

## Série n°11

### Exercice 1 :

Donner une démonstration en déduction naturelle des séquents suivants.

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ | 4. $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$           |
| 2. $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$        | 5. $\varphi, \psi \vdash \neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi$ |
| 3. $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$      |   |

### Exercice 2 :

Donner une démonstration en déduction naturelle des séquents suivants.

1.  $\vdash \forall x_1 \forall x_2 (x_1 = x_2 \rightarrow x_2 = x_1)$  (symétrie de l'égalité)
2.  $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3) \rightarrow x_1 = x_3)$  (transitivité de l'égalité)

**Exercice 3 :** Dans cet exercice, on travaille en déduction naturelle. On montre que certains systèmes de déduction sont équivalents.

Considérons les ensembles de règles suivants :

- a)  $\mathcal{R}_{cl.} = \{\text{Règles et axiomes de la logique classique}\};$
- b)  $\mathcal{R}_{int.} = \{\text{Règles et axiomes de la logique intuitionniste}\};$
- c)  $\mathcal{R}_{int.+t.e.} = \mathcal{R}_{int.} \cup \left\{ \frac{}{\vdash (\varphi \vee \neg\varphi)} \text{ ax} \right\};$
- d)  $\mathcal{R}_{int.+l.P.} = \mathcal{R}_{int.} \cup \left\{ \frac{}{(\neg\varphi \rightarrow \varphi) \vdash \varphi} \text{ ax} \right\}.$

Ainsi, les points c) et d) correspondent à l'ajout d'un axiome à la logique intuitionniste. En c), cet axiome est le tiers exclu, en d), il s'agit de la loi de Pierce. A chaque ensemble de règles  $\mathcal{R}$ , on associe l'ensemble des séquents qu'il peut prouver  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$  :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \left\{ \Gamma \vdash \varphi \mid \begin{array}{l} \text{il existe une preuve en déduction naturelle du séquent } \Gamma \vdash \varphi \\ \text{n'utilisant que les règles et axiomes de } \mathcal{R} \end{array} \right\}.$$

Le but de l'exercice est de prouver :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}_{int.+t.e.}} = \mathcal{P}_{\mathcal{R}_{int.+l.P.}} = \mathcal{P}_{\mathcal{R}_{cl.}}$$

1. Prouver que  $\vdash (\varphi \vee \neg\varphi) \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}_{int.+l.P.}}$
2. Prouver que  $(\neg\varphi \rightarrow \varphi) \vdash \varphi \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}_{int.+t.e.}}$

3. Prouver que  $(\neg\varphi \rightarrow \varphi) \vdash \varphi \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}_{cl}}$ .
4. Prouver que la règle de l'absurde classique peut être obtenue avec  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_{int.+I.P.}}$ .
5. Conclure.