

# Modélisation des problèmes continus

Formes forte et faible d'un problème d'elastostatique

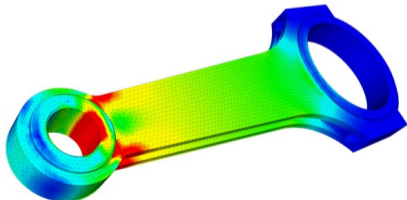
---

ME-372 Méthode des éléments finis

2025-2026

François Gallaire

Stefano Burzio



## Plan

- Introduction à la méthode des éléments finis
- Forme forte de l'élastostatique d'une barre
- Forme faible de l'élastostatique d'une barre
- Espaces de Sobolev

## Références bibliographiques

1. T. Gmür, Méthode des éléments finis (chap. 1, §§ 2.1.1–2.1.2)
2. T. Hughes, The finite element method (§§ 1.1-1.3)

# Introduction à la méthode des éléments finis

---

*La MEF est la confluence de trois ingrédients : l'analyse structurelle matricielle, l'approche variationnelle et un ordinateur.*

- Technique numérique pour résoudre des problèmes aux dérivées partielles.
- Consiste à diviser le domaine d'étude en sous-domaines plus simples, appelés **éléments finis**.
- Sur chaque élément fini, la solution est approchée par des fonctions simples (polynômes).

**1908** “*Lösung von Variationsproblemen*” par W. Ritz

**1915** “*Formulation faible*” par B. Galerkin

**1943** “*Principes mathématiques*” par R. Courant & A. Hrennikoff

Discrétisation  
du continuum



---

1943

# Création de la méthode des éléments finis

**1950** “*Direct Stiffness Method*” par M.J. Turner

**1954** “*Matrice d’analyse structurelle*” by J.Agyris

**1960** Le terme “*élément fini*” a été utilisé par R. W. Clough

**1967** L’un des premiers livres sur la MEF par Zienkiewicz, Taylor et Zhu

Discretisation  
du continuum



1943

DSM



1950

Formulation  
matricielle



1954

MEF



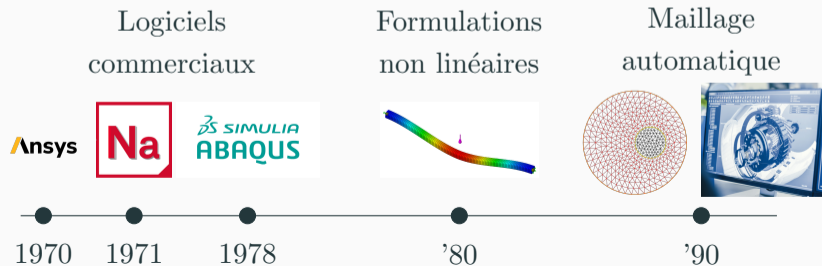
1960

Livre  
MEF



1967

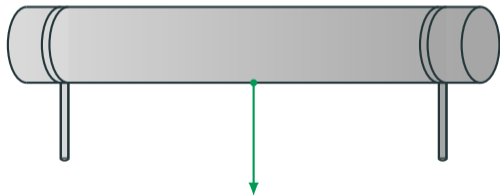
- 1970-1980** Diffusion à grande échelle grâce aux premiers logiciels commerciaux: Ansys, Nastran, Abaqus, etc.
- 1980-1990** Développement des formulations non linéaires: grandes déformations, plasticité, contact, etc. Intégration des phénomènes multi-physiques : couplage thermo-mécanique, électromécanique.
- 1990-2000** Maillage automatique et intégration directe avec la CAO. Utilisation accrue dans l'industrie automobile et aéronautique et énergie.



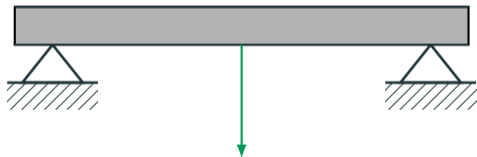
# Méthode des éléments finis : idées générales

**Exemple:** Européens de gymnastique 2018, barres parallèles, Oliver Hegi





**Abstraction** : développer une idéalisation simplifiée de la structure, ou d'une partie de la structure, représenter la géométrie et les charges.



**Modélisation** : rattacher la structure à un model théorique connu capable d'en décrire le fonctionnement avec une précision convenable.

Abstraction

Modélisation

Discrétisation

Résolution



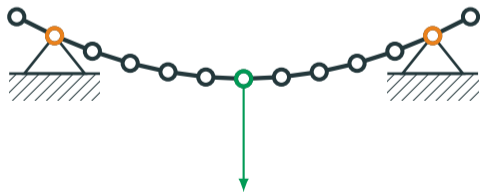
**Discrétisation** : désassembler la structure à l'aide d'un maillage d'éléments finis qui sont connectés à des nœuds situés sur les bords des éléments.

