

Examen Blanc

Une feuille A4 recto-verso de notes est autorisée.
Les points ne sont donnés que comme indication
de longueur et/ou de difficulté de chaque exercice.
Sauf indication contraire, toute réponse doit être justifiée.

Nom de famille :

Prénom :

Numéro SCIPER :

Points obtenus :

Note finale :

Problème 1 : (14 points)

On considère le langage **égalitaire** du premier ordre \mathcal{L} comprenant comme symboles non logiques le symbole d'égalité $=$ et un symbole de relation binaire R . Nous représentons les \mathcal{L} -structures comme des graphes orientés: le domaine est l'ensemble des sommets et l'interprétation de R est représentée par les flèches entre sommets, i.e. $R^{\mathcal{M}}(a,b)$ ssi il y a une flèche $a \rightarrow b$.

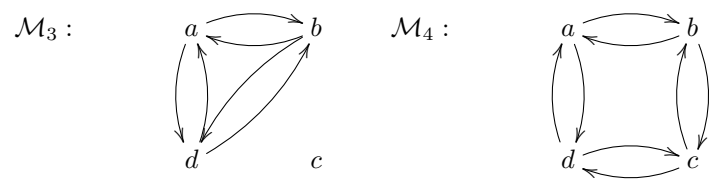
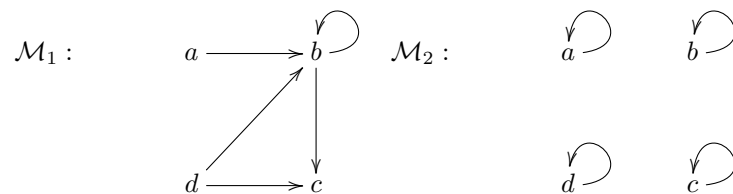
6 pt

Question 1.1 : Montrer dans chacun des trois cas suivants que les deux formules proposées ne sont pas sémantiquement équivalentes:

1. $\exists x \forall y \neg R(y,x)$ et $\forall x \neg \forall y R(y,x)$;
2. $(\forall x \exists y R(x,y) \leftrightarrow \forall x \exists y R(y,x))$ et $\forall x (\exists y R(x,y) \leftrightarrow \exists y R(y,x))$;
3. $\exists x \forall y R(x,y)$ et $\forall x \exists y R(x,y)$;

8 pt

Question 1.2 : Écrire des formules $\varphi_1, \dots, \varphi_4$ de \mathcal{L} de sorte que pour tous $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{M}_j \models \varphi_i$ si et seulement si $i = j$.



/14 points

Problème 2 : (11 points)

On considère un langage égalitaire \mathcal{L} comportant deux symboles de fonction unaire f et g .

3 pt

Question 2.1 : Écrire des formules closes φ_1 , φ_2 et φ_3 telles que pour toute \mathcal{L} -structure $\langle \mathcal{M}, f^{\mathcal{M}}, g^{\mathcal{M}} \rangle$

1. $\mathcal{M} \models \varphi_1$ ssi $f^{\mathcal{M}} \circ f^{\mathcal{M}} = g^{\mathcal{M}}$ et $g^{\mathcal{M}}$ est une application constante;
2. $\mathcal{M} \models \varphi_2$ ssi $\text{Im}(f^{\mathcal{M}}) \subseteq \text{Im}(g^{\mathcal{M}})$;
3. $\mathcal{M} \models \varphi_3$ ssi $f^{\mathcal{M}}$ est injective et $g^{\mathcal{M}}$ est surjective.

Considérons également la formule

$$\varphi_4 : \exists x(\exists y g(y) = x \wedge f(x) = x)$$

4 pt

Question 2.2 : Est-ce que $\varphi_2 \vdash_c \varphi_4$?

4 pt

Question 2.3 : Est-ce que $\varphi_1 \vdash_c \varphi_2$?

/11 points

Problème 3 : (12 points)

2 pt

Question 3.1 : Définir un bon ordre \sqsubset sur \mathbb{N} de sorte que (\mathbb{N}, \sqsubset) soit isomorphe à l'ordinal $\omega \cdot 2$.

2 pt

Question 3.2 : Quels sont les ordinaux α vérifiant l'équation $\alpha = \alpha + 1$?

