

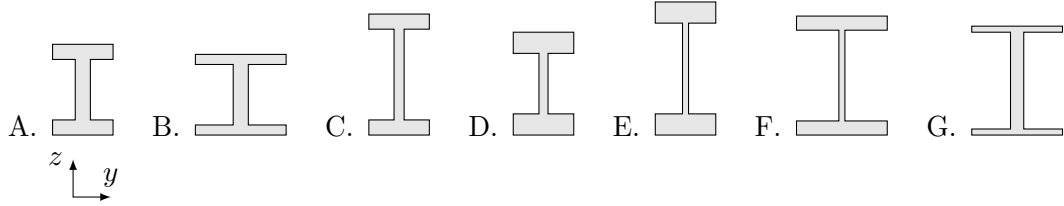
1. (10 points) Multiple choice

**English:** Select **one** answer per multiple-choice question. Please write your answers in the table in the answer booklet.

**Français:** Choisissez **une** réponse par question à choix multiple. Merci d'indiquer vos réponses dans la table dans le cahier-réponse.

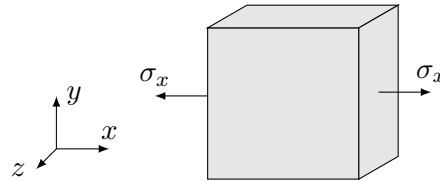
- (a) You are given a choice of different I-beams, all of which have the same cross-sectional area. Select the beam cross-section below that has the highest bending-stiffness when bending around the  $y$ -axis.

*Vous disposez de différentes poutres en I dont l'aire de la section est constante. Choisissez la section de poutre qui a la plus grande rigidité à la flexion, pour une flexion autour de l'axe  $y$ .*



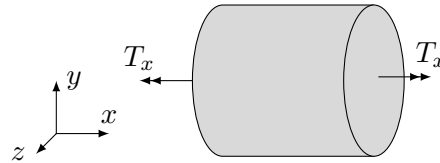
- (b) A block of isotropic material is being loaded only in the  $x$  direction. Select the correct statement below for  $\nu = 0.4$ .

*Un bloc de matériau isotropique subit une force seulement dans la direction  $x$ . Sélectionner la bonne réponse ci-dessous, pour  $\nu = 0.4$ .*



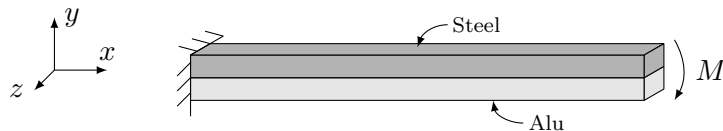
- A. There is strain in  $z$  direction and there is stress in  $y$  direction.  
*Il y a une déformation selon la direction  $z$  et une contrainte selon la direction  $y$ .*
- B. There is no strain in  $y$  and  $z$  direction and there is no stress in  $y$  and  $z$  direction.  
*Il n'y a pas de déformation selon les directions  $y$  et  $z$ , et il n'y a pas de contrainte selon les directions  $y$  et  $z$ .*
- C. There is no strain in  $y$  and  $z$  direction but there is stress in  $y$  and  $z$  direction.  
*Il n'y a pas de déformation selon les directions  $y$  et  $z$  mais il y a une contrainte dans les directions  $y$  et  $z$ .*
- D. There is strain in  $y$  and  $z$  direction but there is no stress in  $y$  and  $z$  direction.  
*Il y a une déformation selon les directions  $y$  et  $z$ , mais il n'y a pas de contrainte selon les directions  $y$  et  $z$ .*
- E. There is strain in  $y$  and  $z$  direction and there is stress in  $y$  and  $z$  direction.  
*Il y a une déformation selon les directions  $y$  et  $z$  et il y a une contrainte dans les directions  $y$  et  $z$ .*
- F. None of the above.  
*Aucune des réponses qui précèdent.*
- (c) In the element under torsional load shown below, what is the internal torque in the  $y - z$  plane?

Dans l'élément suivant sous contrainte en torsion, quel est le couple dans le plan  $y - z$  ?



