

## Série n°12

**Exercice 1 :** Donnez une preuve en calcul des séquents des séquents suivants.

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$                                  | 4. $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ |
| 2. $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$            | 5. $\vdash \neg\neg(\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi)$                     |
| 3. $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi$ |   |

Parmi ces preuves, déterminez lesquelles sont faites en logique classique, en logique intuitionniste et en logique minimale.

**Exercice 2 :**

Soit  $\mathcal{L} = \{R, f\}$  un langage égalitaire du premier ordre avec  $R$  un symbole de relation binaire, et  $f$  un symbole de fonction.

1. Dans chacun des cas suivants, donner une formule close  $\varphi_i$  telle que pour toute  $\mathcal{L}$ -structure  $\mathcal{M} = \langle M, R^{\mathcal{M}}, f^{\mathcal{M}} \rangle$  :
  - a)  $\mathcal{M} \models \varphi_1$  ssi  $R^{\mathcal{M}}$  est transitive.
  - b)  $\mathcal{M} \models \varphi_2$  ssi  $R^{\mathcal{M}}$  est irréflexive.
  - c)  $\mathcal{M} \models \varphi_3$  ssi  $M$  admet un élément  $R^{\mathcal{M}}$ -minimal<sup>1</sup>.
  - d)  $\mathcal{M} \models \varphi_4$  ssi  $R^{\mathcal{M}}$  est asymétrique.<sup>2</sup>
  - e)  $\mathcal{M} \models \varphi_5$  ssi  $f^{\mathcal{M}}$  est la fonction identité sur  $M$ .
  - f)  $\mathcal{M} \models \varphi_6$  ssi le graphe de  $f^{\mathcal{M}}$  est contenu dans  $R^{\mathcal{M}}$ .
  - g)  $\mathcal{M} \models \varphi_7$  ssi  $R^{\mathcal{M}}$  est réflexive.
2. Lesquelles des assertions suivantes sont vérifiées? Justifier.
  - a)  $\{\varphi_1, \varphi_2\} \vdash_c \varphi_4$ .
  - b)  $\{\varphi_1, \varphi_2\} \vdash_c \varphi_3$ .
  - c)  $\{\varphi_5, \varphi_6\} \vdash_c \varphi_7$ .
  - d)  $\{\varphi_5, \varphi_6, \varphi_2\} \vdash_c \varphi_3$ .

1. C'est à dire un élément qui n'admet pas de minorant pour  $R$ .

2. Une relation par  $R$  est dite *asymétrique* sur un ensemble  $E$  s'il n'existe pas deux points de  $E$  en relation réciproque par  $R$ .

**Exercice 3 :**

Montrer que les séquents suivants ne sont pas prouvables en logique classique :

1.  $\vdash \forall x(P(x) \rightarrow \forall yP(y))$
2.  $\vdash \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists yP(y) \rightarrow \forall zQ(z))$
3.  $\vdash \exists y\forall x((P(x, y) \rightarrow \neg P(x, x)) \wedge (\neg P(x, x) \rightarrow P(x, y)))$
4.  $\vdash \forall x\exists yP(x, y) \rightarrow \exists yP(y, y)$
5.  $\vdash \forall x(\neg x \simeq c \rightarrow \exists y x \simeq s(y))$

*Indication: Utiliser le théorème de complétude.*