait pas l'équation différentielle dans la forme forte.

La solution approchée u^h , construite à l'aide de fonctions de forme linéaires, est continue et linéaire par morceaux, mais elle n'est pas deux fois dérivable sur l'ensemble du domaine:

$$u^h \notin C^2([0, \ell])$$

En revanche, $u^h \in \mathcal{U}^h$ satisfait aux conditions de continuité imposées par la formulation faible.

La méthode des éléments finis produit une solution approchée qui satisfait la formulation faible approchée.

Caractéristiques de la méthode des éléments finis

Rappel (forme faible discrète):

On cherche à déterminer le vecteur des déplacements nodaux \mathbf{q} tel que, pour tout vecteur de déplacements virtuel $\delta\mathbf{q}$,

$$\delta\mathbf{q}^T(\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{r}) = 0$$

où

$$k_{ij} = \int_0^\ell EA \frac{dh_i}{dx} \frac{dh_j}{dx} dx, \quad i, j = 1, \dots, p$$

$$r_i = h_i(\ell)P + \int_0^\ell h_i(x) q(x) dx \quad i = 1, \dots, p.$$

Propriétés de la matrice de rigidité

- **K** est symétrique :

$$k_{ij} = k_{ji}.$$

- **K** est définie positive :

$$\mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} \geq 0 \text{ pour tous vecteur non-nul } \mathbf{v}.$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} = 0 \text{ implique } \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

- **K** est une **matrice à bande** : seuls les coefficients proches de la diagonale principale sont non nuls.
- Pour des fonctions de forme linéaires, **K** est **tridiagonale** :

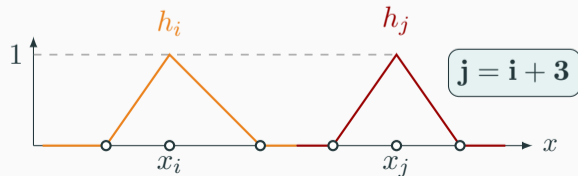
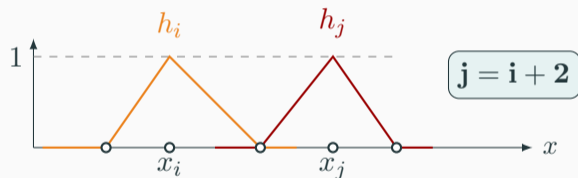
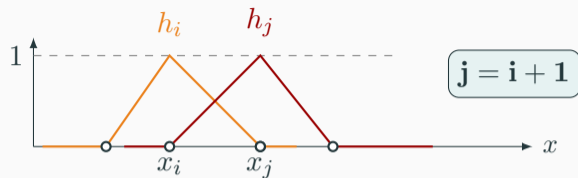
$$k_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad |i - j| > 1.$$

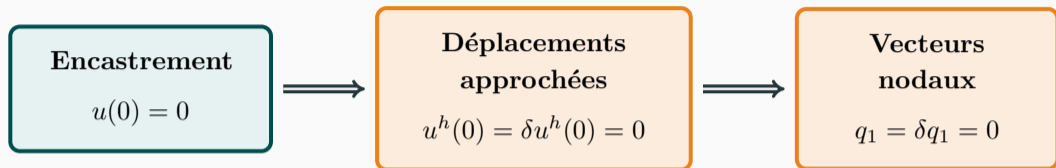
Structure tridiagonale de la matrice \mathbf{K}

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \ddots & \vdots \\ 0 & k_{32} & k_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & k_{p,p-1} & k_{pp} \end{bmatrix}$$

où

$$k_{ij} = \int_0^\ell EA \frac{dh_i}{dx} \frac{dh_j}{dx} dx$$





Conséquence : réduction du système linéaire

- On impose $q_1 = 0$ et $\delta q_1 = 0$ dans la forme faible discrète

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{r}) = 0.$$

- On élimine la première ligne et colonne de \mathbf{K} et la première composante de \mathbf{r} :

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^p \delta q_i \left(\sum_{j=1}^p k_{ij} q_j - r_i \right) = \sum_{i=2}^p \delta q_i \left(\sum_{j=2}^p k_{ij} q_j - r_i \right) = 0$$