Abstraction

Modélisation

Discrétisation

Résolution



Le processus de résolution comprend :

- **assemblage** des grandeurs élémentaires et application des conditions aux limites,
- **post-traitement** des déformations, contraintes, forces et moments.

# Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis

## Avantages :

- ✓ Polyvalente pour divers problèmes : mécanique des solides et des fluides, dynamique, thermique, etc.
- ✓ Propose une démarche systématique, ce qui facilite la généralisation à des problèmes complexes.
- ✓ Contrôle de la précision : la solution peut être améliorée en raffinant le maillage.

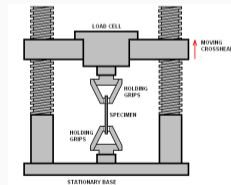
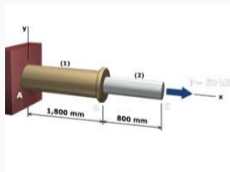
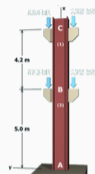
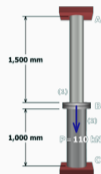
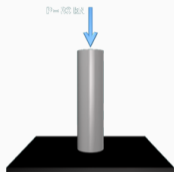
## Inconvénients :

- ✗ Le choix du modèle théorique est crucial : la fiabilité de la solution dépend du modèle retenu.
- ✗ Coût de calcul : les modèles très raffinés augmentent fortement la puissance de calcul.
- ✗ Nécessite de l'expérience dans les réglages du solveur: maillage, conditions aux limites, etc.

# Forme forte de l'élastostatique d'une barre

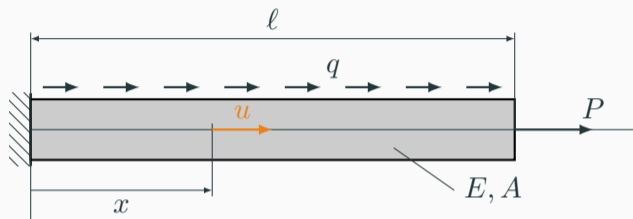
---

# Problèmes physique 'réels' d'une barre en traction/compression



(Credit: MecMovies)

# Modèle abstrait d'une barre en traction/compression

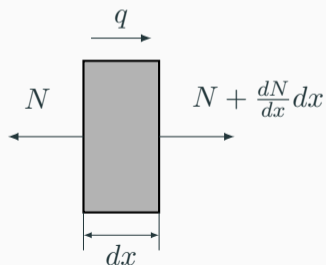


- $A$  aire de la section
- $\ell$  longueur
- $E$  module de Young
- $q$  charge répartie axiale
- $P$  force ponctuelle
- $x$  coordonnée axiale
- $u(x)$  déplacement axial

## Hypothèses cinématiques :

- La section plane de la barre, supposée infiniment rigide, reste plane après déformation.
- Les charges, uniformes sur chaque section, ne peuvent être appliquées qu'axialement.
- La barre ne peut subir qu'une contrainte axiale  $\sigma_x$ , uniforme sur chaque section droite. Ainsi, l'effet de Poisson est négligeable ( $\sigma_y = \sigma_z = 0$ ).

# Équilibre des forces axiales



## Equation d'équilibre

Soit  $N$  l'effort intérieur axial, l'équilibre de la section droite de longueur  $dx$  s'écrit :

$$N + \frac{dN}{dx} dx - N + q dx = 0$$

$$-\frac{dN}{dx} = q$$

# Equation constitutive et linéarité de la déformation

## ■ Loi de Hooke

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

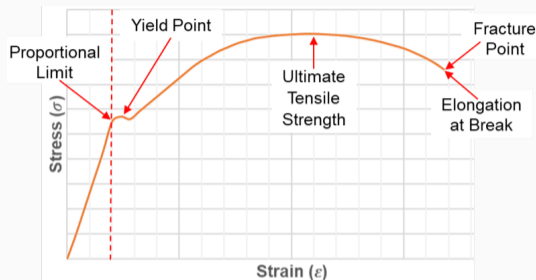
$\sigma_x$  contrainte normale

$E$  module d'élasticité

$\varepsilon_x$  déformation axiale

## ■ Linéarité de la déformation

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$$



Credit: Fidelis

Relation entre effort normal  $N$  et déplacement  $u$

$$N = A \sigma_x = EA \varepsilon_x = EA \frac{du}{dx}$$

## Modèle théorique - formulation forte

Trouver la fonction  $u \in C^2([0, \ell])$  telle que :

- l'équation différentielle du deuxième ordre soit vérifiée dans  $]0, \ell[$  :

$$-\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) = q$$

- les deux conditions aux limites soient vérifiées :

