Série n°3

Exercice 1 : On considère un langage égalitaire dont la signature $\mathcal{L} = \{=\}$ consiste en le seul symbole d'égalité.

1. Écrire des formules φ_1, φ_2 et φ_3 telles que pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M} = \langle M \rangle$:
   a) $\mathcal{M} \models \varphi_1$ ssi M possède au moins deux éléments ;
   b) $\mathcal{M} \models \varphi_2$ ssi M possède au plus un élément ;
   c) $\mathcal{M} \models \varphi_3$ ssi M possède exactement deux éléments ;
2. Écrire une théorie T telle que pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M} = \langle M \rangle$

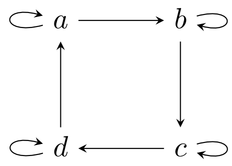
   $$\mathcal{M} \models T \quad \text{ssi} \quad M \text{ possède un nombre infini d'éléments.}$$

   Question à méditer : existe-t-il une théorie dont les modèles sont exactement les structures avec un nombre fini d'éléments ?
3. Est-ce que $\{\varphi_1\} \models \varphi_3$? Est-ce que $\{\neg\varphi_1\} \models \varphi_2$?
4. Pour quels i parmi $\{1, 2, 3\}$ avons-nous $T \models \varphi_i$?

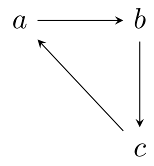
Exercice 2 : On considère le langage du premier ordre $\mathcal{L}$ comprenant comme unique symbole non logique un symbole de relation binaire R. Nous représentons une $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{M}$ comme un graphe orienté : le domaine est l'ensemble des sommets et l'interprétation de R est figurée par des flèches entre les sommets, i.e. $R^{\mathcal{M}}(a, b)$ ssi il y a une flèche $a \to b$.

1. Pour chacun des points suivants, donner une $\mathcal{L}$-structure ne satisfaisant qu'une seule des deux formules proposées :
   a) $\exists x \forall y R(x, y)$ et $\forall x \exists y R(x, y)$;
   b) $\exists x \forall y \neg R(y, x)$ et $\forall x \neg \forall y R(y, x)$;
2. Écrire des formules $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ de $\mathcal{L}$ de sorte que pour tous $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{M}_j \models \varphi_i$ si et seulement si $i = j$.

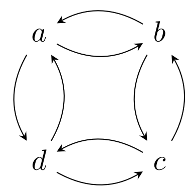
$\mathcal{M}_1$:



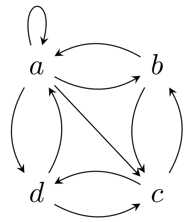
$\mathcal{M}_2$:



$\mathcal{M}_3$:



$\mathcal{M}_4$:



Exercice 3 : Le but de cet exercice est d'écrire une formule du premier ordre correspondant à la conjecture de Goldbach[1], à savoir :

> Tout nombre entier pair strictement supérieur à 2 peut être écrit comme la somme de deux nombres premiers.

On considère le langage égalitaire du premier ordre $\mathcal{L}$ comprenant deux symboles de constante $\underline{0}$ et $\underline{1}$, deux symboles de fonction binaire $\underline{+}$ et $\underline{\cdot}$. On note $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ la $\mathcal{L}$-structure des naturels avec l'interprétation usuelle des symboles.

1. Écrire une formule $\psi_<(x, y)$ de $\mathcal{L}$ de sorte que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{N}, m/x, n/y \models \psi_<(x, y) \text{ ssi } m < n,$$

   où $<$ dénote l'ordre strict usuel sur les entiers.

2. Écrire une formule $\psi_{\texttt{prime}}(x)$ de $\mathcal{L}$ de sorte que pour tous $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{N}, n/x \models \psi_{\texttt{prime}}(x) \text{ ssi } n \text{ est premier.}$$

3. Écrire une formule close $\varphi_{\text{Goldbach}}$ de $\mathcal{L}$ de sorte que

$$\mathcal{N} \models \varphi_{\text{Goldbach}} \text{ ssi la conjecture de Goldbach est vraie.}$$

1. En 1742, Christian Goldbach formule dans une correspondance à Leonhard Euler la conjecture suivante :« Tout nombre plus grand que 2 peut être écrit comme une somme de trois nombres premiers » (il admet ici 1 comme nombre premier). Dans sa réponse Euler fait remarquer que cette conjecture découle de la suivante : « tout nombre pair peut être écrit comme somme de deux nombres premiers ». Ces conjectures sont à ce jour encore ouvertes.

