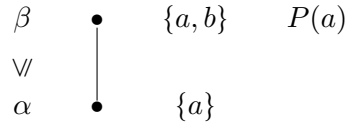


Série n°13

Exercice 1 : Nous considérons le langage du premier ordre dont le seul symbole non logique est un symbole de relation unaire P .

1. Considérons le modèle de Kripke de la logique intuitionniste suivant.

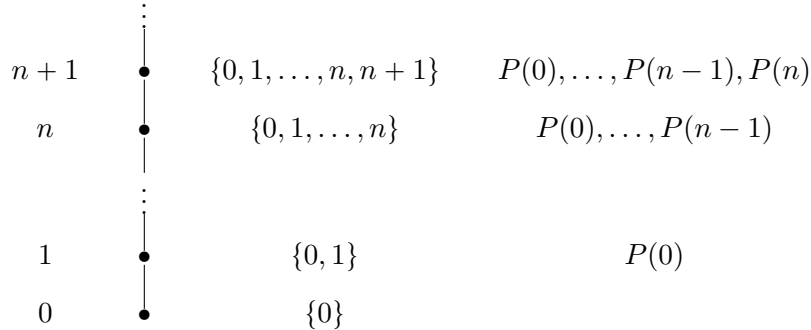


Pour chacune des assertions suivantes dire si elle est vérifiée au sujet du modèle \mathcal{K} décrit ci-dessus.

- | | |
|--|--|
| a) $\alpha \Vdash \forall x P(x)$; | e) $\alpha \Vdash \neg P(a)$; |
| b) $\alpha \Vdash \neg \forall x P(x)$; | f) $\alpha \Vdash \exists x \neg P(x)$; |
| c) $\beta \Vdash \neg P(b)$; | g) $\beta \Vdash \forall x P(x)$; |
| d) $\beta \Vdash \exists x \neg P(x)$; | h) $\alpha \Vdash (\neg \forall x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x))$; |

Est-ce que $\mathcal{K} \models_i (\neg \forall x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x))$?

2. Nous considérons le modèle de Kripke de la logique intuitionniste $\mathcal{K} = \langle \mathbb{N}, \leq, \mathcal{D}_n = \{0, \dots, n\}, \Vdash = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(n, P(k)) : k < n\} \rangle$ que l'on peut représenter comme suit.



Pour chacune des assertions suivantes dire si elle est vérifiée au sujet du modèle \mathcal{K} décrit ci-dessus.

- | | |
|--|---|
| a) $\mathcal{K} \models_i \exists x P(x)$; | d) $\mathcal{K} \models_i \exists x \neg(P(x) \vee \neg P(x))$; |
| b) $\mathcal{K} \models_i \neg \exists x P(x)$; | |
| c) $\mathcal{K} \models_i \exists x \neg P(x)$; | e) $\mathcal{K} \models_i \neg \forall x (P(x) \vee \neg P(x))$. |

Finalement, est-ce que $\neg \forall x (P(x) \vee \neg P(x)) \vdash_i \exists x \neg(P(x) \vee \neg P(x))$?

Exercice 2 :

On désigne par $\mathcal{F}(LM)$, $\mathcal{F}(LI)$ et $\mathcal{F}(LC)$ l'ensemble des formules prouvables sans hypothèses en logique minimale, intuitionniste, et classique respectivement. On montre les inclusions strictes suivantes :

$$\mathcal{F}(LM) \subsetneq \mathcal{F}(LI) \subsetneq \mathcal{F}(LC)$$

Les inclusions non strictes $\mathcal{F}(LM) \subseteq \mathcal{F}(LI) \subseteq \mathcal{F}(LC)$ découlent de la définition de séquent déductible et du fait que les règles de démonstration en logique minimale sont une restriction des règles de démonstration en logique intuitionniste qui sont elles-mêmes une restriction des règles de démonstration de la logique classique.

1. Montrer que le séquent suivant est prouvable en logique intuitionniste et n'est pas prouvable en logique minimale.

$$\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi$$

2. Donner une preuve des séquents suivants en logique classique, et montrer qu'ils ne sont pas prouvables en logique intuitionniste :

- a) $\vdash \forall x(\neg\neg P(x) \rightarrow P(x))$
- b) $\vdash \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\neg P(x) \vee Q(x)))$
- c) $\vdash \forall x\neg\neg P(x) \rightarrow \neg\neg\forall xP(x)$

Exercice 3 :

À chaque séquent S du système de déduction naturelle on associe un séquent S' du système de calcul des séquents, via : Si S est de la forme $\Gamma \vdash \varphi$, alors S' n'est autre que S , et si S est de la forme $\Gamma \vdash \perp$, alors S' est $\Gamma \vdash \perp$.

Réciproquement, à chaque séquent T du système de calcul des séquents, on associe un séquent \bar{T} du système de déduction naturelle, via : Si T est de la forme $\Gamma \vdash \Delta$ avec $\Delta = \{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ (non vide), alors \bar{T} est $\Gamma \vdash \bigvee_{i=0}^n \varphi_i$, et si T est de la forme $\Gamma \vdash \perp$, alors \bar{T} est $\Gamma \vdash \perp$.

Ces associations sont naturelles au vu de l'interprétation des séquents dans chacun des deux systèmes, elles sont réellement la traduction d'un système dans l'autre.

Dire que le système de déduction naturelle et le système de calcul des séquents sont (sémantiquement) équivalents signifie que d'une part, si un séquent S est dérivable en déduction naturelle, alors S' est dérivable en calcul des séquents, et d'autre part si T est dérivable en calcul des séquents, alors \bar{T} est dérivable en déduction naturelle.

La preuve se fait par induction sur hauteur des arbres de dérivation. Cela revient à montrer d'une part que si

$$\frac{S_0 \quad S_1}{S_2} \quad (\text{déduction naturelle})$$

est une règle de la déduction naturelle, et que par hypothèse d'induction S'_0 et S'_1 sont dérivables en calcul des séquents, alors S'_2 est dérivable en calcul des séquents :

$$\frac{\frac{\vdots}{S'_0} \quad \frac{\vdots}{S'_1}}{\vdots}{S'_2} \quad (\text{calcul des séquents})$$

D'autre part, il faut montrer la réciproque : « toute règle du calcul des séquents est dérivable en déduction naturelle ».

Pour des questions de temps, nous n'allons traiter que quelques cas :

1. Dans un sens, montrer que les règles d'absurdité intuitionniste et classique suivantes sont dérivables en calcul des séquents.

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi} \perp_e \quad \frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi} \perp_c$$

2. Dans l'autre sens, montrer que la règle de coupure (sous la forme suivante) est dérivable en déduction naturelle.¹

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \psi \quad \Gamma', \varphi \vdash \psi'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \psi, \psi'} \text{cut}$$

1. On convient qu'au séquent $\Gamma \vdash \varphi, \varphi'$ du calcul des séquents correspond le séquent $\Gamma \vdash \varphi \vee \varphi'$ de la déduction naturelle.