

Discrétisation des problèmes continus

Méthode de Galerkin

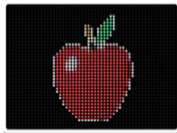
ME-372 Méthode des éléments finis

2025-2026

François Gallaire

Stefano Burzio

Discrete vs. Continuous



LITE BRITE
discrete



ETCH-A-SKETCH
continuous

Plan

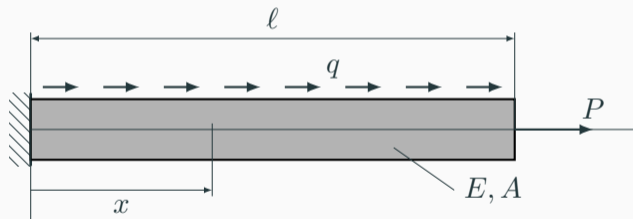
- Résumé de la semaine 1
- Equivalence des formulations forte et faible
- Méthode de Galerkin
- Exemple d'application de la méthode de Galerkin

Références bibliographiques

1. T. Gmür, Méthode des éléments finis (chap. 1, §§ 2.1.3–2.2)
2. T. Hughes, The finite element method (§§ 1.4-1.7)

Résumé de la semaine 1

Problème modèle : élastostatique d'une barre en traction/compression



Propriétés géométriques

- A section
- ℓ longueur

Propriétés des matériaux

- E module de Young

Charges

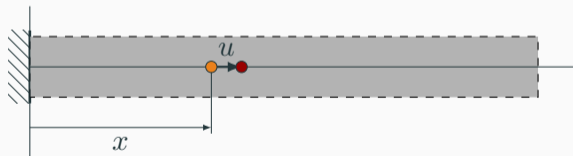
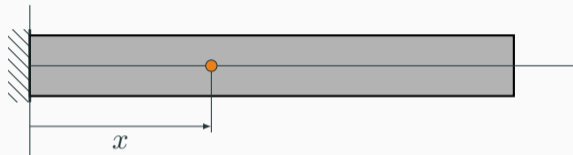
- q charge répartie axiale
- P force axiale ponctuelle

Coordonné

- x coordonnée axiale

Problème modèle : élastostatique d'une barre en traction/compression

Barre non déformée



Barre déformée

Fonction inconnue

- $u(x)$ déplacement axial (*inconnu*)

Forme forte

- Equation d'équilibre

$$-\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = q$$

- Conditions aux limites

$$u(0) = 0$$

$$EA \frac{du}{dx}(\ell) = P$$

Formes forte et faibles du problème modèle

Forme forte

Équation d'équilibre

$$-\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = q$$

Condition aux limites
essentielle

$$u(0) = 0$$

Condition aux limites
naturelle

$$EA \frac{du}{dx}(\ell) = P$$

Forme faible

Principe des travaux virtuels

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} dx = P \delta u(\ell) + \int_0^\ell q \delta u dx$$

Espaces fonctionnels

$$\mathcal{U} = \{u \in H^1(]0, \ell[) \mid u(0) = 0\}$$

$$\mathcal{V} = \{\delta u \in H^1(]0, \ell[) \mid \delta u(0) = 0\}$$

IPP

Regularité des solutions

Une solution de la forme faible est en général moins régulière qu'une solution de la forme forte.

- La forme forte est plus contraignante que la forme faible

$$u \in C^2([0, \ell]) \Rightarrow u \in H^1(]0, \ell[)$$

- La forme faible est plus générale que la forme forte

$$u \in H^1(]0, \ell[) \not\Rightarrow u \in C^2([0, \ell])$$

Solution exacte

Ce problème modèle admet une solution exacte qui est donnée par

$$u(x) = \frac{P}{EA}x + \frac{1}{EA} \int_0^x \int_0^y q(z) dz dy$$

où y et z désignent des variables muettes.

