

Série n° 10

Exercice 1 :

Soit $\mathcal{L} = \{c_0, c_1, \oplus, \otimes, R\}$ un langage égalitaire du premier ordre, avec c_0 et c_1 deux symboles de constante, \oplus et \otimes des symboles de fonction binaire, et R un symbole de relation binaire. Soit $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle$ la \mathcal{L} -structure où \mathbb{N} sont les entiers naturels et $+$, \cdot et $<$ sont l'addition, la multiplication et l'ordre strict usuels sur \mathbb{N} . On note T_{arith} la \mathcal{L} -théorie de \mathcal{N} .

1. Montrer qu'il existe un modèle dénombrable \mathcal{M} de T_{arith} tel qu'il existe $a \in |\mathcal{M}|$ satisfaisant pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{M} \models R(\underline{n}, a)$ où $\underline{0} = c_0$ et $\underline{n} = \underbrace{c_1 \oplus c_1 \oplus \cdots \oplus c_1}_{n \text{ fois}}$ sinon.
2. Pour un modèle \mathcal{M} satisfaisant le point précédent, montrer que \mathcal{N} n'est pas isomorphe à \mathcal{M} . Montrer aussi que l'ensemble $|\mathcal{M}| \setminus \{\underline{n}^{\mathcal{M}} \mid n \in \mathbb{N}\}$ muni de la restriction de l'ordre $R^{\mathcal{M}}$ n'admet pas de plus petit élément.
3. Soit $\langle E, < \rangle$ un ensemble totalement ordonné dénombrable quelconque. Montrer qu'il existe une \mathcal{L} -structure dénombrable \mathcal{M} telle que $\mathcal{M} \models T_{\text{arith}}$ et $\langle E, < \rangle$ se plonge dans $\langle |\mathcal{M}|, R^{\mathcal{M}} \rangle$, c'est-à-dire qu'il existe une injection $f : E \rightarrow M$ telle que $x < y$ ssi $f(x)R^{\mathcal{M}}f(y)$.
4. Soit $\langle E, < \rangle$ un ensemble totalement ordonné de cardinalité quelconque κ . Existe-t-il un modèle \mathcal{M} de T_{arith} tel qu'il existe un plongement de $\langle E, < \rangle$ dans $\langle |\mathcal{M}|, R^{<\mathcal{M}} \rangle$? Quelle est la cardinalité minimale pour un tel modèle?

Exercice 2 :

1. Montrer le théorème suivant, appelé *critère de Vaught*.

Théorème. *Soit T une théorie non contradictoire du premier ordre sur un langage \mathcal{L} dénombrable, et telle que T ne possède pas de modèle fini. Si tous les modèles dénombrables de T sont élémentairement équivalents, alors T est complète.*

Indication: Utiliser le théorème de Löwenheim-Skolem.

2. En déduire le corollaire suivant :

Corollaire. *Soit T une théorie non contradictoire du premier ordre sur un langage dénombrable, et telle que T ne possède pas de modèle fini. Si tous les modèles dénombrables de T sont isomorphes, alors T est complète.*

3. Comme application, montrer que la théorie des ordres denses sans premier ni dernier élément est complète en utilisant le résultat du Devoir n°2, à savoir :

Proposition. *Tous les ordres denses dénombrables sans premier ni dernier élément sont isomorphes.*

Exercice 3 : Soit \mathcal{L}_0 le langage du premier ordre de l'arithmétique $\{0, \underline{S}, \underline{+}, \underline{\times}\}$. Pour le modèle standard $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, S, +, \times \rangle$ nous posons $T_{\text{arithm}} = \text{Th}(\mathcal{N})$ la théorie de \mathcal{N} .

En utilisant le théorème de compacité ainsi que le théorème de Löwenheim-Skolem descendant, nous allons montrer qu'il existe exactement 2^{\aleph_0} modèles dénombrables de T_{arithm} deux-à-deux non isomorphes.

Nous notons κ la cardinalité de l'ensemble des classes d'isomorphisme de modèles dénombrables de T_{arithm} . Nous allons montrer que $\kappa = 2^{\aleph_0}$.

1. Montrer que $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$.

Soit \mathbb{P} l'ensemble des nombres premiers. Notons $x|y$ la formule de \mathcal{L}_0 donnée par $\exists z(x \times z = y)$. Pour tout modèle dénombrable \mathfrak{M} de T_{arithm} et tout élément $a \in |\mathfrak{M}|$ notons $\text{Div}_{\mathfrak{M}}(a)$ l'ensemble des nombres premiers qui divisent a dans \mathfrak{M} , formellement

$$\text{Div}_{\mathfrak{M}}(a) = \{p \in \mathbb{P} \mid \mathfrak{M} \models p|a\}$$

où \underline{p} désigne $\overbrace{\underline{S} \cdots \underline{S}}^{p \text{ fois}}(0)$. Nous posons ensuite

$$D = \left\{ P \subseteq \mathbb{P} \mid \begin{array}{l} \text{il existe un modèle dénombrable } \mathfrak{M} \text{ de } T_{\text{arithm}} \\ \text{et il existe } a \in |\mathfrak{M}| \text{ tel que } P = \text{Div}_{\mathfrak{M}}(a) \end{array} \right\}.$$

2. Montrer que $D = \mathcal{P}(\mathbb{P})$.
 3. Montrer que $|D| \leq \kappa \cdot \aleph_0$.
 4. Conclure.