Solutions de la série n°9

Solution de l'exercice 1 :

1. Nous avons :

$$\begin{aligned}
&3 + \omega = \omega \\
&< \omega + 3 \\
&< (\omega + 3) \cdot 4 = \omega \cdot 4 + 3 \\
&< (\omega + 3) \cdot \omega = 10 \cdot \omega \cdot 7 \cdot 3 \cdot \omega = \omega^2 \\
&< (\omega \cdot 3) \cdot (\omega \cdot 5) = \omega \cdot (3 \cdot \omega) \cdot 5 = \omega^2 \cdot 5 \\
&< \omega_1.
\end{aligned}$$

2. Nous avons $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ est premier}\}) = \mathrm{Card}(\mathbb{Q}^*) = \aleph_0$. De plus $\mathrm{Card}(\mathbb{R}^5) = \mathrm{Card}(\mathbb{R}) = \mathrm{Card}(\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$.
Nous avons pour $\mathcal{E} = \{E \subseteq \mathbb{R}^2 \mid E \text{ est une relation d'equivalence}\}$ que $\mathrm{Card}(\mathcal{E}) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) = 2^{2^{\aleph_0}}$. En effet, d'une part nous avons que $\mathrm{Card}(\mathcal{E}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) = 2^{2^{\aleph_0}}$. D'autre part, nous avons $j : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}$ envoyant $P \mapsto E_P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in P \wedge y \in P\}$ qui est une injection.
Nous avons aussi $\mathrm{Card}({}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) = 2^{2^{\aleph_0}}$. En effet en voyant une fonction comme son graphe nous avons $\mathrm{Card}({}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)) = 2^{2^{\aleph_0}}$. Par ailleurs nous avons l'injection $i : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ qui envoie chaque sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur sa fonction caractéristique. On conclut donc que $\mathrm{Card}(\mathbb{R} \times {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}) = 2^{2^{\aleph_0}}$.

   Au final, on obtient :

$$\begin{aligned}
&4 \\
&< \mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ est premier}\}) = \mathrm{Card}(\mathbb{Q}^*) = \aleph_0 \\
&< \mathrm{Card}(\mathbb{R}^5) = \mathrm{Card}(\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) = 2^{\aleph_0} \\
&< \{E \subseteq \mathbb{R}^2 \mid E \text{ est une relation d'equivalence}\} = \mathrm{Card}(\mathbb{R} \times {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}) = 2^{2^{\aleph_0}}.
\end{aligned}$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Card}(\sup\{\omega_1 + \alpha \mid \alpha < \omega^{17}\}) = \mathrm{Card}(\omega_1 + \omega^{17}) = \aleph_1 \\
<\ &\mathrm{Card}(\bigcup_{n\in\omega} \underbrace{\aleph_2 \times \cdots \times \aleph_2}_{n \text{ fois}}) = \aleph_2 \\
<\ &\mathrm{Card}(\aleph_2 \times \aleph_{17}) = \aleph_{17} \\
<\ &\aleph_\omega \\
<\ &\aleph_{\omega_1+2}.
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2 : Soient κ, λ et μ des cardinaux. On a par définition $(\kappa^\lambda)^\mu = \mathrm{Card}\left({}^{\mu}({}^{\lambda}\kappa)\right)$ et $\kappa^{\lambda\cdot\mu} = \mathrm{Card}\left({}^{\lambda\times\mu}\kappa\right)$.
Considérons la fonction :

$$\begin{aligned}
f :\ {}^{\mu}({}^{\lambda}\kappa) &\to {}^{\lambda\times\mu}\kappa \\
g &\mapsto f(g),
\end{aligned}$$

où $f(g)$ est la fonction définie par :

$$\begin{aligned}
f(g) : \lambda \times \mu &\to \kappa \\
(x, y) &\mapsto g(y)(x).
\end{aligned}$$

Il est clair que f est bien définie. On montre encore que f est bijective.

Supposons que $f(g) = f(h)$ avec $g, h \in {}^{\mu}({}^{\lambda}\kappa)$. Cela signifie que pour tout $(x, y) \in \lambda \times \mu$, on a $f(g)(x, y) = f(h)(x, y)$, et donc $g(y)(x) = h(y)(x)$. Cela implique $g(y) = h(y)$, et similairement on obtient $g = h$, ce qui prouve que f est injective.

Soit $h \in {}^{\lambda\times\mu}\kappa$, et définissons :

$$\begin{aligned}
g : \mu &\to {}^{\lambda}\kappa \\
y &\mapsto h(\cdot, y).
\end{aligned}$$

Alors, $f(g)(x, y) = g(y)(x) = h(x, y)$, et donc f est surjective.

Solution de l'exercice 3 :

1. On peut prendre par exemple la fonction qui associe à chaque $d = (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ le nombre réel $i(d) \in [0,1)$ représenté par $0, d$ en base 10, i.e

$$i(d) = \sum_{n\in\omega} \frac{d_n}{10^n}.$$

En effet si d et d' sont distincts dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, alors il existe N minimal avec $d_N \neq d'_N$. Sans perte de généralité supposons que $d_N = 0$ et $d'_N = 1$, comme nous avons

$$\frac{1}{10^N} > \frac{1}{9\cdot 10^N} = \sum_{i>N} \frac{1}{10^i} \geqslant \sum_{i>N} \frac{d_i}{10^i}$$

il s'ensuit que $i(d) < i(d')$.

2. Par exemple $j : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ définie par $j(x) = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leqslant x\}$.
3. Comme $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ – à chaque sous-ensemble de $\mathbb{N}$ correspond sa fonction caractéristique – et que $\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$ (voir Série 1) et donc $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$, les deux points précédents nous permettent de conclure par le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein.
4. L'association à chaque suite $P : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ de parties de $\mathbb{N}$ de la partie $b(P) \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ définie par

$$(m,n) \in b(P) \quad \text{si et seulement si} \quad m \in P(n)$$

est une bijection.

5. Clairement pour tout $n \geqslant 1$, nous avons une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. De plus comme

$$\mathbb{R} \cong \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cong \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}},$$

nous avons le résultat par le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein (notez que nous n'avons pas utilisé l'axiome du choix dans la solution de cet exercice).