1. Déplacement imposé à l'extrémité gauche (**condition essentielle**)

$$u(0) = 0$$

2. Force appliquée à l'extrémité droite (**condition naturelle**)

$$N(\ell) = P \quad \Leftrightarrow \quad EA \frac{du}{dx}(\ell) = P$$

# Forme faible de l'élastostatique d'une barre

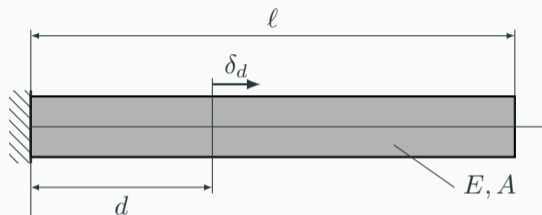
---

## Faiblesse de la forme forte

**Exemple:** considérons  $P = 0$  et  $q = \delta_d$  où  $\delta_d$  est la fonction de Dirac centrée en  $d \in ]0, \ell[$ .

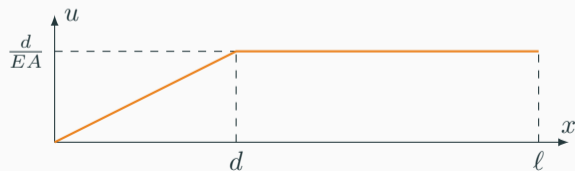
La forme forte du problème devient :

$$\begin{cases} -EA \frac{d^2 u}{dx^2} = \delta_d & \text{dans } ]0, \ell[ \\ u(0) = 0 \\ EA \frac{du}{dx}(\ell) = 0 \end{cases}$$



La solution exacte est donnée par :

$$u(x) = \frac{1}{EA} \begin{cases} x & \text{si } x < d \\ d & \text{si } x \geq d \end{cases}$$



Cependant, cette solution n'est pas deux fois dérivable en  $d$ .

# Principes et idées de la forme faible

- Repose sur le **principe des travaux virtuels** et la méthode des variations.
  - Reformule le problème en termes d'**intégrales** plutôt que de dérivées.
  - Permet d'obtenir des solutions dans un **espace de fonctions plus large**, souvent des fonctions continues par morceaux.
- 

La forme faible est obtenue

1. en multipliant l'équation différentielle par un déplacement virtuel arbitraire,
  2. en intégrant sur  $[0, \ell]$ ,
  3. en utilisant l'intégration par parties pour réduire l'ordre des dérivées,
  4. enfin, en incorporant les conditions aux limites.
-

### ■ Forme intégrale de l'élastostatique d'une barre

Soit  $\delta u$  un déplacement axial virtuel arbitraire, alors

$$\int_0^\ell \left[ EA \frac{d^2 u}{dx^2} + q \right] \delta u \, dx = 0$$

### ■ Intégration par parties

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} \, dx - \left[ EA \frac{du}{dx} \delta u \right]_0^\ell = \int_0^\ell q \delta u \, dx$$

- **Déplacement virtuel cinématiquement admissible**

Le déplacement virtuel  $\delta u$  doit être compatible avec la condition aux limites *essentielle*,  $u(0) = 0$  :

$$\delta u(0) = 0$$

- Insertion de la condition aux limites *naturelle*,  $EA \frac{du}{dx}(\ell) = P$ , et de la contrepartie virtuelle de la condition aux limites *essentielle*,  $\delta u(0) = 0$ , dans la forme intégrale

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} dx + EA \frac{du}{dx}(0) \delta u(0) - EA \frac{du}{dx}(\ell) \delta u(\ell) = \int_0^\ell q \delta u dx$$
$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} dx - P \delta u(\ell) = \int_0^\ell q \delta u dx$$

## Forme faible de l'élastostatique d'une barre

### ■ Principe des travaux virtuels

Trouver  $u \in \mathcal{U}$  tel que pour tout déplacement virtuel  $\delta u \in \mathcal{V}$

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} dx = P \delta u(\ell) + \int_0^\ell q \delta u dx$$

### ■ Classes des fonctions admissibles $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$

$$\mathcal{U} = \{u \in H^1(]0, \ell[) \mid u(0) = 0\}$$

$$\mathcal{V} = \{\delta u \in H^1(]0, \ell[) \mid \delta u(0) = 0\}$$

où l'espace de Sobolev  $H^1(]0, \ell[)$  est défini par :

$$H^1(]0, \ell[) = \left\{ w \mid \int_0^\ell w^2(x) + \left( \frac{dw}{dx}(x) \right)^2 dx < \infty \right\}$$