Conditions aux limites essentielles

- Comme les δq_i sont arbitraires, on obtient le système linéaire réduit $(p-1) \times (p-1)$:

$$\sum_{j=2}^p k_{ij} q_j = r_i \quad \text{pour } i = 2, \dots, p$$

C'est-à-dire

$$\mathbf{K}_{red} \mathbf{q}_{red} = \mathbf{r}_{red}$$

où

$$\mathbf{K}_{red} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & \ddots & \vdots \\ k_{32} & k_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & k_{p-1,p} \\ 0 & \cdots & k_{p,p-1} & k_{pp} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_{red} = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{red} = \begin{bmatrix} r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_p \end{bmatrix}.$$

Force ponctuelle

$$EA \frac{du}{dx}(\ell) = P$$



Vecteur de forces appliquées

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}^T(\ell)P + \int_0^\ell \mathbf{H}^T(x) q(x) dx$$

$$\mathbf{H}^T(\ell) = \mathbf{H}^T(x_p) = [h_1(x_p), h_2(x_p), \dots, h_p(x_p)] = [0, 0, \dots, 1]$$

Consequence : seule la fonction de forme associée au nœud d'extrémité droite (h_p) contribue à la force nodale appliquée:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P \end{bmatrix} + \int_0^\ell \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ \vdots \\ h_{p-1}(x) \\ h_p(x) \end{bmatrix} q(x) dx$$

Approche globale des éléments finis : avantages et inconvénients

Avantages :

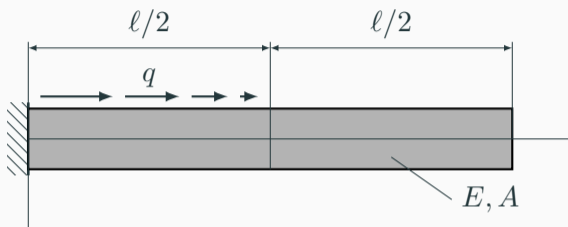
- ✓ Systématisation du processus : approximation via des polynômes de faible degré continus par morceaux.
- ✓ Fonctions de forme à support compact : matrice de rigidité peu dense, condition aux limites plus simples à implémenter.
- ✓ Interprétation physique des inconnues : déplacements discrets.

Inconvénients :

- ✗ Prise en compte limitée de la compacité des fonctions de forme nodales.
- ✗ Pas de mise à profit de l'additivité de l'intégration : intégrales calculées sur l'ensemble du domaine.
- ✗ Limitée par la taille: coûteuse en temps et en mémoire pour les grands problèmes.

Exemple d'application de la méthode des éléments finis

Barre prismatique écastrée soumise à une charge quadratique



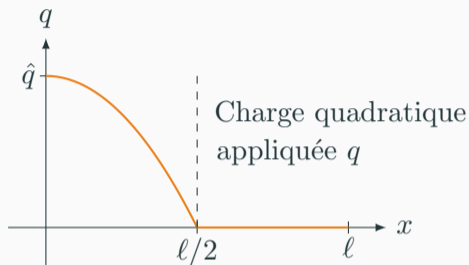
Données de l'exemple

- Charge quadratique axiale agissant sur la moitié de la structure :

$$q(x) = \begin{cases} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) & 0 \leq x \leq \ell/2 \\ 0 & \ell/2 < x \leq \ell \end{cases}$$

- Charge ponctuelle axiale agissant sur l'extrémité droite nulle : $P = 0$

Adaptation de la formulation faible approchée



- La condition aux limites naturelle devient

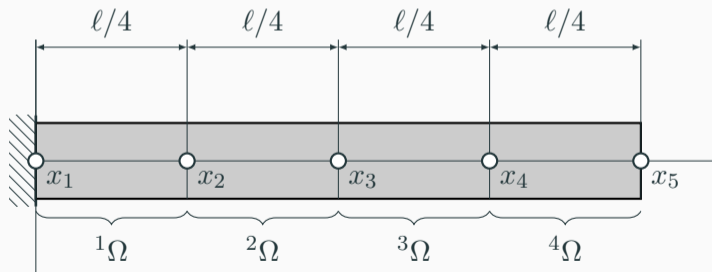
$$EA \frac{du}{dx}(\ell) = 0.$$

- La formulation faible approchée s'écrit : déterminer $u^h \in \mathcal{U}^h$ tel que

$$\int_0^\ell EA \frac{du^h}{dx} \frac{d\delta u^h}{dx} dx = \int_0^{\ell/2} \delta u^h \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) dx \quad \forall \delta u^h \in \mathcal{V}^h$$

Discrétisation du domaine

La discrétisation choisie est composée de : 5 nœuds équidistants ($p = 5$), 4 éléments finis ($m = 4$), fonctions de forme linéaires par morceaux.