- A.  $-\frac{T_x}{2}$    B. 0   C.  $\frac{T_x}{2}$    D.  $T_x$    E.  $2T_x$    F. None of these. *Aucune de ces réponses*
- (d) A uniform unconstrained isotropic block of a material is heated. Choose the correct observation below.  
*Un bloc de matériau uniforme, non-contraint et isotrope, est chauffé. Choisissez l'affirmation correcte parmi les propositions suivantes.*
- A. There is neither strain nor stress in any of the axes.  
*Il n'y a ni contrainte ni déformation sur aucun des axes.*
- B. There is stress in all axes, but no strain.  
*Il y a une contrainte sur tous les axes, mais pas de déformation.*
- C. There is no stress, but strain in all axes.  
*Il n'y a pas de contrainte, mais il y a une déformation sur tous les axes.*
- D. There is both stress as well as strain in all axes.  
*Il y a à la fois une contrainte et une déformation selon tous les axes.*
- E. None of the above.  
*Aucune de ces réponses.*
- (e) If a stress tensor is diagonal, the individual stresses are ...  
*Si un tenseur de contraintes est diagonal, les contraintes individuelles sont...*
- A. positive stresses. *des contraintes positives*
- B. negative stresses. *des contraintes négatives.*
- C. principal stresses. *des contraintes principales*
- D. bending stresses. *des contraintes de flexion.*
- E. shear stresses. *des contraintes de cisaillement.*
- F. None of these. *Aucune des réponses ci-dessus.*
- (f) In the displacement–stiffness method, a stiffness matrix of size  $n \times n$  :  
*Dans la méthode déplacement-rigidité, une matrice de rigidité de taille  $n \times n$  :*
- A. Is diagonal. *Est diagonale*
- B. Is asymmetric. *Est asymétrique*
- C. Has rank  $n - 2$ . *Est de rang  $n - 2$ .*
- D. Is triangular. *Est triangulaire.*
- E. None of the above. *Aucune des réponses ci-dessus.*
- (g) The gauge factor of a strain gauge sensor describes  
*Le facteur de jauge d'une jauge de déformation mesure :*
- A. The width of the sensor.  
*La largeur du capteur.*

- B. The length of the sensing resistor.  
*La longueur de la résistance de mesure.*
- C. The resistance change per strain change.  
*Le rapport entre variation de résistance et variation de déformation.*
- D. The stress per strain in the sensing resistor.  
*Le rapport entre contrainte et déformation de la résistance de mesure.*
- E. The resistance change per temperature change.  
*Le rapport entre variation de résistance et variation de température.*
- F. None of the above  
*Aucune des réponses ci-dessus.*
- (h) The loaded composite beam shown below is made of two different materials with equal thickness that were welded together. The bottom material is aluminum ( $E = 70$  GPa) while the top material is steel ( $E = 200$  GPa). Select the correct statement below.  
*Une poutre composite sous contrainte, décrite ci-dessous, est composée de deux matériaux différents de même épaisseur soudés ensemble. Le matériau du dessous est de l'aluminium ( $E = 70$  GPa), tandis que le matériau du dessus est de l'acier ( $E = 200$  GPa). Sélectionner la bonne réponse ci-dessous.*



- A. The neutral axis runs along the middle of the beam.  
*L'axe neutre est au milieu de la poutre.*
- B. The neutral axis is entirely contained in the steel part.  
*L'axe neutre est entièrement dans la partie en acier.*
- C. The neutral axis is entirely contained in the aluminum part.  
*L'axe neutre est entièrement dans la partie en aluminium.*
- D. The neutral axis alternates between the steel and the aluminum part.  
*L'axe neutre alterne entre la partie en acier et la partie en aluminium.*
- E. None of the above.  
*Aucune des réponses ci-dessus.*
- (i)  $\vec{\sigma}_1$  and  $\vec{\sigma}_2$  are principal stress vectors. Select the correct statement below.  
 *$\vec{\sigma}_1$  et  $\vec{\sigma}_2$  sont des vecteurs de contrainte principaux. Choisissez la bonne réponse ci-dessous.*
- A.  $\vec{\sigma}_1$  and  $\vec{\sigma}_2$  are orthogonal.  
 *$\vec{\sigma}_1$  et  $\vec{\sigma}_2$  sont orthogonaux.*
- B.  $\vec{\sigma}_1$  and  $\vec{\sigma}_2$  have same magnitude and opposite direction.  
 *$\vec{\sigma}_1$  et  $\vec{\sigma}_2$  ont même norme et des directions opposées.*
- C. The angle between  $\vec{\sigma}_1$  and  $\vec{\sigma}_2$  is  $45^\circ$ .  
*L'angle entre  $\vec{\sigma}_1$  et  $\vec{\sigma}_2$  est de  $45^\circ$ .*
- D.  $\vec{\sigma}_1$  and  $\vec{\sigma}_2$  are shear stresses.  
 *$\vec{\sigma}_1$  et  $\vec{\sigma}_2$  sont des contraintes de cisaillement.*
- E. None of the above.  
*Aucune des réponses ci-dessus.*

