

Série n°1

Exercice 1 : Définir des bijections qui témoignent des affirmations suivantes.

1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est équipotent à \mathbb{N} .
2. \mathbb{N} est équipotent à \mathbb{Z} .
3. \mathbb{N} est équipotent à \mathbb{Q} .

Exercice 2 : Soit A un ensemble. Nous notons $A^{<\omega} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$ l'ensemble de suites finies à valeurs dans A . Montrer que les ensembles suivants sont équipotents à \mathbb{N} :

1. $\{0, 1\}^{<\omega}$,
2. $\mathbb{N}^{<\omega}$,
3. $A^{<\omega}$, avec A un ensemble dénombrable non vide.

Indication: On pourra utiliser le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein.

Exercice 3 :

1. Montrer qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.¹
2. Utiliser ce fait pour donner une autre démonstration du fait que pour tout ensemble dénombrable non vide A , $A^{<\omega}$ est équipotent à \mathbb{N} .

Exercice 4 : Soient deux ensembles A et B disjoints, avec A infini (i.e. qu'il existe une injection de \mathbb{N} dans A) et B dénombrable. Montrer que A est équipotent à $A \cup B$, c'est à dire qu'il existe une bijection de A dans $A \cup B$.

Exercice 5 :

1. Soit E un ensemble quelconque et $G : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une application telle que pour tous $X, Y \subseteq E$, si $X \subseteq Y$, alors $G(X) \subseteq G(Y)$. Montrer qu'il existe $M \subseteq E$ tel que $G(M) = M$.

Indication: Prendre $M = \bigcup_{X \subseteq G(X)} X$.

2. Prouver le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein sur la base du résultat précédent, à savoir : Soient A et B deux ensembles. S'il existe $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$ deux injections, alors il existe une bijection entre A et B .

Indication: Considérer l'application $G : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ définie par

$$G(X) = A \setminus g(B \setminus f(X)) \quad \text{pour tout } X \subseteq A.$$

1. On pourra utiliser ici l'axiome du choix dénombrable : Étant donnée une famille dénombrable d'ensembles non vides, il existe une fonction qui à chacun d'entre eux associe un de ses éléments.