Equivalence des formulations forte et faible

Hypothèses

Supposons que le déplacement axial u satisfait la forme **forte** du problème : soit $u \in C^2([0, \ell])$ tel que

$$-EA \frac{d^2 u}{dx^2} = q \quad \text{dans }]0, \ell[,$$

$$u(0) = 0, \quad \text{et} \quad EA \frac{du}{dx}(\ell) = P.$$

1. Forme intégrale pondérée

$$- \int_0^\ell EA \frac{d^2 u}{dx^2} \delta u \, dx = \int_0^\ell q \delta u \, dx \quad \forall \delta u \in \mathcal{V}$$

Forme forte \implies forme faible

2. Intégration par parties

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} dx - \left[EA \frac{du}{dx} \delta u \right]_0^\ell = \int_0^\ell q \delta u dx \quad \forall \delta u \in \mathcal{V}$$

3. Prise en compte de la condition aux limites naturelle, $EA \frac{du}{dx}(\ell) = P$, et du caractère cinématiquement admissible du déplacement virtuel, $\delta u(0) = 0$:

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} dx - P \delta u(\ell) = \int_0^\ell q \delta u dx \quad \forall \delta u \in \mathcal{V}$$

Conclusion

Comme $u \in C^2([0, \ell])$ et $u(0) = 0$, on en déduit que $u \in \mathcal{U}$, et par conséquent u satisfait également la forme faible.

Hypothèses

Supposons que le déplacement axial u soit **suffisamment régulier** et satisfait la forme **faible** du problème : soit $u \in \mathcal{U}$ tel que

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} dx = P \delta u(\ell) + \int_0^\ell q \delta u dx \quad \forall \delta u \in \mathcal{V}$$

1. Puisque $u \in \mathcal{U}$, la condition aux limites essentielle $u(0) = 0$ est automatiquement satisfaite.
2. Intégration par parties

$$- \int_0^\ell \left(EA \frac{d^2 u}{dx^2} + q \right) \delta u dx + \left(EA \frac{du}{dx}(\ell) - P \right) \delta u(\ell) = 0 \quad \forall \delta u \in \mathcal{V}$$

3. Cas particulier 1 :

- choix d'une expression particulière pour le déplacement virtuel :

$$\delta u = \psi_1 \left(EA \frac{d^2 u}{dx^2} + q \right),$$

où la fonction $\psi_1(x) = x(\ell - x)$ est positive et régulière, et satisfait les conditions $\psi_1(0) = \psi_1(\ell) = 0$. *Remarque* : $\delta u \in \mathcal{V}$ si u est suffisamment régulière.

- L'équation de l'étape 2 devient

$$\int_0^\ell \psi_1 \left(EA \frac{d^2 u}{dx^2} + q \right)^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow EA \frac{d^2 u}{dx^2} + q = 0 \quad \text{dans }]0, \ell[$$

L'équation d'équilibre de la forme forte est ainsi vérifiée.

4. Cas particulier 2 :

- Choix d'une expression particulière pour le déplacement virtuel :

$$\delta u = x/\ell.$$

La fonction δu est positive et régulière dans $]0, \ell[$, et satisfait les conditions $\delta u(0) = 0$ et $\delta u(\ell) = 1$.

- Alors $\delta u \in \mathcal{V}$ et, comme l'équation d'équilibre est satisfaite, l'équation de l'étape 2 se simplifie en

$$EA \frac{du}{dx}(\ell) - P = 0$$

La condition aux limites naturelle est donc également vérifiée.

Conclusion

On en déduit que u satisfait également la forme forte.

Méthode de Galerkin

Idées générales de la méthode de Galerkin



- Les méthodes de Galerkin sont une classe de techniques numériques permettant de transformer des équations différentielles sous forme faible en problèmes discrets.
- La solution approchée est déterminée à l'aide d'un ensemble fini de **fonctions de forme**.



Boris Galerkin 1871 - 1945

Solution approchée de la forme faible

Espaces fonctionnels de dimension finie

On choisit des sous-espaces $\mathcal{U}^h \subset \mathcal{U}$ et $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$ de **dimension** n et on résout le *problème projeté* dans ces sous-espaces. De plus, on impose que $\mathcal{U}^h = \mathcal{V}^h$.

Forme faible approchée

Trouver $u^h \in \mathcal{U}^h$ tel que pour tout déplacement virtuel $\delta u^h \in \mathcal{V}^h$

$$\int_0^\ell EA \frac{du^h}{dx} \frac{d\delta u^h}{dx} dx = P \delta u^h(\ell) + \int_0^\ell q \delta u^h dx$$

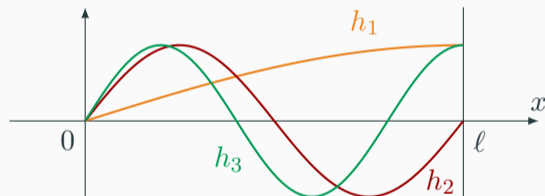
Au lieu de chercher $u \in \mathcal{U}$ telle que la forme faible soit satisfaite pour tout $\delta u \in \mathcal{V}$, on cherche $u^h \in \mathcal{U}^h$ telle que la forme faible soit satisfaite pour tout $\delta u^h \in \mathcal{V}^h$.