- (j) A cantilever beam of length  $L$  which is uniformly loaded has the highest bending moment

*Un cantilever de longueur  $L$  qui est chargé uniformément a le plus grand moment de flexion*

- A. at the free end.  
*à l'extrémité libre.*
- B. in the middle of the beam.  
*au milieu de la poutre.*
- C. at  $\frac{\pi}{12}L$  from the fixed end.  
*à  $\frac{\pi}{12}L$  de l'extrémité encastrée.*
- D. at the fixed end.  
*à l'extrémité encastrée.*
- E. at none of the above.  
*à aucun des emplacements proposés ci-dessus.*

2. (10 points)

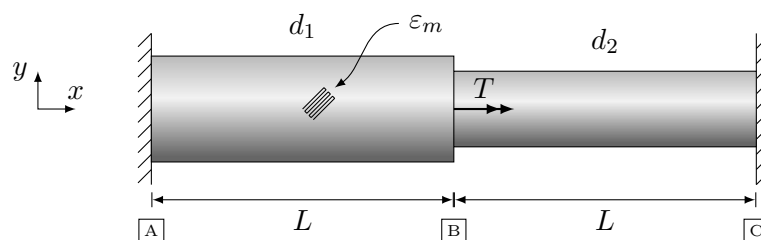


FIGURE 1 – Indeterminate system of torsion bars with load and attached strain gauge.

### English

A double sided clamped bar (figure 1) consists of two cylinders, which are rigidly connected in series. A torque  $T$  acts on point B. The diameters  $d_1$  and  $d_2$  as well as the length  $L$  are known. The cylinders are isotropic and made of the same material. The shear modulus  $G$  of the material is homogeneous, but its value is unknown.

- (a) Express the angle of twist at point B and the reaction torques  $T_A$  and  $T_C$  as functions of the known parameters and  $G$ .
- (b) A strain gauge is placed at an angle of  $45^\circ$  with respect to the  $x$ -axis on the first cylinder. It gives a reading of  $\varepsilon_m = 100 \cdot 10^{-6}$ . Find the shear strain  $\gamma_1$  at the surface of the left cylinder.

*Hint : remember that the bar is neither compressed nor elongated in  $x$  and  $y$  directions.*

- (c) From the two previous questions, deduce the value of  $G$ . Use  $T = 10 \text{ Nm}$ ,  $d_1 = 2 \text{ cm}$ ,  $d_2 = 1 \text{ cm}$  and  $L = 10 \text{ cm}$ .

### Français

Une barre fixée des deux côtés (figure 3) consiste de deux cylindres connectés en série de manière rigide. Un torque  $T$  agit au point B. Les diamètres  $d_1$  et  $d_2$  ainsi que la longueur  $L$  sont connus. Les cylindres sont isotropes et constitués du même matériau. Le module de cisaillement  $G$  du matériau est homogène, mais sa valeur est inconnue.

- (a) Exprimez l'angle de torsion au point B et les torques de réaction  $T_A$  et  $T_C$  en fonction des paramètres connus et de  $G$ .
- (b) Une jauge de déformation est placée à un angle de  $45^\circ$  par rapport à l'axe  $x$  sur le premier cylindre. Elle indique  $\varepsilon_m = 100 \cdot 10^{-6}$ . Déduisez-en la contrainte de cisaillement  $\gamma_1$  à la surface du cylindre de gauche.  
*Indice : souvenez-vous que la barre n'est ni comprimée, ni étirée dans les directions  $x$  et  $y$ .*
- (c) En vous basant sur les deux questions précédentes, trouvez la valeur de  $G$ . Utilisez  $T = 10 \text{ Nm}$ ,  $d_1 = 2 \text{ cm}$ ,  $d_2 = 1 \text{ cm}$  et  $L = 10 \text{ cm}$ .