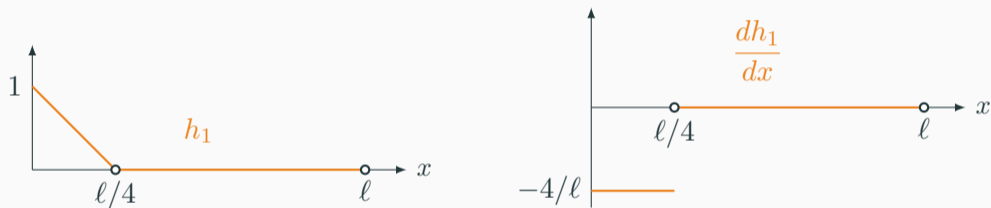


Calcul de la matrice de rigidité \mathbf{K}

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & 0 & 0 \\ 0 & k_{32} & k_{33} & k_{34} & 0 \\ 0 & 0 & k_{42} & k_{44} & k_{45} \\ 0 & 0 & 0 & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix}$$

Calcul de la matrice de rigidité K

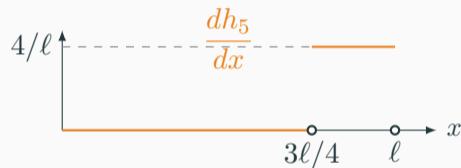
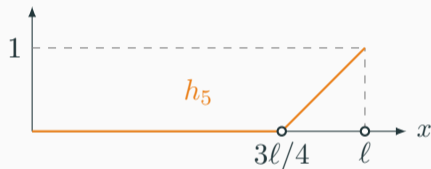
Cas 1a: $i = j = 1$



$$k_{11} = \int_0^{\ell} EA \left(\frac{dh_1}{dx} \right)^2 dx = EA \int_0^{\ell/4} \left(-\frac{4}{\ell} \right)^2 dx = \frac{4EA}{\ell}$$

Calcul de la matrice de rigidité K

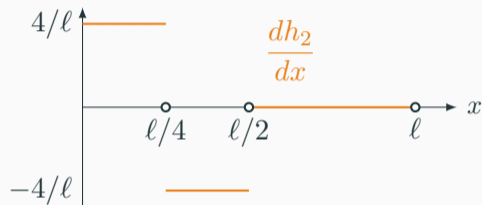
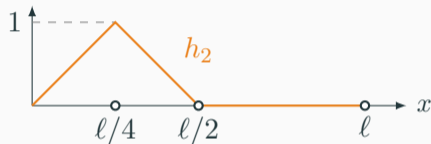
Cas 1b: $i = j = 5$



$$k_{55} = \int_0^\ell EA \left(\frac{dh_5}{dx} \right)^2 dx = EA \int_{3\ell/4}^\ell \left(\frac{4}{\ell} \right)^2 dx = \frac{4EA}{\ell}$$

Calcul de la matrice de rigidité K

Cas 2: $i = j$ ($i \neq 1, 5$)

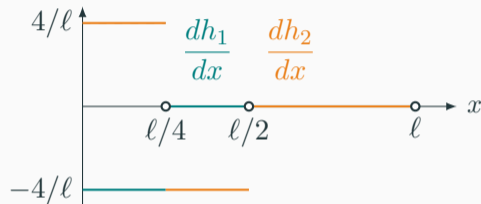
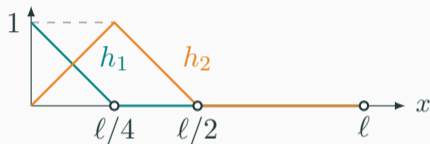


$$k_{22} = \int_0^{\ell} EA \left(\frac{dh_2}{dx} \right)^2 dx = EA \int_0^{\ell/2} \left(\frac{4}{\ell} \right)^2 dx = \frac{8EA}{\ell}$$

Remarque : $k_{22} = k_{33} = k_{44}$

Calcul de la matrice de rigidité K

Cas 3: $i = j - 1$



$$k_{12} = \int_0^{\ell} EA \left(\frac{dh_1}{dx} \right) \left(\frac{dh_2}{dx} \right) dx = EA \int_0^{\ell/4} \left(-\frac{4}{\ell} \right) \left(\frac{4}{\ell} \right) dx = -\frac{4EA}{\ell}$$

Remarque : $k_{12} = k_{21}$. De plus, $k_{23} = k_{34} = k_{45} = k_{32} = k_{43} = k_{54}$.

$$\mathbf{K} = \frac{4EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \int_0^\ell \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2} \right) \mathbf{H}^T(x) dx = \frac{\hat{q}\ell}{192} \begin{bmatrix} 23 \\ 34 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ces intégrales sont longues à calculer manuellement. Il est donc recommandé d'utiliser un ordinateur ou un logiciel de calcul symbolique pour effectuer ces calculs de manière efficace et précise.