Fonctions de forme

Soient n fonctions de forme linéairement indépendantes

$$h_i \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

qui constituent une **base du sous-espace** $\mathcal{U}^h = \mathcal{V}^h$.



Les fonctions de forme doivent satisfaire à la **condition de régularité** et à la **condition aux limites essentielles** :

$$h_i \in H^1(]0, \ell[) \quad \text{et} \quad h_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Déplacements réel et virtuel approchés

Le déplacement *approchée* u^h et le déplacement virtuel *approchée* δu^h s'écrivent comme combinaisons linéaires des fonctions de forme :

$$\text{Version indicielle :} \quad u^h(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i(x) \quad \delta u^h(x) = \sum_{i=1}^n \delta \alpha_i h_i(x)$$

$$\text{Version matricielle :} \quad u^h(x) = \mathbf{H}(x)\boldsymbol{\alpha} \quad \delta u^h(x) = \mathbf{H}(x)\boldsymbol{\delta\alpha}$$

$\mathbf{H} = [h_1, h_2, \dots, h_i, \dots, h_n]$ matrice ($1 \times n$) des fonctions de forme

$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n]^T$ vecteur ($n \times 1$) des inconnues

$\boldsymbol{\delta\alpha} = [\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \dots, \delta\alpha_i, \dots, \delta\alpha_n]^T$ vecteur ($n \times 1$) de constantes

Insertion de l'approximation dans la forme faible approchée

- On cherche le vecteur α tel que, pour tout vecteur $\delta\alpha$, on ait que

$$\int_0^\ell EA \frac{d(\mathbf{H} \delta\alpha)^T}{dx} \frac{d(\mathbf{H} \alpha)}{dx} dx = [\mathbf{H}(\ell) \delta\alpha]^T P + \int_0^\ell [\mathbf{H} \delta\alpha]^T q dx$$

- Ce qui donne, après factorisation :

$$\delta\alpha^T \left[\underbrace{\left(\int_0^\ell EA \frac{d\mathbf{H}^T}{dx} \frac{d\mathbf{H}}{dx} dx \right)}_{\mathbf{K}} \alpha - \underbrace{\left(\mathbf{H}^T(\ell)P + \int_0^\ell \mathbf{H}^T q dx \right)}_{\mathbf{r}} \right] = 0$$

- D'où l'équation matricielle

$$\delta\alpha^T (\mathbf{K}\alpha - \mathbf{r}) = 0$$

- Comme l'équation matricielle doit être vérifiée pour tout $\delta\alpha$, on en déduit que

$$\mathbf{K}\alpha = \mathbf{r}$$

Déterminer le vecteur $\boldsymbol{\alpha}$ ($n \times 1$) qui est solution du système linéaire

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}$$

- La matrice de rigidité \mathbf{K} ($n \times n$) est définie par

$$\mathbf{K} = \int_0^\ell EA \frac{d\mathbf{H}^T}{dx} \frac{d\mathbf{H}}{dx} dx = \int_0^\ell EA \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx$$

$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{H}}{dx}$ est la matrice ($1 \times n$) de passage des déplacements aux déformations.

- Le vecteur des forces appliquées \mathbf{r} ($n \times 1$) est défini par

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}^T(\ell)P + \int_0^\ell \mathbf{H}^T q dx$$

Forme indicielle de la formulation faible discrète

Le système linéaire $\mathbf{K}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}$ s'écrit aussi sous la forme indicielle suivante :

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} \alpha_j = r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

où

$$k_{ij} = \int_0^\ell EA \frac{dh_i}{dx} \frac{dh_j}{dx} dx \quad \text{et} \quad r_i = h_i(\ell)P + \int_0^\ell h_i q dx$$

La solution approchée de la forme faible discrète est donc équivalente à la solution du système linéaire $\mathbf{K}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}$.

