Série n°4

Exercice 1 : Soit $\mathcal{L}$ le langage égalitaire constitué d'un symbole de relation unaire P, et de deux symboles de relation binaire R et S. On appelle $\mathfrak{A}$ la $\mathcal{L}$-structure de domaine $\{0, 1, 2\}$ telle que $P^{\mathfrak{A}} := \{0\}$, $R^{\mathfrak{A}} := \{(1, 0), (2, 0), (2, 1)\}$ et $S^{\mathfrak{A}} := \{(0, 2)\}$.

1. On considère la $\mathcal{L}$-formule suivante :

$$\varphi \ : \ \forall x(Px \vee \exists y(Rxy \wedge Syx)).$$

   Construire l'arbre associé au jeu d'évaluation $\mathbb{E}v(\mathfrak{A}, \varphi)$. Déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante. Mettre en évidence une stratégie gagnante. Existe-t-il une feuille de l'arbre de jeu pour laquelle changer le gagnant entraîne une modification du possesseur de la stratégie gagnante ? Si oui, indiquer quelles sont ces feuilles.

2. En utilisant l'analyse effectuée au point précédent, déterminer si la formule

$$\psi \ : \ \neg\forall x(Px \vee \exists y(Rxy \wedge \neg\forall u\exists z(Ruz \wedge Szu)).$$

   est satisfaite dans la $\mathcal{L}$-structure $\mathfrak{A}$.

Exercice 2 : Soit $\mathcal{L} = \{R\}$ un langage égalitaire où R est un symbole de relation binaire. Dans chacun des cas ci-dessous, donner une théorie finie T telle que $\mathcal{M} \models T$ si et seulement si :

1. $R^{\mathcal{M}}$ est une relation d'équivalence.
2. $R^{\mathcal{M}}$ est une relation d'équivalence avec au moins deux classes d'équivalence distinctes.
3. $R^{\mathcal{M}}$ est une relation d'équivalence avec exactement deux classes d'équivalence distinctes.
4. $R^{\mathcal{M}}$ est une relation d'équivalence dont toutes les classes contiennent strictement plus qu'un élément.

Exercice 3 : Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, on dit que deux formules sur $\mathcal{L}$ sont équivalentes si elles sont vraies dans exactement les mêmes $\mathcal{L}$-structures.

Soit $\phi = \phi[x]$ une formule de $\mathcal{L}$, et soient φ et ψ des formules closes de $\mathcal{L}$. Montrer les équivalences entre les formules suivantes :

1. $\neg\exists x\phi \ \equiv \ \forall x\neg\phi$.
2. $\neg\forall x\phi \ \equiv \ \exists x\neg\phi$.
3. $\neg(\varphi \wedge \psi) \ \equiv \ (\neg\varphi \vee \neg\psi)$.
4. $\neg(\varphi \vee \psi) \ \equiv \ (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.

Les propriétés 3 et 4 s'appellent les lois de De Morgan.

Exercice 4 : Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, soit $\varphi = \varphi[x]$ une formule de $\mathcal{L}$, et soit ψ une formule close de $\mathcal{L}$. En vous aidant de l'exercice précédent, montrer les équivalences suivantes :

1. $(\forall x\varphi \to \psi) \ \equiv \ \exists x(\varphi \to \psi)$
2. $(\exists x\varphi \to \psi) \ \equiv \ \forall x(\varphi \to \psi)$
3. $(\psi \to \forall x\varphi) \ \equiv \ \forall x(\psi \to \varphi)$
4. $(\psi \to \exists x\varphi) \ \equiv \ \exists x(\psi \to \varphi)$