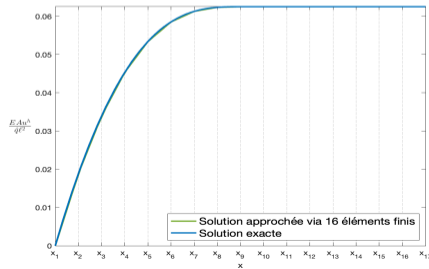
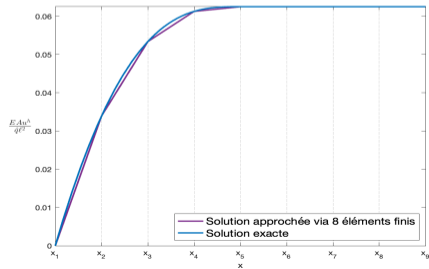
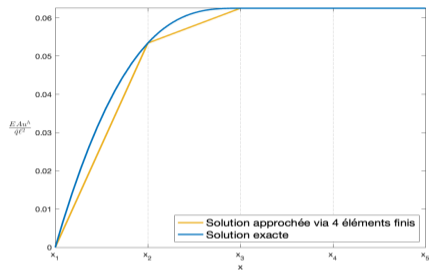
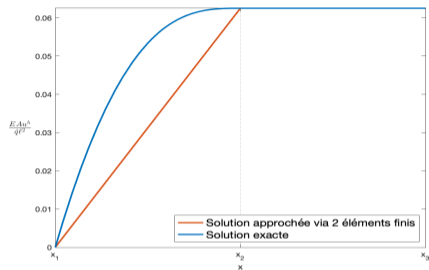
- **Système linéaire réduit** : $\mathbf{K}_{red}\mathbf{q}_{red} = \mathbf{r}_{red}$

$$\mathbf{K}_{red} = \frac{4EA}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{red} = \frac{\hat{q}\ell}{192} \begin{bmatrix} 34 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- **Déplacements nodaux approchés** :

$$\mathbf{q}_{red} = \mathbf{K}_{red}^{-1}\mathbf{r}_{red} = \frac{\hat{q}\ell^2}{192EA} \begin{bmatrix} 55 \\ 96 \\ 96 \\ 55 \end{bmatrix}.$$

Comparaison entre solution exacte et solutions approchées



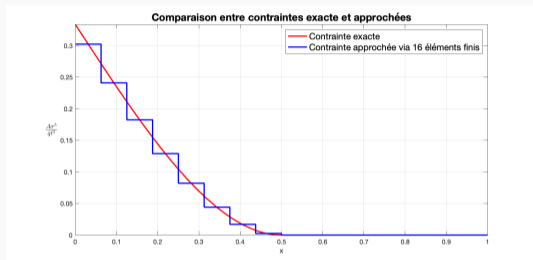
Lissage des contraintes et des déformations

Les dérivées de u^h sont discontinues aux interfaces des éléments.

$$\text{Déformations : } \varepsilon^h = \frac{du^h}{dx}$$

$$\text{Contraintes : } \sigma^h = E \frac{du^h}{dx}$$

sont discontinues aux interfaces.



Lissage

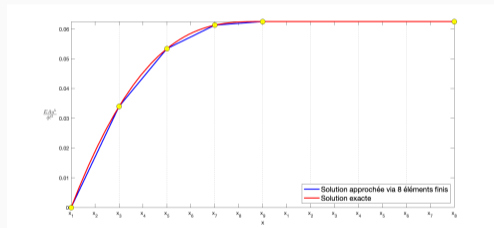
Pour obtenir une approximation plus précise et continue de la contrainte et de la déformation, on peut effectuer un *post-traitement* :

- Moyenne sur les éléments adjacents à un nœud (*nodal averaging*).
- Interpolation des valeurs moyennes sur l'élément.

Superconvergence

La **superconvergence** est un phénomène où la solution approchée est **exacte aux nœuds**, même si elle n'est qu'une approximation ailleurs dans le domaine :

$$u^h(x_i) = u(x_i), \quad \text{pour tous les nœuds } x_i.$$



Ce phénomène est très particulier au problème spécifique que nous examinons et ne peut pas être généralisé à tous les problèmes résolus à l'aide de la méthode des éléments finis.