Avantages et inconvénients de la méthode de Galerkin

Avantages :

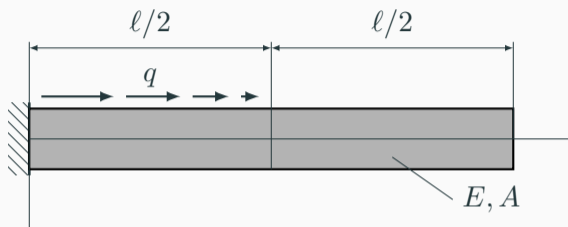
- ✓ La formulation faible est ramenée à un objet plus simple : un système d'équations linéaires.
- ✓ Même approximation pour u^h et δu^h : construction d'un seul sous-espace $\mathcal{U}^h = \mathcal{V}^h$ et d'un seul ensemble de fonctions de forme h_i .
- ✓ Fournit la meilleure approximation possible de u^h dans le sous-espace \mathcal{U}^h (démonstration ultérieure).

Inconvénients :

- ✗ Manque de systématisation de la procédure: aucune information pour la construction des fonctions de forme h_i .
- ✗ Difficultés à trouver des fonctions h_i globales linéairement indépendantes satisfaisant les conditions aux limites essentielles.
- ✗ Les inconnues α_i ne possèdent pas d'interprétation physique directe.

Exemple d'application de la méthode de Galerkin

Barre prismatique écastrée soumise à une charge quadratique



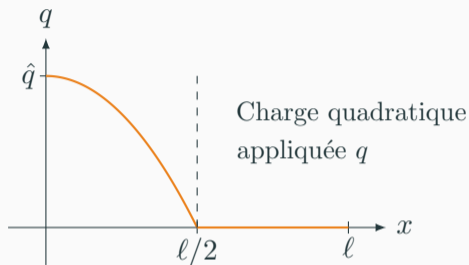
Données de l'exemple

- Charge quadratique axiale agissant sur la moitié de la structure :

$$q(x) = \begin{cases} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) & 0 \leq x \leq \ell/2 \\ 0 & \ell/2 < x \leq \ell \end{cases}$$

- Charge ponctuelle axiale agissant sur l'extrémité droite nulle : $P = 0$

Adaptation de la formulation faible approchée



- La condition aux limites naturelle devient

$$EA \frac{du}{dx}(\ell) = 0.$$

- La formulation faible approchée s'écrit : déterminer $u^h \in \mathcal{U}^h$ tel que

$$\int_0^\ell EA \frac{du^h}{dx} \frac{d\delta u^h}{dx} dx = \int_0^{\ell/2} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) \delta u^h dx \quad \forall \delta u^h \in \mathcal{V}^h$$

Choix de l'espace \mathcal{U}^h

- Approximation à **deux termes** des déplacements réel et virtuel par la méthode de Galerkin

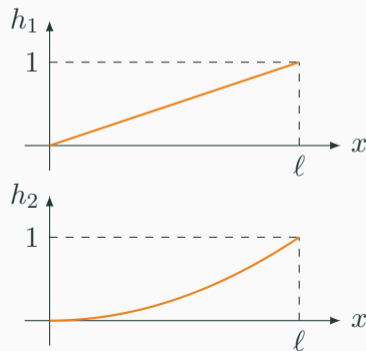
$$u^h(x) = \alpha_1 h_1(x) + \alpha_2 h_2(x)$$

$$\delta u^h(x) = \delta \alpha_1 h_1(x) + \delta \alpha_2 h_2(x)$$

- Choix des fonctions d'approximation

$$h_1(x) = \frac{x}{\ell} \quad \text{et} \quad h_2(x) = \frac{x^2}{\ell^2}$$

Remarque : respect de la condition de régularité et de la condition aux limites essentielle en $x = 0$.



La solution approchée de la forme faible est donc équivalente à la solution du système linéaire $\mathbf{K}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}$ où

$$k_{ij} = \int_0^\ell EA \frac{dh_i}{dx} \frac{dh_j}{dx} dx$$

et

$$r_i = \int_0^{\ell/2} h_i \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2} \right) dx$$

pour $i = 1, 2$.