3. (10 points)

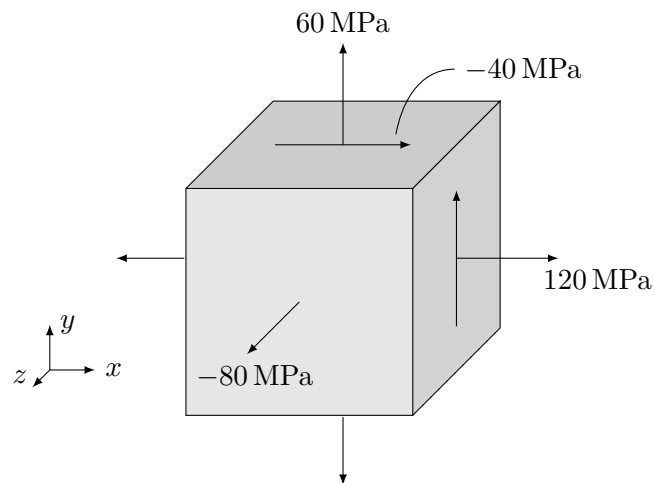


FIGURE 2 – Element under various stresses.

### English

The infinitesimal volume element at equilibrium shown in figure 2 is loaded with one shear and three normal stresses.

- (a) Write the stress tensor of the element.
- (b) Calculate the principal stresses of the element.
- (c) Calculate the maximum shear stress in the element.
- (d) Find the direction vectors for all principal stresses in the coordinate system  $[\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z]$ .

**Français**

Le volume infinitésimal en équilibre montré en figure 2 est chargé avec une contrainte de cisaillement et trois contraintes normales.

- (a) Ecrivez le tenseur de contrainte de l'élément.
- (b) Calculez les contraintes principales de l'élément.
- (c) Calculez la contrainte de cisaillement maximale de l'élément.
- (d) Trouvez le vecteur directeur de chacune des contraintes principales, dans le système de coordonnées  $[\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z]$ .

4. (10 points)

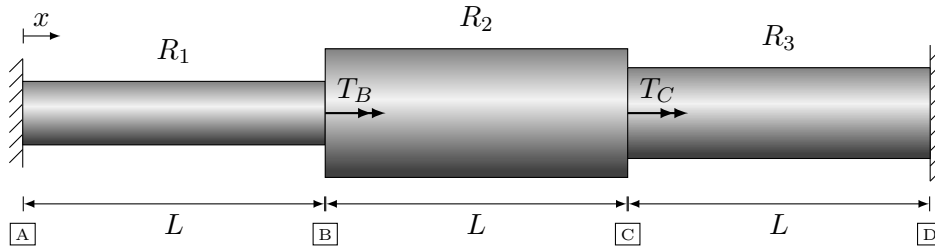


FIGURE 3 – Indeterminate system of torsion bars with two loads.

### English

A double sided clamped bar shown in figure 3 consists of three sections with circular cross-section, which are rigidly connected in series. A torque  $T_B$  with magnitude  $T$  acts at the point B and another torque  $T_C$  with magnitude  $\frac{11}{8}T$  acts on the point C. The diameters of the three bars are  $D_1 = \sqrt{2}d$ ,  $D_2 = 2\sqrt{2}d$  and  $D_3 = 2d$  respectively. All bars are isotropic and have a uniform known shear modulus  $G$ .

- Find the global stiffness matrix  $\mathbf{K}$  as a function of  $d$ ,  $G$  and  $L$  and the system equation  $\vec{T} = \mathbf{K} \cdot \vec{\varphi}$  with all known torques and twists. State all member stiffnesses clearly as function of  $d$ ,  $G$  and  $L$ .
- Solve for the unknown twists in the points B and C.
- Find the reaction torques at the walls A and D and sketch them consistently in your answer booklet.

### Français

Une barre encastrée à ses deux extrémités (figure 3) est constituée de trois parties de section circulaire, connectées en série de manière rigide. Un couple  $T_B$  de valeur  $T$  est appliqué au point B et un couple  $T_C$  de valeur  $\frac{11}{8}T$  est appliqué au point C. Les diamètres des trois barres sont  $D_1 = \sqrt{2}d$ ,  $D_2 = 2\sqrt{2}d$  et  $D_3 = 2d$  respectivement. Toutes les barres sont isotropiques et ont un module de cisaillement uniforme de valeur connue,  $G$ .