2 pt

Question 3.3 : Quels sont les ordinaux α vérifiant l'équation $\alpha = 1 + \alpha$? Justifier.

2 pt

Question 3.4 : Donner trois ordinaux α, β et γ vérifiant $(\alpha + \beta) \cdot \gamma \neq \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$.

4 pt

Question 3.5 : Classer les ordinaux suivants par ordre croissant.

ω^{ω_1} , $(\omega+3) \cdot 3$, $\omega+1$, $(\omega \cdot 3) \cdot (\omega \cdot 5)$, $1+\omega$, $2 \cdot (\omega+3)$, ω_1^ω , $10 \cdot (\omega \cdot (7 \cdot (3 \cdot \omega)))$.

/12 points

Problème 4 : (12 points)

4 pt

Question 4.1 : Classer par cardinalité croissante les ensembles suivants.¹

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n$, \mathbb{R} , $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est une application affine}\}$, \mathbb{Q} , $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, $\{0,1,2,\dots,10^5\}$.

4 pt

Question 4.2 : On note respectivement \oplus et \odot l'addition et la multiplication cardinale pour les distinguer des opérations ordinales $+$ et \cdot . Classer par ordre croissant les expressions cardinales suivantes.

$\aleph_3 \odot \aleph_2$, $\text{Card}(\omega \cdot \omega + 1)$, \aleph_{ω^ω} , $\text{Card}(\sup\{\omega_2 + \alpha \mid \alpha < \omega^3\})$, $\aleph_2 \oplus \aleph_4$, $\aleph_\omega \odot \aleph_{\omega^2}$.

4 pt

Question 4.3 : Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{Z})$ des ensembles finis d'entiers relatifs est équipotent à l'ensemble des entiers \mathbb{N} .

/12 points

¹On rappelle qu'une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *affine* s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Problème 5 : (36 points)

Soit $\mathcal{L} = \{=\}$ le langage du premier ordre ne comportant que le symbole d'égalité. Dans cet exercice, on ne considère que des \mathcal{L} -structures et des \mathcal{L} -théories.

1 pt

Question 5.1 : Quelles sont les \mathcal{L} -structures qui sont isomorphes à la \mathcal{L} -structure \mathcal{M} dont le domaine contient pour seuls éléments les trois éléments distincts a, b et c ?

2 pt

Question 5.2 : Écrire une formule F qui axiomatise la classe des \mathcal{L} -structures dont le domaine est de cardinalité n où $n = 1, 2$ ou 7 .

3 pt

Question 5.3 : Écrire une formule G dont les modèles **finis** sont exactement les \mathcal{L} -structures dont le domaine est de cardinalité n avec $n \neq 1, 2, 7$.

3 pt

Question 5.4 : Donner une théorie T_{Pairs} dont les modèles **finis** sont exactement les \mathcal{L} -structures de cardinalité paire.

3 pt

Question 5.5 : La théorie T_{Pairs} est-elle complète?

2 pt

Question 5.6 : Donner une théorie T_{Inf} dont les modèles sont exactement les \mathcal{L} -structures dont le domaine est infini.

5 pt

Question 5.7 : Existe-t-il une formule Φ_{Inf} dont les modèles sont exactement

les \mathcal{L} -structures dont le domaine est infini?

Hint: On pourra raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de complétude.

On considère maintenant une théorie quelconque T sur le langage \mathcal{L} dont les modèles **finis** sont exactement les structures de cardinalité paire.

3 pt

Question 5.8 : Montrer que la théorie $T \cup T_{\text{Inf}}$ est consistante.

Hint: Utiliser le théorème de compacité.

3 pt

Question 5.9 : Quelles sont les cardinalités des domaines des modèles de la théorie $T \cup T_{\text{Inf}}$?

Hint: Utiliser le théorème de Löwenheim-Skolem.

4 pt

Question 5.10 : Montrer que toute \mathcal{L} -structure infinie est modèle de $T \cup T_{\text{Inf}}$. En déduire que toute \mathcal{L} -structure infinie est modèle de T .

Hint: On pourra utiliser à profit les notions de \mathcal{L} -structures isomorphes et de \mathcal{L} -structures élémentairement équivalentes.