Exercice 4 :

1. On considère la notion de ε-δ-continuité pour une fonction des nombres réels vers les nombres réels en un point donné.
   a) Écrire une formule du premier ordre φ_{CP} correspondant à cette notion en précisant le langage du premier ordre $\mathcal{L}$ considéré.
   b) Donner une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ avec $|\mathcal{M}| = \mathbb{R}$ qui satisfait φ_{CP}.
   c) Donner une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ avec $|\mathcal{M}| = \mathbb{N}$ qui satisfait φ_{CP}.
2. On considère maintenant la notion de ε-δ-continuité pour une fonction des nombres réels vers les nombres réels sur son domaine.
   a) Écrire une formule du premier ordre φ_{C} correspondant à cette notion dans le langage du premier ordre $\mathcal{L}$ considéré précédemment.
   b) Donner une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ avec $|\mathcal{M}| = \mathbb{R}$ qui satisfait φ_{C}.
   c) Donner une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ avec $|\mathcal{M}| = \mathbb{N}$ qui satisfait φ_{C}.

Exercice 5 :

1. On considère un langage égalitaire $\mathcal{L}$ comportant deux symboles de fonction unaire f et g. Écrire des formules closes φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4 telles que pour toute $\mathcal{L}$-structure $\langle \mathcal{M}, f^{\mathcal{M}}, g^{\mathcal{M}} \rangle$
   a) $\mathcal{M} \models \varphi_1$ ssi $f^{\mathcal{M}} \circ f^{\mathcal{M}} = g^{\mathcal{M}}$ et $g^{\mathcal{M}}$ est une application constante ;
   b) $\mathcal{M} \models \varphi_2$ ssi $\mathrm{Im}(f^{\mathcal{M}}) \subseteq \mathrm{Im}(g^{\mathcal{M}})$;
   c) $\mathcal{M} \models \varphi_3$ ssi $f^{\mathcal{M}}$ possède un unique point fixe et celui-ci appartient à $\mathrm{Im}(g^{\mathcal{M}})$;
   d) $\mathcal{M} \models \varphi_4$ ssi $f^{\mathcal{M}}$ est injective et $g^{\mathcal{M}}$ est surjective.
2. On considère les formules suivantes du langage $\mathcal{L}$.

$$
\begin{aligned}
F_1 :& \quad \forall x\ fx \simeq gx; \\
F_2 :& \quad \forall x\ \forall y\ fx \simeq gy; \\
F_3 :& \quad \forall x\ \exists y\ fx \simeq gy; \\
F_4 :& \quad \exists x\ \forall y\ fx \simeq gy; \\
F_5 :& \quad \exists x\ \exists y\ fx \simeq gy.
\end{aligned}
$$

   Définir des $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}_i$ pour $i = 1, \ldots, 5$ satisfaisant
   a) $\mathcal{M}_1 \models F_1 \wedge \neg F_2$;
   b) $\mathcal{M}_2 \models \neg F_1 \wedge F_3$;

c) $\mathcal{M}_3 \models \neg F_1 \wedge F_4$;

d) $\mathcal{M}_4 \models \neg F_3 \wedge \neg F_4 \wedge F_5$;

e) $\mathcal{M}_5 \models \neg F_5$.

Exercice 6 : Soit $\mathcal{L}$ le langage du premier ordre constitué d'un symbole de relation unaire Ω, et de deux symboles de relation binaire I et R. On considère la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M} = \langle M, \Omega^{\mathcal{M}}, I^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}} \rangle$ définie par :

- $M = \mathcal{P}(\mathbb{N})$,
- $\Omega^{\mathcal{M}}(x)$ ssi x et x^c sont tous deux infinis,
- $I^{\mathcal{M}}(x, y)$ ssi $x \subseteq y$,
- $R^{\mathcal{M}}(x, y)$ ssi $x \subseteq y$ et $\mathrm{Card}(x) = \mathrm{Card}(y \backslash x)$.

Pour chacune des formules suivantes, indiquer si elle est satisfaite ou non dans la structure $\mathcal{M}$.

1. $\phi_1 = \forall x\ \neg R(x, x)$
2. $\phi_2 = \forall x\ (\Omega(x) \to \neg R(x, x))$
3. $\phi_3 = \forall x \forall y \forall z\ ((\Omega(x) \wedge \Omega(y) \wedge I(x, z) \wedge I(z, y)) \to \Omega(z))$
4. $\phi_4 = \forall x \forall y \forall z\ ((\Omega(x) \wedge \Omega(y) \wedge \Omega(z) \wedge R(x, y) \wedge R(y, z)) \to R(x, z))$
5. $\phi_5 = \forall x \forall y\ ((\Omega(x) \wedge \Omega(y)) \to (\neg R(x, y) \vee \neg R(y, x)))$
6. $\phi_6 = \forall x \forall y\ ((\Omega(x) \wedge R(x, y)) \to \Omega(y))$
7. $\phi_7 = \forall x \forall y\ ((\Omega(x) \wedge R(y, x)) \to \Omega(y))$
8. $\phi_8 = \forall x \exists y \exists z\ (R(y, x) \wedge R(x, z))$