Série n°9

Exercice 1 :

1. Calculer puis classer les ordinaux suivants par ordre croissant.

$$3+\omega, \quad (\omega+3)\cdot 4, \quad \omega+3, \quad (\omega\cdot 3)\cdot(\omega\cdot 5), \quad (\omega+3)\cdot\omega, \quad \omega_1, \quad 10\cdot\omega\cdot 7\cdot 3\cdot\omega.$$

2. Calculer le cardinal des ensembles suivants, puis les classer par ordre croissant.

$\mathbb{N}$	$\{E \subseteq \mathbb{R}^2 \mid E$ est une relation d'équivalence$\}$
4	$\mathbb{R}^5$
$\{p \in \mathbb{N} \mid p$ est premier$\}$	$\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$
$\mathbb{Q}^\star$	$\mathbb{R} \times {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$

3. Calculer le cardinal des ensembles suivants, puis les classer par ordre croissant.

$$\aleph_\omega, \quad \bigcup_{n\in\omega} \underbrace{\aleph_2 \times \cdots \times \aleph_2}_{n \text{ fois}}, \quad \sup\{\omega_1 + \alpha \mid \alpha < \omega^{17}\}, \quad \aleph_2 \times \aleph_{17}, \quad \aleph_{\omega_1+2}.$$

Exercice 2 : Soient κ, λ et μ des cardinaux. Montrer que

$$(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu}.$$

Exercice 3 : On va montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \cong \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Définir un injection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Définir une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$.
3. Montrer que $\mathbb{R} \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
4. Définir une bijection entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.
5. Montrer que $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.