Calcul de la matrice de rigidité \mathbf{K}

$$k_{11} = \int_0^\ell EA \left(\frac{dh_1}{dx} \right)^2 dx = \int_0^\ell \frac{EA}{\ell^2} dx = \frac{EA}{\ell}$$

$$k_{12} = k_{21} = \int_0^\ell EA \left(\frac{dh_1}{dx} \right) \left(\frac{dh_2}{dx} \right) dx = \int_0^\ell EA \frac{1}{\ell} \frac{2x}{\ell^2} dx = \frac{EA}{\ell}$$

$$k_{22} = \int_0^\ell EA \left(\frac{dh_2}{dx} \right)^2 dx = \int_0^\ell EA \left(\frac{2x}{\ell^2} \right)^2 dx = \frac{4EA}{3\ell}$$

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Calcul du vecteur des forces externes \mathbf{r}

$$r_1 = \int_0^{\ell/2} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) h_1(x) dx = \int_0^{\ell/2} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) \frac{x}{\ell} dx = \hat{q} \int_0^{\ell/2} \frac{x}{\ell} - \frac{4x^3}{\ell^3} dx = \frac{\hat{q}\ell}{16}$$

$$r_2 = \int_0^{\ell/2} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) h_2(x) dx = \int_0^{\ell/2} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2}\right) \frac{x^2}{\ell^2} dx = \hat{q} \int_0^{\ell/2} \frac{x^2}{\ell^2} - \frac{4x^4}{\ell^4} dx = \frac{\hat{q}\ell}{60}$$

$$\mathbf{r} = \frac{\hat{q}\ell}{240} \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Système linéaire d'équations: $\mathbf{K}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}$

$$\frac{EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{\hat{q}\ell}{240} \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \end{bmatrix}$$

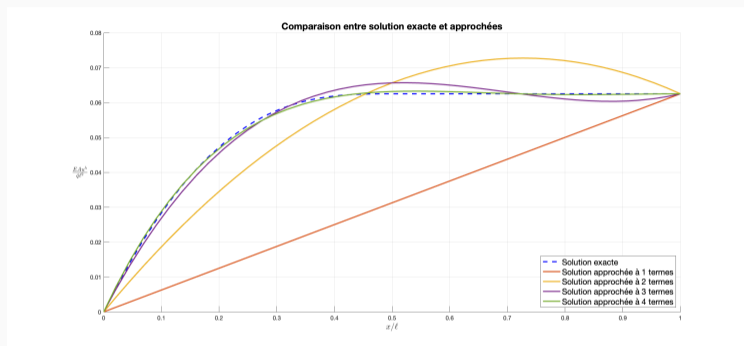
- Résolution du système linéaire

$$\alpha_1 = \frac{\hat{q}\ell^2}{5EA} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = -\frac{11\hat{q}\ell^2}{80EA}$$

- Solution approchée du problème

$$u^h(x) = \alpha_1 h_1(x) + \alpha_2 h_2(x) = \frac{\hat{q}\ell x}{5EA} \left(1 - \frac{11x}{16\ell} \right)$$

Solutions approchées à plusieurs termes



Solution exacte:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{\hat{q}}{EA} \left(\frac{x^4}{3\ell^2} - \frac{x^2}{2} + \frac{\ell x}{3} \right), & 0 \leq x \leq \ell/2 \\ \frac{\hat{q}\ell^2}{16EA}, & \ell/2 < x \leq \ell \end{cases}$$

Discussion des résultats et commentaires

- Accroissement de la précision globale avec le nombre n de termes dans l'approximation u^h .
- Condition aux limites essentielle vérifiée par l'approximation u^h :

$$u^h(0) = 0.$$

- Condition aux limites naturelle approchée en $x = \ell$, mais approximation améliorée avec le nombre n de termes :

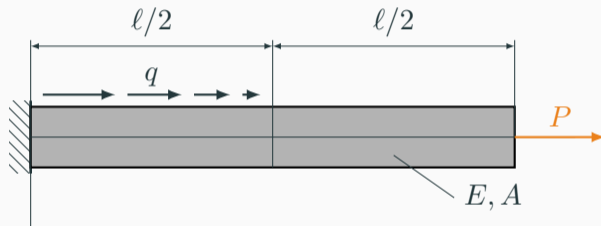
$$EA \frac{du^h}{dx}(\ell) \neq 0.$$

- Solution exacte en $x = \ell$ (résultat non généralisable) :

$$u(\ell) = u^h(\ell)$$

QCM : définition du vecteur des forces appliquées

Supposons que l'on ajoute une charge ponctuelle P appliquée à l'extrémité droite $x = \ell$.



Alors l'expression du vecteur des forces appliquées \mathbf{r} dans la formulation faible discrète est :

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} P \\ P \end{bmatrix} + \int_0^\ell \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{bmatrix} \hat{q} \left(1 - \frac{4x^2}{\ell^2} \right) dx = \begin{bmatrix} P \\ P \end{bmatrix} + \frac{\hat{q}\ell}{240} \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \end{bmatrix}$$