- Exprimer la matrice de rigidité globale  $\mathbf{K}$  en fonction de  $d$ ,  $G$  et  $L$  et le système d'équations  $\vec{T} = \mathbf{K} \cdot \vec{\varphi}$  en fonction de tous les couples et angles de torsion connus. Exprimer clairement les constantes de rigidité en fonction de  $d$ ,  $G$  et  $L$ .
- Déterminer les valeurs des angles de torsion aux points B et C.
- Déterminer les valeurs des couples de réaction aux niveau des parois A et D. Représentez les de manière cohérente sur votre livret de réponses.

5. (10 points)

### English

We consider a loaded beam with a cross-section in T-shape (fig. 4). The beam is characterized by the following values :  $E = 20 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $t_1 = 2 \text{ cm}$ ,  $t_2 = 1 \text{ cm}$ ,  $\omega_1 = 1 \text{ cm}$ ,  $\omega_2 = 4 \text{ cm}$ ,  $L = 21 \text{ cm}$  and  $F = 100 \text{ N}$ . We define  $z = 0$  at the top of the beam.

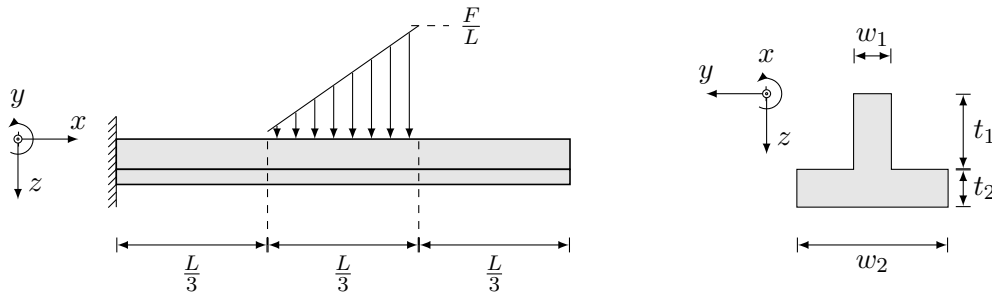


FIGURE 4 – Schematic of the loaded bar and its cross-section.

- We will want to find the internal bending moment of the beam  $M(x)$ . Which axis should you consider for the calculation of the second moment of area ?
- What is the distance  $z_c$  between the centroid and the top of the bar ? Calculate the second moment of area at the centroid.
- Determine the expression of  $q(x)$ . Deduce  $V(x)$  and  $M(x)$  by integration.

*Reminder : the formula for stress in a bent beam with a constant cross section is given by :  $\sigma_x(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot (z - z_c)$ , where  $z_c$  is the position of the centroid.*

- What is  $\sigma_x(x, z)$  as a function of  $F$  and the geometrical dimensions ?
- Give the numerical value of  $\sigma_x(0, 0)$ .

### Français

Nous considérons une poutre chargée avec une section en forme de T (fig. 4). La poutre est caractérisée par les valeurs suivantes :  $E = 20 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $t_1 = 2 \text{ cm}$ ,  $t_2 = 1 \text{ cm}$ ,  $\omega_1 = 1 \text{ cm}$ ,  $\omega_2 = 4 \text{ cm}$ ,  $L = 21 \text{ cm}$  and  $F = 100 \text{ N}$ . Nous définissons  $z = 0$  sur le dessus de la poutre.

- Nous allons vouloir trouver le moment de flexion interne de la poutre  $M(x)$ . Quelle axe devez-vous considérer pour le calcul du moment quadratique ?
- Quelle est la distance  $z_c$  entre le barycentre et le dessus de la barre ? Calculez le moment quadratique au barycentre.
- Exprimez  $q(x)$ . Déduisez  $V(x)$  et  $M(x)$  par intégration.

*Rappel : la formule pour la contrainte dans une barre pliée de section constante est donnée par :  $\sigma_x(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot (z - z_c)$ , où  $z_c$  est la position du barycentre.*

- (d) Que vaut  $\sigma_x(x, z)$  en fonction de F et des dimensions géométriques ?
- (e) Donnez la valeur numérique de  $\sigma_x(0, 0)$ .

