Examen ME372 Méthode des éléments finis
travail a faire a la maison

- Le rendu est personnel. Il ne s'agit pas d'un travail en groupe.
- Soignez l'écriture (ce qui ne peut être lu correctement ne peut être noté positivement).

Vibrations transversales d'une membrane circulaire

Les vibrations transversales d'une membrane circulaire de rayon R, d'épaisseur uniforme h et de masse volumique ρ, tendue entre appuis fixes avec une tension superficielle uniforme T (Fig. 1a), sont régies par le problème aux valeurs propres suivant, écrit en forme faible :

$$\forall w,\, \delta w \in W: \quad \int_\Omega T\,\nabla w \cdot \nabla \delta w \, d\Omega = \omega^2 \int_\Omega \rho h\, w\, \delta w\, d\Omega.$$

On impose les conditions de bord :

$$W = \{w \in H^1(\Omega) : w = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Ici, w et δw désignent les déplacements transverses réel et virtuel, ω est la pulsation propre de la membrane, tandis que W et V caractérisent respectivement les espaces de fonctions admissibles. Les grandeurs x et y dénotent les variables spatiales dans le domaine bidimensionnel Ω, et s est l'abscisse parcourant la frontière $\partial\Omega$. Le symbole ∇ représente l'opérateur gradient en deux dimensions.

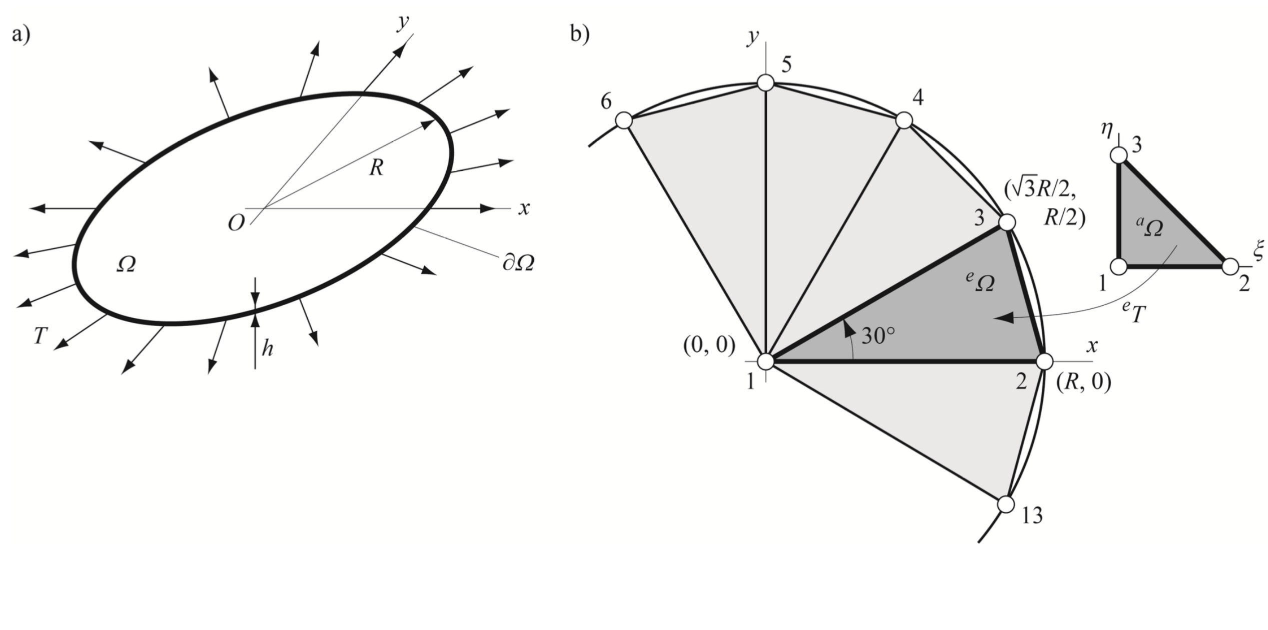

Figure 1

1. [21 points] On considère une discrétisation de la membrane circulaire en $2\pi/\alpha$ éléments finis triangulaires bilinéaires, chacun couvrant un angle central de α radians. L'angle α est choisi de manière à ce que $2\pi/\alpha$ soit un entier. À titre d'illustration, la Fig. 1b représente le cas $\alpha = \pi/6$. Déterminer la première pulsation propre approchée ω_h, en respectant les axes de coordonnées ainsi que les éléments finis père ${}^a\Omega$ et déformé ${}^e\Omega$ illustrés dans la figure.

   a. [3 points] Établir la forme faible du problème et définir explicitement la matrice de rigidité et la matrice de masse associées à un élément.

   b. [2 points] Écrire la transformation de coordonnées permettant de passer de l'élément fini père ${}^a\Omega$ à l'élément déformé ${}^e\Omega$ du maillage.

   c. [3 points] Calculer la matrice jacobienne de cette transformation ainsi que son déterminant.

   d. [5 points] Déterminer que les contributions élémentaires nécessaires des matrices de rigidité et de masse.

   e. [5 points] Assembler les matrices élémentaires et appliquer les conditions de bord pour obtenir les matrices globales réduites.

   f. [3 points] Calculer la première pulsation propre approchée ω_h et la comparer à la valeur exacte, en donnant l'erreur relative.

2. [4 points] Discuter le comportement de la pulsation propre approchée ω_h lorsque le nombre d'éléments finis augmente. La valeur obtenue tend-elle vers une limite ? Cette limite coïncide-t-elle avec la pulsation propre exacte ω ? Justifier votre réponse.