# Espaces de Sobolev

---

## Régularité requise : forme forte vs forme faible

- La forme forte exige que  $u$  soit au moins  $C^2$  puisqu'elle fait intervenir le terme

$$\frac{d^2 u}{dx^2}.$$

- En revanche, la forme faible ne nécessite que  $u$  et  $\delta u$  soient dans l'espace de Sobolev  $H^1$ , puisqu'elle fait intervenir les termes

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} dx$$

et

$$\int_0^\ell q \delta u dx.$$

## Espaces des fonctions à dérivées continues d'ordre $k$

$$C^k([0, \ell]) = \left\{ u \mid u, \frac{du}{dx}, \dots, \frac{d^k u}{dx^k} \text{ continues sur } [0, \ell], \|u\|_k < \infty \right\}$$

### ■ Norme maximale :

$$\|u\|_k = \max_{0 \leq x \leq \ell} \left( |u(x)| + \left| \frac{du}{dx}(x) \right| + \left| \frac{d^2 u}{dx^2}(x) \right| + \dots + \left| \frac{d^k u}{dx^k}(x) \right| \right)$$

### ■ Régularité et inclusion :

$$\|u\|_0 \leq \|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq \dots \\ \dots \subset C^2 \subset C^1 \subset C^0$$

## Espaces de Sobolev ou de Hilbert d'ordre $k$

$$H^k(]0, \ell[) = \{u \mid \|u\|_k < \infty\}$$

### ■ Norme hilbertienne :

$$\|u\|_k = \left( \int_0^\ell u^2(x) + \left( \frac{du}{dx}(x) \right)^2 + \left( \frac{d^2u}{dx^2}(x) \right)^2 + \cdots + \left( \frac{d^k u}{dx^k}(x) \right)^2 dx \right)^{1/2}$$

### ■ Régularité et inclusion :

$$\|u\|_0 \leq \|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq \cdots \\ \cdots \subset H^2 \subset H^1 \subset H^0$$

## Inclusions entre $C^k$ et $H^k$

- Inclusion générale : Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$C^k \subset H^k$$

- Théorème d'injection de Sobolev : Si  $h < k - \frac{n}{2}$ , où  $n$  est la dimension spatiale, alors

$$H^k \subset C^h$$

*Cas particuliers :*

$$n = 1$$

$$C^1 \subset H^1 \subset C^0$$

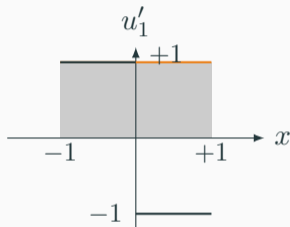
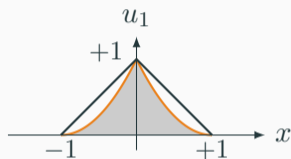
$$n = 2$$

$$C^2 \subset H^2 \subset C^0$$

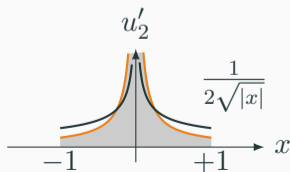
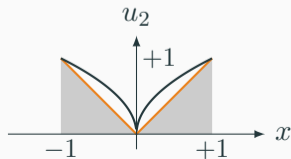
*Remarque :* Pour  $n = 1$ , on a en particulier :  $H^1 \simeq C^0 \cap C_{pm}^1$

# QCM: Exemples en 1D

$$1. u_1(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1-x & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$



$$2. u_2(x) = \sqrt{|x|}$$



$$u_1 \in C^0([-1, 1])$$

$$u_1 \in H^1(] - 1, 1[)$$

$$u_1 \notin C^1([-1, 1])$$

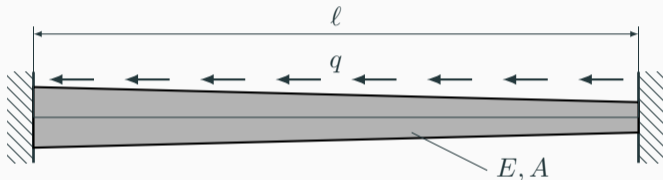
$$u_2 \in C^0([-1, 1])$$

$$u_2 \notin H^1(] - 1, 1[)$$

$$u_2 \notin C^1([-1, 1])$$

## QCM: forme forte et faibles

On considère une barre conique élastique de longueur  $\ell$ , de module de Young constant  $E$ , encastée aux deux extrémités, et soumise à une charge répartie uniforme  $q$  le long de son axe. La section  $A(x)$  varie linéairement avec la coordonnée  $x$ .



**Formulation forte:**

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) = -q \\ u(0) = u(\ell) = 0 \end{cases}$$

**Forme faible:**

$$\int_0^\ell EA \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} dx = - \int_0^\ell q \delta u dx$$
$$\mathcal{U} = \mathcal{V} = \{w \in H^1(]0, \ell[) \mid w(0) = w(\ell) = 0\}$$