2 pt

Question 5.11 : Dédurre de ce qui précède que T et T_{Pairs} ont exactement les mêmes modèles.

5 pt

Question 5.12 : Existe-t-il une formule H dont les modèles **finis** sont exactement les structures de cardinalité paire?

Hint: On pourra utiliser les points précédents, le théorème de complétude et/ou le théorème de compacité.

/36 points

Problème 6 : (16 points)

Nous rappelons qu'un *ordre total* est un couple $\langle E, < \rangle$ où E est un ensemble et $<$ est une relation binaire sur E telle que pour tous x, y, z appartenant à E :

1. $(x < y \wedge y < z) \rightarrow (x < z)$;
2. $\neg(x < x)$;
3. $x \neq y \rightarrow (x < y \vee y < x)$.

Un bon ordre est un ordre total $\langle E, < \rangle$ tel que pour tout sous-ensemble non vide S de E il existe un élément $m \in S$ qui est $<$ -minimal, i.e. pour tout $s \in S$ on a $s \not< m$.

2 pt

Question 6.1 : Montrer que si $\langle E, < \rangle$ est un bon ordre alors il n'existe pas de *chaîne infinie descendante*, i.e. une suite $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans E avec $e_0 > e_1 > e_2 > \dots$

4 pt

Question 6.2 : Soit $\langle E, < \rangle$ un ordre total. Montrer en utilisant explicitement l'axiome du choix, ou l'une des ses formes équivalentes, que s'il n'existe pas de chaîne infinie descendante, alors $\langle E, < \rangle$ est un bon ordre.

10 pt

Question 6.3 : Soit \mathcal{L} un langage égalitaire du premier ordre contenant le symbole de relation binaire $<$. La classe des bons ordres, i.e. des \mathcal{L} -structures $\mathcal{M} = \langle M, <, \dots \rangle$ telle que $\langle M, < \rangle$ est un bon ordre, est-elle axiomatisable? Est-elle finiment axiomatisable?

Hint: Utiliser le théorème de compacité.

/16 points

Problème 7 : (24 points)

Soit φ une formule close et soient $\psi(x)$ et $\theta(x)$ deux formules dont x est la seule variable libre. Déterminer si les séquents suivants sont prouvables en logique classique, intuitionniste, ou minimale.

6 pt

Question 7.1 : $\vdash \neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$.

6 pt

Question 7.2 : $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$.

6 pt

Question 7.3 : $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$.

6 pt

Question 7.4 : $(\exists x\psi(x) \rightarrow \forall x\theta(x)) \vdash \forall x(\psi(x) \rightarrow \theta(x))$.

/24 points

Problème 8 : (15 points)

Soit $\mathcal{L} = \{R\}$ un langage **égalitaire** du premier ordre avec un symbole de relation binaire R , et soit $\mathcal{G} = \langle G, R^{\mathcal{G}} \rangle$ une \mathcal{L} -structure. On dit que \mathcal{G} est un *graphe (non dirigé)* si $R^{\mathcal{G}}$ est symétrique et irréflexive. On dit de plus que ce graphe est *connexe* si pour tous $a, b \in \mathcal{G}$ il existe une "chaîne" reliant a à b , c'est à dire s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et des sommets s_0, \dots, s_n tels que :

- $s_0 = a, s_n = b$, et
- pour tout $i < n$, on a $(s_i, s_{i+1}) \in R^{\mathcal{G}}$.

2 pt

Question 8.1 : Donner une axiomatique des graphes non dirigés dans le langage \mathcal{L} .

2 pt

Question 8.2 : Montrer que la structure $\mathcal{Z} := \langle \mathbb{Z}, R^{\mathcal{Z}} \rangle$, où \mathbb{Z} est l'ensemble des entiers relatifs et $R^{\mathcal{Z}} := \{(a, b) : |a - b| = 1\}$, est un graphe connexe.

6 pt

Question 8.3 : Utiliser un argument de compacité pour montrer qu'il existe un graphe dénombrable non connexe élémentairement équivalent à \mathcal{Z} .

5 pt

Question 8.4 : La classe des graphes connexes est-elle axiomatisable? La classe des graphes non connexes est-elle axiomatisable?

/15 points